



普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪大学数学创新教材

丛书主编 陈 化

数学思想方法通论

熊惠民 编著



科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

21 世纪大学数学创新教材

丛书主编 陈 化

数学思想方法通论

熊惠民 编著

科 学 出 版 社

北 京

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

内 容 简 介

数学教育的根本目的在于提升数学素养. 本书紧紧抓住数学学科的特点, 通过提炼和挖掘, 对隐藏在数学知识之中最基本、最具广泛性和包摄性的数学思想方法进行了多角度、深层次的介绍, 力求能体现数学的精神与态度、观点与文化. 所选取的主要内容包括化归、抽象、公理化、合情推理、算法等. 全书在编写思想上, 一方面注重教学内容的系统性, 以适应教师课堂讲授, 另一方面也尽可能提供详尽、丰富的材料, 以备学生自学或课堂讨论.

本书主要用作高等师范院校“数学方法论”或“数学思想方法”课程的教材, 也可供一般数学工作者特别是广大的中学数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学思想方法通论/ 熊惠民编著. —北京: 科学出版社, 2010. 6
普通高等教育“十一五”规划教材. 21 世纪大学数学创新教材
ISBN 978-7-03-027832-6

I. ①数… II. ①熊… III. ①数学—思想方法—高等学校—教材
IV. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 103556 号

责任编辑: 曾 莉 责任校对: 董艳辉
责任印制: 彭 越 封面设计: 苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 6 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2010 年 6 月第一次印刷 印张: 18 1/2
印数: 1-3 000 字数: 354 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《21 世纪大学数学创新教材》 丛书编委会

主 编 陈 化

常务副主编 樊启斌

副 主 编 吴传生 何 穗 刘安平

编 委 (按姓氏笔画为序)

王卫华 王展青 刘安平 严国政

李 星 杨瑞琰 肖海军 吴传生

何 穗 汪晓银 陈 化 罗文强

赵东方 黄樟灿 梅全雄 彭 放

彭斯俊 曾祥金 谢民育 樊启斌

《21 世纪大学数学创新教材》 丛书序

《21 世纪大学数学创新教材》为大学本科数学系列教材,大致划分为公共数学类、专业数学类两大块,创新是其主要特色和要求.经组编委员会审定,列选科学出版社普通高等教育“十一五”规划教材.

一、组编机构

《21 世纪大学数学创新教材》丛书由多所 985 和 211 大学联合组编:

丛书主编 陈 化

常务副主编 樊启斌

副 主 编 吴传生 何 穗 刘安平

丛书编委(按姓氏笔画为序)

王卫华	王展青	刘安平	严国政	李 星
杨瑞琰	肖海军	吴传生	何 穗	汪晓银
陈 化	罗文强	赵东方	黄樟灿	梅全雄
彭 放	彭斯俊	曾祥金	谢民育	樊启斌

二、教材特色

创新是本套教材的主要特色和要求,创造双重品牌:

先进.把握教改、课改动态和学科发展前沿,学科、课程的先进理念、知识和方法原则上都要写进教材或体现在教材结构及内容中.

知识与方法创新.重点教材、高层次教材,应体现知识、方法、结构、内容等方面的创新,有所建树,有所创造,有所贡献.

教学实践创新.教材适用,教师好教,学生好学,是教材的基本标准.应紧跟和引领教学实践,在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处.

继承与创新.创新须与继承相结合,是继承基础上的创新;创新需转变为参编者、授课者的思想和行为,避免文化冲突.

三、指导思想

遵循国家教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于课程教学的基本

要求,力求教材体系完整,结构严谨,层次分明,深入浅出,循序渐进,阐述精炼,富有启发性,让学生打下坚实的理论基础.除上述一般性要求外,还应具备下列特点:

- (1) 恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果,使学生有较新的学术视野.
- (2) 体现现代数学创新思维,着力培养学生运用现代数学软件的能力,使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到具体教学内容中的现代精品教材.
- (3) 在内容取舍、材料组织、叙述方式等方面具有较高水准和自身特色.
- (4) 数学专业教材要求同步给出重要概念的英文词汇,章末列出中文小结,布置若干道(少量)英文习题,并要求学生用英文解答.章末列出习题和思考题,并列出的可进一步深入阅读的文献.书末给出中英文对照名词索引.
- (5) 公共数学教材具有概括性和简易性,注重强化学生的实验训练和实际动手能力,加强内容的实用性,注重案例分析,提高学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力.

