COLLEGE MATHEMATICS

理工类、经济类

大学数学复习指南

干晓蓉　邱达三　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

理工类、经济类

大学数学复习指南

干晓蓉　邱达三　编

机　械　工　业　出　版　社

本书根据理工类及经济类大学数学（含高等数学、线性代数、概率论与数理统计等三门课程）的教学内容，参考全国硕士研究生人学统一考试《数学考试大纲》的要求，选编了大量的例题进行分析讲解，并配有一定数量的习题. 可作为理工类及经济类大学各专业学生数学学习及准备考研的数学复习参考书，也可作为有关教师的数学教学参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学复习指南/干晓蓉，邱达三编．—北京：机械工业出版社，2010.7
理工类、经济类
ISBN 978-7-111-30611-5

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①干…②邱…　Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 084408 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　朱红波　版式设计：霍永明
责任校对：李秋荣　封面设计：张　静　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷(兴文装订厂装订)
2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm・34 印张・864 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-30611-5
定价：58.00 元

前　　言

本书根据理工类及经济类大学数学（含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门课程）的教学内容，参考全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》的要求，选编了大量的例题进行分析讲解，并配有一定数量的习题.可作为理工类及经济类大学各专业学生数学学习及准备考研数学复习的参考书，也可作为有关教师的数学教学参考资料.

全书分为一元函数微积分，多元函数微积分，线性代数，概率论与数理统计共四章.每章各小节都是从复习基本知识开始，再列举大量的综合例题，最后配有一定数量的习题，并给出习题的答案与提示.对于**基本知识**部分，包含了理工类及经济类的考研数学大纲所要求的基本概念、定理、公式与方法，并按照一定的逻辑顺序进行安排.对这部分内容的叙述，我们力求做到简明扼要，仅是各科数学内容的摘要，不作过多的论述和证明，以有利于记忆和掌握基本知识.对于**例题**部分，这是本书的重点.除了少数例题是为了复习基本概念和方法之外，大多数都是从历年理工类及经济类各科的考研试题中挑选出来，加以适当分类，并按基本知识叙述的先后顺序进行安排.对于其中的填空与选择题，都是先做了详细分析再给出答案.对于大部分的解答与证明题，也都先做解题要点的分析，才进行详细解答与证明.这部分内容，我们力求做到选题多样，与基本知识联系紧密，解题方法具有启发性，叙述清晰详尽.对于**习题**部分，大多数也是选自历年考研试题.并在全书最后，给出它们的答案或提示，有些还给出了较详细的解答.

本书的前三章是由邱达三与干晓蓉合作编写的，作为内部教材，在考研辅导班中使用多年.在此期间，还对内容进行了多次修改.这次，是由干晓蓉做了一次全面的修改与补充，并增加了第四章概率论与数理统计.在编写过程中，我们虽尽力想把工作做好.但书中难免仍会存在缺点和错误，敬请各位读者给予批评、指正.

编　者

2009 年 7 月于昆明

目 录

第一章 一元函数微积分

§1. 函数、极限、连续

一、函数

1. 定义

设 D 是实数集，$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，$x,y$ 是变量，若对每个 $x\in D$，按某一法则 f，有确定的值 $y\in\mathbf{R}$ 和它对应，则称 y 是 x 的函数，通常记作

$$y=f(x),x\in D \quad \text{或用映射记号记作} \quad f:D\to\mathbf{R}$$

D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量. 当 x 取值 x_0 时，y 对应的函数值记为 $f(x_0)$，数集 $f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数的值域.

决定函数的两大要素是定义域 D 和对应法则 f. 两个函数只有当定义域相同且自变量的每一个值所对应的函数值都相等才是相同的函数. 例如：设

$$f_1(x)=\sqrt{x^2}\quad,\quad f_2(x)=|x|\quad,\quad f_3(x)=e^{\ln|x|},$$

则有 $f_1(x)=f_2(x)$，但 $f_2(x)\neq f_3(x)$，这是因为 $f_2(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $f_3(x)$ 的定义域为 $x\neq0$，定义域不同，故为不同的函数.

