

部定大學用書

# 近代物理學

(下 册)

國立編譯館大學用書編審委員會主編

王碩輔編著

國立編譯館出版  
正中書局印行

部 定 大 學 用 書

近 代 物 理 學

(下 册)

國 立 編 譯 館 大 學 用 書 編 審 委 員 會 主 編

王 碩 輔 編 著

國 立 編 譯 館 出 版  
正 中 書 局 印 行



版權所有

翻印必究

中華民國五十四年三月臺初版

中華民國六十五年九月臺六版

部定書 近代物理學 全二册  
大學用書

下册 基本定價 二元四角

(外埠酌加運費滙費)

主編者	國立編譯館大學用書編審委員會
編著者	王 碩 輔
出版者	國 立 編 譯 館
發行人	黎 元 譽
發行印刷	正 中 書 局 (臺灣臺北市衡陽路二十號)
海外總經銷	集 成 圖 書 公 司 (香港九龍油麻地北海街七號)
	海 風 書 店 (日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番點)
	東 海 書 店 (日本京都市左京區田中門前町九八番地)

新聞局出版事業登記證 局版臺業字第〇一九九號(4659)申  
(500)

## 序

編者近幾年教授近代物理學，深感此科西籍名著雖多，然因深淺不一，初學者必須多方參考，難免吃力費時，復感此科中文書籍較為缺乏，遂不揣非學，參考國外有關諸書，將其基本觀念，基本原理，重要定理，各種問題之解法，擷英取華，尤注意公式之導證，匯編是書，以適合今日大學教課及一般參考之兩種用途。

自量子力學由 Heisenberg 及 Schrödinger 分別提出後，原子物理學之發展乃突飛猛進，故吾人若欲詳細討論原子，原子核及其他問題，則必須引用量子力學，編者有鑑於此，特於本書中第九，第十一及第十二，三章中介紹初等程度之量子力學，以便探討本書第十四章以後之諸問題。

本書專門名詞，多採自教育部頒佈之物理學名詞，原子能名詞及化學名詞等。未頒佈之名詞，則依照國內所通用者或由編者自擬。但人名除極少數外均書以原文，而未用譯名。

本書下冊之內容多取自下列各書，其中尤以採用(4)(5)(10)(12)四書較多，謹向各該書著者表示謝意。

- (1) R.B. Leighton: Principles of Modern Physics.
- (2) F.K. Richtmyer, E.H. Kennard and T. Lauritsen:  
Introduction to Modern Physics.
- (3) Pauling and Wilson: Introduction to Quantum  
Mechanics.
- (4) C. Kittel: Introduction to Solid State Physics.
- (5) A.J. Dekker: Solid State Physics.

- (6) F. Seitz: The Modern Theory of Solids.
- (7) L. Brillouin: Statistique Quantique.
- (8) R.W. Gurney: Introduction to Statistical Mechanics.
- (9) 原島鮮: 物性論概說。
- (10) E.B. Shpolski: Atomic Physics.
- (11) R.G. Sachs Nuclear Physics.
- (12) 野中到: 核物理學

本書係屬初版，欠妥之處在所難免，尚望讀者不吝指正為幸。

王碩輔謹識

中華民國四十九年五月於東海大學

## 近代物理學下冊

## 目 錄

## 第十七章 分 子 構 造

- |                                      |    |   |    |
|--------------------------------------|----|---|----|
| § 17-1 分子內電荷的分佈.....                 | 1  | § 17-8 偶極矩與分子構造.....                            | 21 |
| § 17-2 電子極化及原子極化.....                | 2  | § 17-9 分子中之電子及其原子<br>核的運動方程式.....               | 23 |
| § 17-3 取向極化.....                     | 6  | § 17-10 氫分子游子 ( $H_2^+$ ).....                  | 25 |
| § 17-4 氣體之靜電介質常數.....                | 11 | § 17-11 正常氫分子及氦分子游<br>子 ( $He_2^+$ ) 之電子狀態..... | 28 |
| § 17-5 局部電場.....                     | 12 | § 17-12 分子之轉動及振動.....                           | 33 |
| § 17-6 Clausius-Mossotti 公<br>式..... | 16 | § 17-13 分子能階及帶光譜.....                           | 42 |
| § 17-7 電子極化和游子極化的<br>古典理論.....       | 17 | § 17-14 Raman 效應.....                           | 45 |