四、主编职责

从书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范,在这一框架下,每本教材的主编对本书具有明确的责权利:

1. 拟定指导思想

按照丛书的指导思想和特色要求,拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确创新点

教改、课改动态,学科发展前沿,先进理念、知识和方法,如何引入教材;知识和内容创新闪光点及其编写方法;教学实践创新的具体操作;创新与继承的关系把握及其主客体融合.

3. 把握教材质量

质量是图书的生命,保持和发扬科学出版社“三高”、“三严”的传统特色,创出品牌;适用性是教材的生命力所在,应明确读者对象,篇幅要结合大部分学校对课程学时数的要求.

4. 掌握教材编写环节

(1) 把握教材编写人员水平,原则上要求博士、副教授以上,有多年课程教学经历,熟悉课程和学科领域的发展状况,有教材编写经验,有扎实的文字功底.

(2) 充分注意著作权问题,不侵犯他人著作权.

(3) 讨论、拟定教材提纲,并负责编写组的编写分工、协调与组织.

(4) 拟就内容简介、前言、目录、样章,统稿、定稿,确定交稿时间.

(5) 负责出版事宜,敦促编写组成员使用本教材,并优先选用本系列教材.

《21 世纪大学数学创新教材》组编委员会

2009 年 6 月

前 言

当前数学教育正在从注重知识、注重结论、注重模仿训练的传统观念向注重方法、注重过程、注重个体体验的方向转变. 自 20 世纪 80 年代初徐利治教授在多所大学数学系主讲“数学方法论”课程以来, 特别是 1992 年中学数学教学大纲明确提出将数学思想方法列为数学基础知识来要求后, 数学思想方法已成为高等师范院校数学教育研究的一个重要组成部分. 本书正是在这样的背景下编写完成的.

一名师范院校数学专业的学生或者一名中学数学教师, 与数学打交道的时间一般都不下十年. 在与数学的亲密接触中, 每个人的动机不尽相同, 对数学的感受相差则更大. 也许有的人还未来得及仔细审视数学、品尝数学的滋味, 甚至都不清楚自己对数学到底有什么样的感情. 开设“数学思想方法”课程的目的就是试图和他们一起对熟悉的数学作一番回味, 加深对数学学科的认知与认同, 领会数学的实质与精神, 学会用“居高临下”的观点来理解数学知识、处理数学问题. 本书的写作基础之一, 就是作者确信数学思想方法的学习能够还数学以本来面目, 使大家感到: 数学绝非形式化的逻辑链条, 只有“冰冷的美丽”, 而是包含有大量“火热的思考”, 能产生心灵的震撼. 数学的本原朴实无华、平易近人, 数学的思想发展充满了人情味. 因此, 学习数学也就不应该是枯燥的, 而是令人赏心悦目的, 它不仅能够使人聪明, 而且还能够陶冶人的性情, 使人变得更高尚.

对于数学思想方法的含义, 历来有多种不同的看法, 甚至有人认为它指的就是数学思维方法^[1]. 我们使用数学思想方法, 更多强调它作为超越具体知识的思维模式或思维原则的普适性及其对数学学习和研究广泛的指导意义, 为此我们选择了若干能够体现数学本质特征、最具包摄性和概括性的一些论题组织成一定的理论体系, 用以诠释数学活动的一般规律和方法. 由于这些内容并不局限应用于某个特殊的数学分支, 而是适用整个数学学科, 是对数学思想方法比较基本和宽泛的研究, 故书名定为“数学思想方法通论”.

本书首章概述了数学思想方法的本质意义及其理论、实践背景, 特别是面向当前数学教育现实探讨了数学思想方法对教学的作用, 并提出相关的教学设计指导建议. 在此基础上, 依次对五种具体的数学思想方法设章系统叙述, 涉及化归、抽象、公理化、合情推理、算法等内容. 在阐述这些思想方法时, 我们着重突出它们的基本思想内涵与主要特点、形成背景与发展沿革以及其对数学认知理解和问题解决的意义. 另外, 作为数学思想方法的自然延伸和发展, 数学观念近年来在我国数学教育界中引起了越来越广泛的研究兴趣, 最后一章对这一新思想、新动态进行展

望. 这种安排其实也暗合了作者在写作过程中始终坚持的一个基本观点: 一个真正的数学学习者不仅需要体悟具体数学知识内容的思想实质, 而且还要将数学思想方法上升为数学观念, 形成对数学学科整体的认识, 从而真正实现理解数学的精神追求与人文价值.