在高等数学中，常见的函数关系有初等函数、分段函数、隐函数、参数方程表示的函数、用定积分表示的函数、用极限或无穷级数表示的函数等，这里先复习前两种，其余的在后面可以陆续见到.

(1) 初等函数

以下这些函数称为基本初等函数.

幂函数：　$y=x^\mu$　(μ 为实数)，定义域至少包含区间 $(0,+\infty)$，至于 $x\leqslant0$ 是否有定义，应由指数 μ 的值而定. 例如 $y=\dfrac{1}{x}(x\neq0)$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}(x>0)$，$y=x^2(-\infty<x<+\infty)$.

指数函数：　$y=a^x$　$(a>0)$ 及 e^x　$(-\infty<x<+\infty)$.

对数函数：　$y=\log_a x$　$(a>0,a\neq1)$ 及 $\ln x(x>0)$.

三角函数：　$y=\sin x$，　$\cos x$　$(-\infty<x<+\infty,|y|\leqslant1)$.

$y=\tan x\ (x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi)$，$\cot x\ (x\neq k\pi)$.

$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}(x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi)$，$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}(x\neq k\pi)$.

反三角函数：　$y=\arcsin x$　$(|x|\leqslant1,|y|\leqslant\dfrac{\pi}{2})$.

$y=\arccos x$　$(|x|\leqslant1,0\leqslant y\leqslant\pi)$.

$y=\arctan x$　$(x\in(-\infty,+\infty),|y|<\dfrac{\pi}{2})$.

$y=\text{arccot}\,x$　$(x\in(-\infty,+\infty),0<y<\pi)$.

由基本初等函数及常数出发，经过有限次四则运算及复合运算所得的一切函数统称为初

等函数，例如：
$$y=e^{x^2}+\frac{\arcsin 3x}{x^2-1},\qquad y=\ln\sqrt{\sin(2x+1)}.$$

由于初等函数是经常遇到的函数，学生在解答问题时做错，很大一部分原因是由于对基本初等函数不熟悉的缘故. 因此，在对高等数学复习的开始，务必对每一个基本初等函数的定义域、值域、图像、单调性、有界性、周期性、奇偶性等有一个清楚的了解，达到很熟悉的程度. 要达到这一点，最好的办法就是记住每一个基本初等函数的图像. 常见的基本初等函数的图像见图 1.1.1：