## 第十八章 原子或分子間之作用力與物質結合

- |                  |    |                              |    |
|------------------|----|------------------------------|----|
| § 18-1 引言.....   | 48 | § 18-4 Van der Waals 結合..... | 53 |
| § 18-2 游子結合..... | 49 | § 18-5 金屬結合.....             | 62 |
| § 18-3 共價結合..... | 52 |                              |    |

## 第十九章 金屬之自由電子理論及量子統計學

- |                              |    |                              |     |
|------------------------------|----|------------------------------|-----|
| § 19-1 引言.....               | 65 | § 19-7 Bose-Einstein 統計..... | 95  |
| § 19-2 導電係數與歐姆定律.....        | 66 | § 19-8 傳導順磁性之量子<br>子論.....   | 99  |
| § 19-3 傳導電子之熱容及其順<br>磁性..... | 72 | § 19-9 熱發射.....              | 101 |
| § 19-4 金屬中之自由電子之量<br>子論..... | 75 | § 19-10 冷發射.....             | 106 |
| § 19-5 Fermi-Dirac 統計.....   | 80 | § 19-11 兩種金屬間之接觸電位<br>差..... | 111 |
| § 19-6 理想 Fermi 氣體.....      | 85 |                              |     |

## 第二十章 固體之帶理論

- |                                 |                               |
|---------------------------------|-------------------------------|
| § 20-1 引言.....115               | § 20-7 以帶理論討論結晶中電子之運動.....148 |
| § 20-2 Bloch 定理.....116         | § 20-8 導體，絕緣體及眞性半導體.....150   |
| § 20-3 Kronig-Penney 模型.....121 | § 20-9 正孔.....153             |
| § 20-4 近乎自由電子之近似.....128        | § 20-10 Hall 效應.....154       |
| § 20-5 結晶中電子之運動.....139         |                               |
| § 20-6 堅固結合之近似法.....143         |                               |

## 第二十一章 半導體及晶體之整流作用

- |                               |                             |
|-------------------------------|-----------------------------|
| § 21-1 在絕緣體及半導體中電子之分佈.....157 | § 21-5 金屬—半導體接觸之整流性.....168 |
| § 21-2 非眞性半導體.....161         | § 21-6 $p-n$ 接合整流器.....170  |
| § 21-3 在非眞性半導體中電子之分佈.....164  | § 21-7 電導體.....172          |
| § 21-4 兩種金屬間障壁層之整流作用.....167  |                             |

## 第二十二章 天然放射性

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| § 22-1 放射性之發現.....175      | § 22-4 遞次變換理論及放射平衡.....181 |
| § 22-2 放射性元素之蛻變.....177    | § 22-5 放射系.....185         |
| § 22-3 放射性元素之半化期.....179   | § 22-6 放射性之單位.....190      |
| § 22-4 遞次變換理論及放射平衡.....181 |                            |

## 第二十三章 原子核之一般性質

- |                     |                        |
|---------------------|------------------------|
| § 23-1 原子核.....193  | § 23-7 核之電矩.....210    |
| § 23-2 核之自轉.....195 | § 23-8 結合能.....212     |
| § 23-3 核之成份.....198 | § 23-9 半經驗質量公式.....222 |
| § 23-4 核之統計.....201 | § 23-10 氘核.....227     |
| § 23-5 核之大小.....203 | § 23-11 氘核的理論.....229  |
| § 23-6 核之磁矩.....207 | § 23-12 核力.....234     |

## 第二十四章 放射線與物質之相互作用

- |                         |                               |
|-------------------------|-------------------------------|
| § 24-1 放射線之觀測方法.....243 | § 24-2 $\alpha$ 質點之射程.....249 |
|-------------------------|-------------------------------|

- |                                    |                         |
|------------------------------------|-------------------------|
| § 24-3 $\beta$ 質點之射程.....253       | § 24-5 正電子.....260      |
| § 24-4 $\gamma$ 射線與物質的相互作用.....256 | § 24-6 中子與物質之相互作用...264 |
|                                    | § 24-7 慢中子之繞射.....269   |

## 第二十五章 $\alpha, \beta$ 蛻變及 $\gamma$ 輻射

- |  |  |
|--|--|
| § 25-1 $\alpha$ 蛻變.....273                 | § 25-6 K 電子捕獲.....291                          |
| § 25-2 $\alpha$ 射線譜之構造.....276             | § 25-7 簡單的 $\beta$ 射線譜及複雜的 $\beta$ 射線譜.....294 |
| § 25-3 $\beta$ 蛻變.....280                  | § 25-8 $\gamma$ 輻射.....296                     |
| § 25-4 微中子.....284                         | § 25-9 異性核.....298                             |
| § 25-5 容許 $\beta$ 轉移與禁止 $\beta$ 轉移.....286 |  |

## 第二十六章 高能質點加速器

- |                                    |                        |
|------------------------------------|------------------------|
| § 26-1 引言.....301                  | § 26-4 線型加速器.....306   |
| § 26-2 Cockcroft-Walton 裝置.....302 | § 26-5 定頻迴旋加速器.....308 |
| § 26-3 Van de Graff 發電機...303      | § 26-6 貝他加速器.....311   |
|                                    | § 26-7 同步加速器.....315   |

## 第二十七章 核 反 應

- |                              |                                      |
|------------------------------|--------------------------------------|
| § 27-1 核反應之一般性質.....319      | § 27-9 質子, $\alpha$ 質點感召的核反應.....350 |
| § 27-2 能量及動量不滅律之同時應用.....324 | § 27-10 氘核感召的核反應.....356             |
| § 27-3 有效截面.....330          | § 27-11 超高能之核反應.....359              |
| § 27-4 複核.....332            | § 27-12 光蛻變.....361                  |
| § 27-5 原子核之能級.....334        | § 27-13 核分裂.....362                  |
| § 27-6 原子核之模型.....336        | § 27-14 核分裂之理論.....367               |
| § 27-7 能階幅及共鳴.....342        | § 27-15 鍊鎖反應及原子堆.....372             |
| § 27-8 中子感召的核反應.....348      | § 27-16 熱核反應.....376                 |

## 第二十八章 宇 宙 射 線

- |                              |                               |
|------------------------------|-------------------------------|
| § 28-1 宇宙射線之發現及其基本觀察.....381 | § 28-3 原宇宙射線由於碰撞所耗的能量.....387 |
| § 18-2 原宇宙射線.....385         | § 28-4 射叢.....390             |