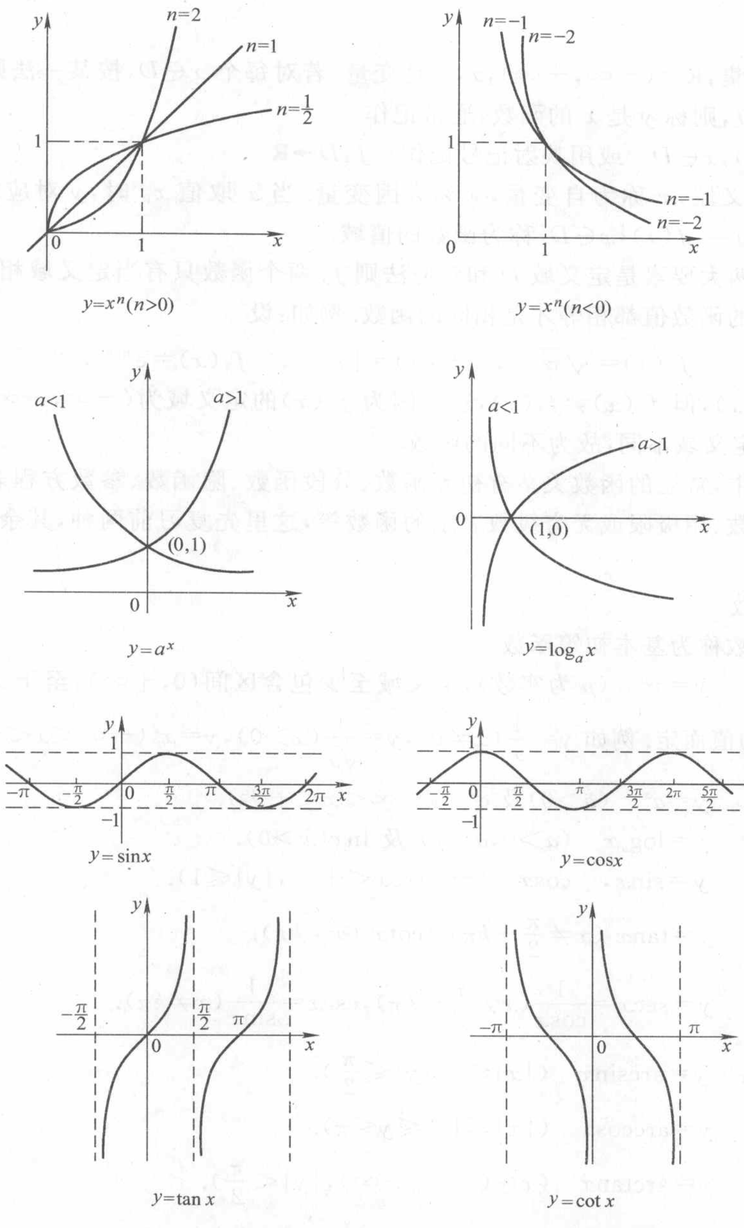

图 1.1.1

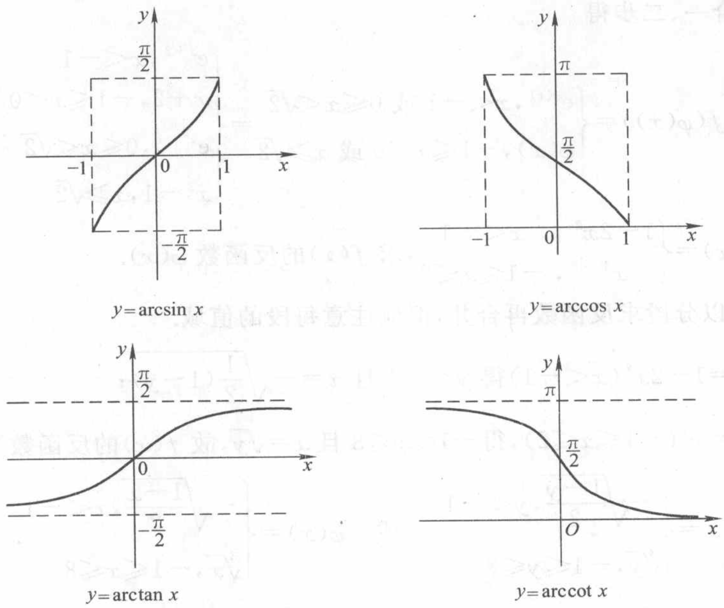

图 1.1.1 （续）

(2)分段函数

实际问题中，经常要根据 x 的不同范围采用不同的表达式计算函数值，这就要用分段函数表示法. 例如 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ 3x+1, & x>0\end{cases}$，其定义域是$(-\infty,+\infty)$.

2. 运算

函数可以进行加、减、乘、除、复合函数、反函数的运算.

例 1. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, x<1\\ x, x\geqslant 1\end{cases}$， $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, x<0\\ x^2-1, x\geqslant 0\end{cases}$，

求：(1) $f(x)+\varphi(x)$； (2) $f(\varphi(x))$.