§ 28-5 宇宙射線之來源.....393

附錄 VI 兩個質子之靜電相互作用  
用能.....395

附錄 VII 彈性碰撞與非彈性碰撞.....396

附錄 VIII 同位素.....403

索引.....430

第一編 力學

101 ..... 質點之運動 1-101

102 ..... 剛體之運動 1-102

103 ..... 流體之運動 1-103

104 ..... 振動 1-104

105 ..... 波動 1-105

106 ..... 光學 1-106

107 ..... 聲學 1-107

108 ..... 熱學 1-108

109 ..... 電學 1-109

110 ..... 磁學 1-110

第二編 電磁學

201 ..... 靜電學 2-201

202 ..... 靜磁學 2-202

203 ..... 電磁感應 2-203

204 ..... 交流電 2-204

205 ..... 電容 2-205

206 ..... 電阻 2-206

207 ..... 電導 2-207

208 ..... 電位 2-208

第三編 光學

301 ..... 光之傳播 3-301

302 ..... 干涉 3-302

303 ..... 衍射 3-303

304 ..... 偏振 3-304

305 ..... 色散 3-305

306 ..... 吸收 3-306

307 ..... 散射 3-307

308 ..... 光譜 3-308

309 ..... 光學儀器 3-309

310 ..... 光學之應用 3-310

311 ..... 光學之發展 3-311

312 ..... 光學之未來 3-312

第四編 原子物理

401 ..... 原子之結構 4-401

402 ..... 原子之能級 4-402

403 ..... 原子之輻射 4-403

404 ..... 原子之吸收 4-404

405 ..... 原子之碰撞 4-405

406 ..... 原子之化學 4-406

407 ..... 原子之物理 4-407

408 ..... 原子之應用 4-408

## 第十七章 分子構造

### § 17-1 分子內電荷的分佈

一個分子係由少數個質量甚大的原子核，和繞此諸核運行的電子團所組成。分子中的原子核，亦作運動，然因其質量遠大於電子，其運動較電子者甚慢，故在討論分子中電子的問題時，常將核視為靜止。在研討分子本性時，吾人必須先知道分子內電荷的分佈，分子內的電荷一部份為原子核所帶的正電，另一部份則為電子團所帶的負電，就一中性分子言，此正負電量為相等。此等電荷在分子內的分佈，係決定於核間的距離及電子雲的帶電密度。電子雲的帶電密度，在古典論，係以電子所經歷的空間中之單位體積內所含的平均電量表示之；在量子力學，以波的或然率示之。

分子中既含有帶正電的原子核，自應有其正電荷的重心，同理亦應有負電荷的重心，當正負電荷的重心相一致時，吾人即可視電子雲對核的重心，係以球對稱之形式分佈於空間，此種分子通稱為無極分子 (Nonpolar molecule)，然在一般情形，分子之正電荷重心與其負電荷重心並不一定脗合，因而有許多分子成為電的偶極子 (Dipole)，如此分子通稱為有極分子 (Polar molecule)，亦稱它為永久偶極子 (Permanent dipole)，其對外所呈電的效應係取決於其偶極矩 (Dipole moment)，有極分子的偶極矩  $p_0$  可寫作：

$$p_0 = \sum e r \quad (1-1)$$

$r$  為核和電子的向徑， $\sum$  係指就一切的核和電子取和之意。 $\bar{e}r$  方之橫線為平均值符號。如果  $p_0 = 0$ ，則分子的電性質，在第一次近似，可以其成分為

$$\theta_{xx} = \sum e x^2, \dots \dots \dots ; \quad \theta_{xy} = \sum e x y \dots \dots \dots (1-2)$$

之四極矩 (Quadrupole moment) 表示之。因此處之  $\theta$  與力學中之轉動慣量或慣量乘積相似，故稱它為電的轉動慣量 (Electrical moment of inertia)，此量為一張量。

若自外方給分子施以電場，則原子核即向電場方向移動，電子則向電場之反向移動，而使分子產生應變，此種應變因電子與核間的引力作用而被限制，不能任意增加，終將達至平衡狀態。當分子的應變達到平衡時，分子中正電荷重心與負電荷重心，便相隔某距離而成為電的偶極子，於是一無極分子受外電場作用時，因電場的感應它將成為電的偶極子，其偶極矩  $p$  顯然與外加電場的強度  $E$  成正比，即

$$p = \alpha E \quad (1-3)$$

此處之比例係數  $\alpha$  通稱為極化率 (Polarizability)。就球對稱的分子言， $\alpha$  不因方向而異，亦即  $\alpha$  為一無向量。若就一般分子言，其  $\alpha$  則因方向而異，亦即  $\alpha$  為一張量，可以橢圓體表示之。由此可知分子構造與  $\alpha$  有密切的關係。於是，對於分子的構造，可從  $\alpha$  值之測定或計算，研討之。

### § 17-2 電子極化及原子極化

(i) 極化 圖 17-1 所示者，是一平板狀電容器之簡圖，一板帶正電，另一板帶等量的負電，其表面電荷密度設為  $q$ ，若兩板間為真空，則兩板間的電場強度  $E_{vac}$

$$E_{vac} = 4\pi q = D \quad (2-1)$$

$D$  通稱為電位移 (Electric displacement) 或稱它為通量密度 (Flux density)。兩板間的電位差  $\phi_{vac}$  可寫作：

$$\phi_{vac} = E_{vac} \cdot d \quad (2-2)$$

若此板的面積為  $A$ ，其一板上所帶的電量為  $Q$ ，則

$$C_{vac} = \frac{A \cdot q}{\phi_{vac}} = \frac{Q}{\phi_{vac}} \quad (2-3)$$

茲設在兩板間之距離及電荷  $Q$  均未有改變之情形下，置絕緣物於其兩板間。如衆所知，此時兩板間的電位差  $\phi$  則較  $\phi_{vac}$  爲小，故此  $\phi$  可寫作：

$$\phi = \frac{\phi_{vac}}{\epsilon}$$

由此得

$$\epsilon = \frac{\phi_{vac}}{\phi}$$

$\epsilon$  通稱爲靜的介質常數 (Static dielectric constant)。由  $\phi_{vac} = D \cdot d$  及  $\phi = Ed$ ， $\epsilon$  亦可寫作：

$$\epsilon = \frac{D}{E} \quad (2-4)$$

通常係以此式表示  $\epsilon$ 。

在未插入絕緣物之前，平行板上的電荷密度  $q = E_{vac}/4\pi$ ，插入後之電荷密度  $q'$  應爲  $E/4\pi$ ，於是，因介質之插入，平行板上的電荷則減少  $P$

$$P = q - q' = \frac{E_{vac}}{4\pi} - \frac{E}{4\pi} = \frac{E_{vac}}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) = (\epsilon - 1) \frac{E}{4\pi} \quad (2-5)$$

此  $P$  即是產生在靠近正極板之介質面上的表面電荷，亦是其反側的表面電荷，通稱此  $P$  爲極化 (Polarization)。

由式 (2-5)， $\epsilon$  尙可寫作：

$$\epsilon = 1 + 4\pi \frac{P}{E} = 1 + 4\pi x \quad (2-6)$$

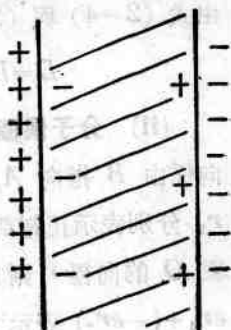


圖 17-1

$$\text{但 } x = \frac{P}{E} \quad (2-7)$$

此  $x$  通稱為極化係數 (Susceptibility)，常用以討論物質之極化。再由式 (2-4) 與 (2-5) 可得  $D$  與  $E$  間的關係：

$$D = E + 4\pi P \quad (2-8)$$

(ii) 分子偶極矩 圖 17-2 係示一偶極子，其偶極矩為  $ed$ ，方向係由  $B$  指向  $A$ ，今如取  $r_1$  及  $r_2$  分別表示正電荷及負電荷對原點  $O$  的向徑，則其偶極矩亦可以  $er_1 + (-er_2)$  表示之，蓋因

$$\begin{aligned} er_1 + (-er_2) &= er_1 - er_2 \\ &= e(r_1 - r_2) \\ &= ed \end{aligned}$$

由此，一分子或一系偶極子的偶極矩  $p$  可寫作：

$$p = \sum_i e_i r_i \quad (2-9)$$

$e_i$  係示一個電子所帶的負電荷，或示一個原子核所帶的正電，當  $e_i$  代表電子的電荷時，此  $e_i$  即等於 “ $-e_i$ ”， $e_i$  表示原子核所帶的電時，此  $e_i$  即為 “ $+Ze_i$ ”， $\Sigma$  係指就分子內所有的電子及核求和之意。從此可知，若全系為電的中性，即  $\sum_i e_i = 0$  時， $p$  則與向徑原點之選擇無關。吾人往後所欲討論的系統，多為  $\sum_i e_i = 0$  者。

(iii) 極化率——孤立的原子未受外電場作用時，因其原子核的重心與電子團的重心處在同一點，故其偶極矩為零。當它被置於外電場中時，如前文所述，因外電場的作用，核將向電場方向移動，電