[解] (1) 将两函数的定义域细分成相同区间，得

$$f(x)=\begin{cases}e^x, x<0\\ e^x, 0\leqslant x<1,\\ x, x\geqslant 1\end{cases}\quad \varphi(x)=\begin{cases}x+2, x<0\\ x^2-1, 0\leqslant x<1,\\ x^2-1, x\geqslant 1\end{cases}$$

故有
$$f(x)+\varphi(x)=\begin{cases}e^x+x+2, x<0\\ e^x+x^2-1, 0\leqslant x<1.\\ x+x^2-1, x\geqslant 1\end{cases}$$

(2) 分三步

第一步： $$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, \varphi(x)<1\\ \varphi(x), \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}.$$

第二步：解不等式 $\varphi(x)<1$ 与 $\varphi(x)\geqslant 1$.

$$\varphi(x)<1 \Leftrightarrow \begin{cases}x<0\\ x+2<1\end{cases} \text{ 或 } \begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-1<1\end{cases}\text{，得 } x<-1 \text{ 或 } 0\leqslant x<\sqrt{2};$$

$$\varphi(x)\geqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases}x<0\\ x+2\geqslant 1\end{cases} \text{ 或 } \begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-1\geqslant 1\end{cases}\text{，得 } -1\leqslant x<0 \text{ 或 } x\geqslant\sqrt{2}.$$

第三步：综合一、二步得

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, x<-1\text{ 或 }0\leqslant x<\sqrt{2}\\ \varphi(x), -1\leqslant x<0\text{ 或 }x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}=\begin{cases}e^{x+2}, x<-1\\ x+2, -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}.$$

例 2. 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，求 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(x)$.

［**分析**］ 可以分段求反函数再合并，但应注意每段的值域.

［**解**］ 由 $y=1-2x^2(x<-1)$ 得 $y<-1$ 且 $x=-\sqrt{\frac{1}{2}(1-y)}$；

由 $y=x^3(-1\leqslant x\leqslant 2)$，得 $-1\leqslant y\leqslant 8$ 且 $x=\sqrt[3]{y}$，故 $f(x)$ 的反函数为

$$x=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}, y<-1\\ \sqrt[3]{y}, -1\leqslant y\leqslant 8\end{cases}，\quad\text{或}\quad \varphi(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, x<-1\\ \sqrt[3]{x}, -1\leqslant x\leqslant 8\end{cases}.$$

（前面一个表达式以 y 为自变量，后面一个表达式以 x 为自变量）.

例 3. 求下列各小题中的 $f(x)$：

(1)已知 $f(\ln x)=x^2+2\ln x$； (2)已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+1$；

(3)已知 $f(x)+f\left(1-\frac{1}{x}\right)=2x$.

［**解**］ (1) 令 $\ln x=u$，则 $x=e^u$，代入原等式，得

$$f(u)=e^{2u}+2u,\qquad\text{故}\quad f(x)=e^{2x}+2x.$$

(2) 令 $x+\frac{1}{x}=u$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=u^2-2$，代入原等式，得

$$f(u)=u^2-1,\qquad\text{故}\quad f(x)=x^2-1.$$

(3)将原等式中的 x 换作 $\frac{1}{1-x}$，得 $\quad f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x}$.

再将此等式中的 x 换作 $\frac{1}{1-x}$，得 $\quad f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

将所得的两式相减，得 $\quad f(x)-f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{1-x}-2\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

将此式与原等式相加，得 $\quad f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$.

例 4. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

［**解**］ $f(\varphi(x))=e^{\varphi(x)^2}=1-x$，$\varphi(x)^2=\ln(1-x)$，因为 $\varphi(x)\geqslant 0$，故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 及 $1-x>0$，求得定义域为 $x\leqslant 0$.

3. 常见特性

(1) 有界性

$f(x)$ 在区间 I 上有界

$\Leftrightarrow$ 存在常数 A,B 使 $A\leqslant f(x)\leqslant B(x\in I)$，（$A$ 称下界，B 称上界）

$\Leftrightarrow$存在常数 $M>0$,使$|f(x)|\leqslant M(x\in I)$.