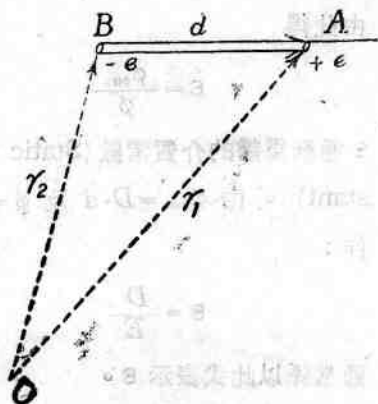


圖 17-2

子則向電場的反向移動，而呈極化，其偶極矩  $\mu_{ind}$  爲

$$\mu_{ind} = \alpha_e E \quad (2-10)$$

此處之  $\alpha_e$ ，通稱爲原子的電子極化率 (Electronic polarizability)。式 (2-10) 中之  $\mu_{ind}$ ，係因外電場的感應而生的偶極矩，故通稱它爲感應偶極矩 (Induced dipole moment)。

茲爲估計此  $\alpha_e$  的大小，提出一如圖 17-3 所示的簡單模型，將原子視爲帶電  $Ze$  的核爲其中心，其負電荷均勻地分佈成一半徑爲  $r$  的球。 $d$  表示因外電場作用核的位移。根據此模型，核的復原力則決定於半徑爲  $d$  之球內所包含的負電荷  $q$ ，此  $q$  爲

$$q = \frac{4}{3} \pi d^3 \rho$$

但  $\rho$  爲此球內負電荷的密度。半徑  $r$  之球內所含的負電荷爲  $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ ，此亦可寫爲  $Ze$ ，即

$$Ze = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

取此二式之比，可得

$$q = \frac{Zed^3}{r^3}$$

於是核的復原力爲

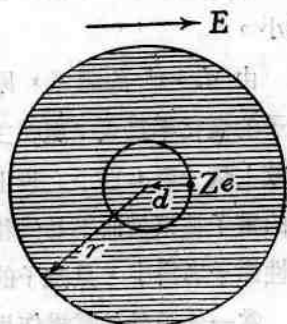
$$\frac{Zed^3}{r^3} \times \frac{Ze}{d^2} = \frac{Z^2 e^2 d}{r^3}$$

再由平衡條件，得

$$ZeE = \frac{(Ze)^2 d}{r^3} \quad \text{或} \quad E = \frac{Zed}{r^3}$$

於是，因電場之感應而起的暫時偶極矩  $\mu_{ind}$  可寫作：

$$\mu_{ind} = Zed$$



17-3

或改寫作：

$$\mu_{ind} = r^3 E \quad (2-11)$$

在另一方面，此  $\mu_{ind}$  亦可寫作：

$$\mu_{ind} = \alpha_e E \quad (2-12)$$

由式 (2-11) 與 (2-12) 之比較，得電子極化率爲

$$\alpha_e = r^3$$

其因次爲  $[L^3]$ ，因原子半徑  $r \approx 10^{-8}$  厘米，故  $\alpha_e$  值約爲  $10^{-24}$  [厘米]<sup>3</sup> 之程度，從此吾人亦能估計出  $d$ ，對普通的外電場 ( $E = 300$  伏特/厘米)， $d$  值約爲  $10^{-15}$  厘米。從此可知對普通的外電場， $d$  值則遠比  $r$  值爲小。

由  $\alpha_e = r^3$  的關係，原子序數大的原子的極化率比原子序數小的原子的極化率爲大；處在主量子數較大之殼上的電子，對極化的賦與，較主量子數  $n$  爲小之殼上之電子者爲大，此因處在主量子數小的殼上的電子被束縛而不易位移也。從後述的事實，正游子的極化率比其中性原子者爲小，負游子的極化率則比其中性原子者爲大。

當一分子受外電場作用時，一如原子受電場感應，屬於各原子的電子均對各該原子核實行位移，以生電子極化；組成分子的原子或游子，在通常情況，也作位移，使分子發生極化，此種極化通稱爲原子極化 (Atomic polarization) 或稱爲游子極化 (Ionic polarization)。因分子中游子的位移而起的偶極矩，亦可寫作如式 (2-10) 所示之形式。但  $\alpha_e$  須換爲  $\alpha_a$ ，此  $\alpha_a$  稱爲原子極化率 (Atomic polarizability)，或稱爲游子極化率 (Ionic polarizability)。根據實驗，許多分子的  $\alpha_a$  約爲  $\alpha_e$  的一百份之十。