例如:$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$是有界函数,因为

$$|f(x)|=\frac{|x|}{1+x^2}=\frac{2|x|}{2(1+x^2)}\leqslant\frac{1}{2}\text{或}-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}.$$

在基本初等函数中,以下函数

$$\sin x,\cos x,\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\text{arccot}\,x$$

在其定义域内有界,而以下函数

$$x^n(n\neq 0),\mathrm{e}^x,\ln x,\tan x,\cot x$$

在其定义域内无界.

应注意,说到函数有界或无界时,应指出自变量的范围. 例如:$\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界,但在$\left(\dfrac{1}{100},+\infty\right)$内有界.

(2) 单调性

设 $f(x)$在区间 I 上有定义,对 I 中任意两点 x_1,x_2,

当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上单调增加(递增);

当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上单调减少(递减);

当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上单调不减;

当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上单调不增.

基本初等函数中,e^x,$\ln x$,$\arcsin x$,$\arctan x$ 在其定义域内是单调增加的;$\arccos x$,$\text{arccot}\,x$ 在其定义域内是单调减少的;而函数 $\sin x$,$\cos x$,$\tan x$,$\cot x$ 在其定义域内不是单调的,但在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上,$\sin x$,$\tan x$ 单调增加,在区间$(0,\pi)$上,$\cos x$,$\cot x$ 单调减少.

单调增加(减少)函数显然也是单调不减(不增)函数,反之不成立. 例如:设

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\leqslant 0\\ 1, & 0<x<1,\\ 2-x, & x\geqslant 1\end{cases}$$

则 $\operatorname{sgn}x$ 为单调不减函数,$f(x)$为单调不增函数,但它们都不是单调增加或单调减少函数,因为两个函数都在某个区间上为常数.

(3) 周期性

$f(x)$是周期为 T 的周期函数$\Leftrightarrow f(x+T)=f(x)$对定义域内的一切 x 成立.

容易证明:若 T 为 $f(x)$的周期,则

1) nT(n 为正负整数)也是 $f(x)$的周期; 2) $\dfrac{T}{k}$是 $f(kx)$的周期.

在初等函数中,三角函数是周期函数,其中 $\sin x$,$\cos x$ 的最小正周期为 2π,而 $\tan x$,$\cot x$ 及$|\sin x|$,$|\cos x|$,$\sin^2 x$ 的最小正周期为 π.

(4) 奇偶性

设 $f(x)$的定义域是关于原点对称的区间 I,则

$f(x)$为偶函数$\Leftrightarrow f(-x)=f(x)\quad(x\in I)$.

$f(x)$为奇函数$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\quad(x\in I)$

$$\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0 \quad (x\in I).$$

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

常见的偶函数有如：x^{2n}（n 为整数），$|x|$，$\cos x$，$|\sin x|$，$\sin^2 x$，….

常见的奇函数有如：x^{2n+1}（n 为整数），$\sin x$，$\tan x$，$\arcsin x$，$\arctan x$，….

大多数函数既非奇函数也非偶函数. 但若 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上，则 $f(x)$ 可表为奇函数与偶函数之和，即

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

其中 $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 为偶函数，$\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 为奇函数.

例 5. 设 $f(x)$ 的图像关于原点及关于直线 $x=k$ 都对称（常数 $k>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$），证明：$f(x)$ 为周期函数.

[证明] 对任意 x，$f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$ 及 $f(x)=f(2k-x)$，在第二个等式中，将 x 换作 $x+2k$ 得 $f(x+2k)=f(-x)=-f(x)$，再将 x 换作 $x+2k$ 得 $f(x+4k)=-f(x+2k)=f(x)$，故 $f(x)$ 以 $4k$ 为周期.

例 6. 判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{1}{2}$；　(2) $f(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，其中 $g(t)$ 为奇函数.

[解] (1) $f(-x)=\dfrac{1}{e^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^x}{1-e^x}+\dfrac{1}{2}$，

$f(x)+f(-x)=\dfrac{1-e^x}{e^x-1}+1=0$，故 $f(x)$ 为奇函数.

(2) $f(-x)=\displaystyle\int_0^{-x} g(t)\mathrm{d}t$，令 $t=-u$（定积分换元）

$$=\int_0^x g(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x g(u)\mathrm{d}u=f(x) \quad \text{(因为 } g \text{ 为奇函数)},$$

故 $f(x)$ 为偶函数. 同理可证：若 $g(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数.（注意：积分下限必须是 0）.

例 7. $f(x)=xe^{-|\sin x|}$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是

(A) 有界函数　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　(D) 奇函数　　[　　]

[分析] $f(x)$ 满足关系 $f(-x)=-f(x)$，故为奇函数，应选 (D)，其余 (A)，(B)，(C) 都不成立.

二、极限

1. 定义

数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

有极限的数列称为收敛数列，没有极限的数列称为发散数列.

函数极限：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A \Leftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

右极限： $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A \Leftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

函数在点 x_0 的极限与其左、右极限的关系是：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

对函数在点 x_0 的极限及左、右极限的定义中，是不考虑点 x_0 的函数值的，在点 x_0 有没有定义及定义什么值都与极限的存在性及极限值无关. 例如：设

$$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}，则有 \quad \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x).$$

函数极限与数列极限的关系是：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow 对任何数列\ x_n\neq x_0, x_n\to x_0，都有\ f(x_n)\to A \quad (n\to+\infty).$$

极限过程还可以是 $x\to+\infty,-\infty,\infty$ 的情形，$x\to\infty$ 指 $|x|\to+\infty$，即 $|x|$ 无限增大. 若作变量替换 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $x\to+\infty,-\infty,\infty$ 依次转化为 $t\to 0^+,0^-,0$ 的情形. 极限 A 也可以为 $+\infty$，$-\infty$，∞，但此时称极限不存在. 下面是几个常见的极限：

$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$， $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$， $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$， $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$ 不存在，

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在， $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在， $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ 不存在.

2. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

例 8. (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$ （因为 $n\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\to 0$）.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{-2a}}\right]^{\frac{-2ax}{x+a}}=e^{-2a}$ （方括号内的极限为 e）.

3. 四则运算定理

定理：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 存在；若还有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在，并且

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\ \begin{matrix}+\\-\\\times\\\div\end{matrix}\ g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\ \begin{matrix}+\\-\\\times\\\div\end{matrix}\ \lim_{x\to x_0}g(x).$$

（定理也适用于 $x\to\infty$ 的变化过程及数列的情形）

在使用四则运算定理时，应注意以下几点：

(1) 和、积运算可推广到有限个的情形，但必须个数固定不变，否则不成立。

例如：求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$，下面的做法是错误的

$$\text{原极限}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2}=0+0+\cdots+0=0.$$

因为这里项数 n 是在变化的，第一个等式不成立. 正确的做法是：先求和再求极限，得

$$\text{原极限}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2) 定理要求满足条件：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在（商的情形还要求分母极限不为零）. 若定理条件不满足，则有以下几种情形值得注意：

1) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$ 必不存在，但对 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 却不能得肯定结论.

这是因为若 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 存在，则由四则运算定理，应有 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}\{[f(x)+g(x)]-f(x)\}$ 存在，这与假设矛盾；同理可证 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ 必不存在.

对乘积情形，例如：$\lim\limits_{x\to 0}x=0$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{x}=1$ 存在，而 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 不存在. 对商的情形也容易举出类似的例子.