### § 17-3 取向極化

物質之極化，除已述的電子極化及原子極化之外，尚有一種名爲取向極化 (Orientational polarization) 者。取向極化，係源自有極分子自身所具的永久偶極矩。

茲設有一系相同的有極分子均處在氣體狀態，彼此間的相互作用甚小而可忽視，在未給此系加以外電場時，由於組成此系各分子的永久偶極矩凌亂地排列，此系則不呈偶極矩。然當它受一外電場作用時，各永久偶極子因轉矩作用，即轉向電場，如圖 17-4 所示，然因分子熱運動的影響，彼等轉至某角度  $\theta$  後即告停止，此時各永久偶極子在電場方向均有一成分，其在與電場垂直方向的分則互相抵消，因而此系即呈極化於電場方向。如此極化通稱爲取向極化。

就一般而言，永久偶極子與電場所成的角度  $\theta$  因分子而異（因分子的熱運動），故諸永久偶極子在電場方向的分常爲不同值，有的較大而有的甚小。就同一分子言，其值常隨時間而變。因此在討論一分子因外電場作用，呈現於電場方向的極化時，須就其在電場方向成分之平均值討論之。

當有極分子的永久偶極矩  $\mu$  與電場成  $\theta$  角時，其位能爲

$$\begin{aligned} V &= -\mu E \cos\theta \\ &= -\mu \cdot E \end{aligned} \quad (3-1)$$

根據 Boltzmann 統計，一偶極子出現於  $\theta$  與  $\theta + d\theta$  間之立體角  $d\Omega$  內的或然率，與  $\exp\left(-\frac{V}{hT}\right)$  成正比，故永久偶極矩在電場方向之成

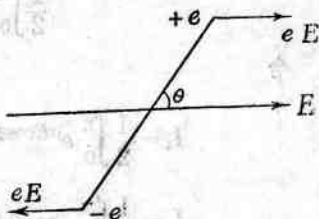


圖 17-4

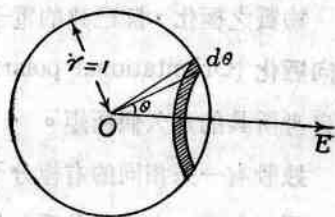


分之平均值  $\langle \mu \cos \theta \rangle$  可寫作：

$$\mu \langle \cos \theta \rangle = \frac{\int \mu \cos \theta e^{-V/kT} d\Omega}{\int e^{-V/kT} d\Omega}$$

由立體角的定義和圖 17-5, 知此處之

$d\Omega = 2\pi \sin \theta \cdot d\theta$ , 於是上式亦可寫作：



17-5

$$\mu \langle \cos \theta \rangle = \frac{\frac{1}{2} \int_0^\pi \mu \cos \theta e^{\mu E \cos \theta / kT} \sin \theta \cdot d\theta}{\frac{1}{2} \int_0^\pi e^{\mu E \cos \theta / kT} \sin \theta \cdot d\theta} \quad (3-2)$$

令

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{\mu E \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\pi \mu \cos \theta e^{\mu E \cos \theta / kT} \sin \theta \cdot d\theta$$

茲為求此二積分, 在此引入一新變數  $x$ , 即  $\cos \theta = x$ , 以代替  $\theta$ 。由此  $\sin \theta \cdot d\theta = -dx$ , 於是積分  $I_1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{\mu E x / kT} dx = \frac{kT}{2\mu E} \left[ e^{\mu E x / kT} \right]_{-1}^{+1} \\ &= \frac{kT}{\mu E} \frac{e^{\mu E / kT} - e^{-\mu E / kT}}{2} \end{aligned}$$

若再令  $a = \frac{\mu E}{kT}$ , 由公式  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ , 則

$$I_1 = \frac{\sinh a}{a}$$

積分  $I_2$  則為

$$I_2 = \frac{\mu}{2} \frac{d}{da} \int_0^\pi e^{a \cos \theta} \sin \theta \cdot d\theta = \mu \frac{d}{da} \left( \frac{\sinh a}{a} \right)$$