2) 下面几种情形可作一般结论：

$$\lim f(x)=0,\ g(x)\text{有界}\Rightarrow \lim f(x)\cdot g(x)=0.$$

$$\lim f(x)=\infty,\ g(x)\text{有界}\Rightarrow \lim\frac{g(x)}{f(x)}=0.$$

$$\lim f(x)=0,\ \lim g(x)=A\neq 0\Rightarrow \lim\frac{g(x)}{f(x)}=\infty.$$

例如：因为 $\sin\frac{1}{x}$ 有界，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

3) 以下七种情形属于未定式，不能作一般结论：

$\lim[f(x)-g(x)]=\infty-\infty$，　$\lim f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$，

$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，　$\lim f(x)^{g(x)}=0^0$，∞^0，1^∞.

遇到未定式时，要先变形，再用四则运算定理或用洛必达法则求极限.

例 9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cot 3x$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{3x^2-x+1}$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(100x^3+2x-5)}{\ln(2x^{10}+3x+1)}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}$；(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

[解] (1) 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\cos 3x}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

(2) 原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$.

一般地,设 $a_0\neq0,b_0\neq0$ 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},m=n\\0,\ m>n\\\infty,m<n\end{cases}.$$

(3) 原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x^3\left(100+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}\right)}{\ln x^{10}\left(2+\dfrac{3}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\ln x+\ln\left(100+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}\right)}{10\ln x+\ln\left(2+\dfrac{3}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(100+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}\right)}{10+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(2+\dfrac{3}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}\right)}=\dfrac{3}{10}$.

(4) 原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(3x^2+5)}{x(5x+3)}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}}=\dfrac{6}{5}$.

(5) 原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}\left[\dfrac{3\sin x}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1+x)}+\dfrac{x}{\ln(1+x)}\cdot x\cos\dfrac{1}{x}\right]$

$=\dfrac{1}{2}(3\cdot1+1\cdot0)=\dfrac{3}{2}$.

(其中 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$)

(6) 原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+b}(x+a+b)^{x+a}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{b}{x+a}\right)^{x+b}\left(1+\dfrac{a}{x+b}\right)^{x+a}}=\dfrac{1}{e^b\cdot e^a}=e^{-(a+b)}$.

其中

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{x+b}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{b}}\right]^{\frac{b(x+b)}{x+a}}=e^b$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{x+a}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a}}\right]^{\frac{a(x+a)}{x+b}}=e^a$$

例 10. 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

[解] 分别求 $x=0$ 处的左、右极限,得

左极限 $=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$,

右极限 $=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2e^{\frac{-4}{x}}+e^{\frac{-3}{x}}}{e^{\frac{-4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$,

故原极限=1.

例 11. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad(a\geqslant 0)$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

[**解**] (1)这是$(+\infty)-(+\infty)$的未定式,乘、除一个有理化因子,得

$$\text{原式}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2+\cdots+n}+\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n}{2}(n+1)}+\sqrt{\frac{1}{2}n(n-1)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) $$\text{原式}=\lim_{x\to a^+}\left[\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]$$

$$=\lim_{x\to a^+}\left[\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

(3) $$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}=-\frac{1}{4}.$$

例 12. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

[**分析**] 对 $x\to-\infty$的情形,为防止负数运算错误,可令 $x=-t$,化为 $t\to+\infty$的情形.

[**解**] 令 $x=-t$,原极限$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}}}=1$.

例 13. 试证:(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

[**证明**] (1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)=A\cdot 0=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}=\dfrac{0}{A}=0$.

（注：本例的结论在后面的解题中常用到）

例 14. 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，问：等式$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=A\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$是否成立？试就$A\neq 0$及$A=0$的情形作出回答.

［解］ 若$A\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}$存在，由四则运算定理，等式成立.

若$A=0$，则$\lim\limits_{x\to a}g(x)$不一定存在，等式不一定成立.

（注：由本题可知，在求乘积极限时，若有一个因子的极限不为零，则这个因子可以先求极限）

4. 洛必达法则

定理：设(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$；

(2) $f(x)$，$g(x)$在x_0邻域有导数(x_0除外)，且$g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$).

则有
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

洛必达法则是求七种未定式$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$，$0\cdot\infty$，0^0，∞^0，1^∞的有效工具，在求后面五种类型的极限时，要先变形为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$的形式再用这一法则. 在使用洛必达法则时，必须检查条件是否满足，特别要检查条件(1)，否则会引起错误.

5. 无穷小与无穷大

定义 1：$f(x)$为无穷小$\Leftrightarrow \lim f(x)=0$，$f(x)$为无穷大$\Leftrightarrow \lim f(x)=\infty$. 在具体实例中，必须指出自变量$x$的变化过程.

无穷小与无穷大的关系是：$f(x)$为无穷小$\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}$为无穷大(设$f(x)\neq 0$).

无穷小是极限存在的变量，是有界量，反之不成立；无穷大是极限不存在的变量，是无界量，反之不成立.

例 15. 当$x\to 0$时，变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是

(A)无穷小　　(B)无穷大

(C)有界的，但不是无穷小　　(D)无界的，但不是无穷大　　［　］

［分析］ 当x取数列$x_n=\dfrac{1}{n\pi}\to 0$时，$\dfrac{1}{x_n^2}\sin\dfrac{1}{x_n}=0\to 0$，当$x$取$y_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}\to 0$时，$\dfrac{1}{y_n^2}\sin\dfrac{1}{y_n}=\dfrac{1}{y_n^2}\to+\infty$，故知$x\to 0$时，$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是无界量，但不是无穷大，应选择(D).

定义 2(无穷小的比较)：设$x\to x_0$时，$f(x)$，$g(x)$都是无穷小.

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称$f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小，记为$f(x)=o(g(x))$.

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，则称$f(x)$与$g(x)$是同阶的无穷小.

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称$f(x)$与$g(x)$是等价的无穷小，记为$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$.

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=A\neq 0$(即$f(x)$与$g^k(x)$是同阶无穷小),则称$f(x)$是$g(x)$的$k$阶无穷小.

在计算乘积或商的极限时,可以将某个因子或整个分子或分母换作它的等价无穷小以简化计算(但不能对和式中某一项作这种替换).即若$x\to x_0$时,$g(x)\sim h(x)$,则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)h(x),\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)},\quad \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}$$

常用的等价无穷小有以下几个:当$x\to 0$时,有

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

例 16. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin(4\pi\sqrt{n^2+1})$.

(3)设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A$　$(a>0,a\neq 1)$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

[分析]　本例的极限宜用等价无穷小替换.

[解]　(1) 原极限$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 由周期性,$\sin(4\pi\sqrt{n^2+1})=\sin(4\pi\sqrt{n^2+1}-4\pi n)=\sin 4\pi(\sqrt{n^2+1}-n)$

$$=\sin\frac{4\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

原极限$\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin\dfrac{4\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4\pi n}{\sqrt{n^2+1}+n}=2\pi$.

(3) $x\to 0$时,$a^x-1\to 0$,故$\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)\to 0$,从而$\dfrac{f(x)}{\sin x}\to 0$.

由$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$,$\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)\sim\dfrac{f(x)}{\sin x}\sim\dfrac{f(x)}{x}$,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x\ln a}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2\ln a}=A,\text{故}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=A\ln a.$$

例 17. 设$f(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt$,$g(x)=x^3+x^4$,则当$x\to 0$时,$f(x)$是$g(x)$的

(A)等价无穷小　　(B)同阶但非等价的无穷小

(C)高阶无穷小　　(D)低阶无穷小　　[　　]

[分析]　用洛必达法则,并根据变上下限定积分的微分法,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2x)\cdot\cos x}{3x^2+4x^3}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2x)}{\sin^2x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{\cos x}{3+4x}=1\cdot 1^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\text{(不为0,也不等于1)},$$

故当$x\to 0$时,$f(x)$是$g(x)$的同阶无穷小但非等价的无穷小,应选(B).