应该说明的是, 由于初等数学的问题规律较为明确, 便于深入解剖并易于被读者理解, 同时也是为了服务数学基础教育的需要, 书中所列举的大量实例大多限于中学数学的教学范围, 并注意选取数学教育中相关的典型问题展开讨论.

作者多年来在华中师范大学数学专业本科生以及数学课程与教学论研究生、研究生课程班中讲授数学思想方法课程, 本书的主要题材就是根据教学使用的提纲和讲义充实形成的. 作者由衷地希望书籍的出版能对各层次的数学学习者或工作者有所启迪和助益. 同时, 也更奢望它对实际的数学活动特别是数学教学活动产生应有的积极影响和促进作用, 能有助于广大中学数学教师建立正确的数学思想观念和数学教育观念, 提高驾驭教学内容的能力. 我们愿与同行一道努力探索数学思想方法教与学的有关问题.

在成书过程中, 参阅了不少专家、学者的著述, 在此一并致以诚挚的谢意! 还要对硕士研究生向文娟表示感谢, 她分担了部分整理原稿的工作. 我特别要衷心感谢科学出版社将拙作纳入出版计划以及本书编辑所提供的耐心细致的帮助. 最后, 家人的默默关怀一直鼓励着我, 没有他们的支持这一著作也是不可能问世的.

由于论题涉及面广, 在构思和写作过程中笔者深切感受到自身的不足与局限. 书稿虽屡次修改仍有不尽如人意之处, 其中片面乃至不当的观点, 敬请各位读者批评指教.

作 者

2010年2月

目 录

前言	iii
第 1 章 引语：认识数学思想方法	001
1.1 数学方法论概述	001
1.2 数学思想方法	004
1.2.1 数学思想与数学方法	004
1.2.2 数学思想方法与数学教育	006
第 2 章 化归：数学家的求解模式	013
2.1 化归的基本思想	013
2.1.1 化归的思想实质	013
2.1.2 化归的普遍意义	015
2.1.3 化归与联想	017
2.2 化归策略(一)	020
2.2.1 映射法	020
2.2.2 构造法	029
2.2.3 一般化与特殊化	045
2.2.4 等价化与强化	059
2.3 化归策略(二)	064
2.3.1 重组法	064
2.3.2 分治法	074
2.3.3 逆变法	081
2.3.4 递进(退)法	088
第 3 章 抽象：数学物的创造法则	102
3.1 数学的抽象性	102
3.1.1 抽象性——数学的本质特点	102
3.1.2 数学抽象的特殊性	104
3.1.3 数学抽象的客观基础	108
3.2 数学抽象的方法	119

3.2.1 对数学抽象方法的辩证认识	119
3.2.2 数学抽象的基本形式	121
3.2.3 数学抽象的基本原则	127
3.3 数学抽象定义赏析	131
3.3.1 函数与运算	132
3.3.2 数的抽象构造	135
3.3.3 动力系统	139
3.3.4 图灵机	141
第4章 公理化：数学理论的“建筑师”	146
4.1 数学公理化的思想	146
4.1.1 数学公理化方法的历史演进过程	146
4.1.2 数学公理化方法的作用和影响	152
4.2 数学公理化方法的基本问题	157
4.2.1 实质公理化方法与形式公理化方法	157
4.2.2 数学公理化方法的逻辑特征	159
4.3 几个重要的公理体系	165
4.3.1 欧几里得几何公理体系	165
4.3.2 希尔伯特几何公理体系	167
4.3.3 实数公理体系	170
4.3.4 ZF 集合论公理系统	171
4.4 形式系统简说	173
4.4.1 形式语言	174
4.4.2 形式语言的语义	175
4.4.3 形式语言的推理系统	176
4.4.4 证明与定理	177
4.4.5 推演	177
第5章 合情推理：数学猜想的逻辑引擎	179
5.1 合情推理的界定	179
5.1.1 合情推理的内涵	179
5.1.2 合情推理与演绎推理的关系	185
5.2 归纳推理与类比推理例说	188
5.2.1 归纳推理	189
5.2.2 类比推理	199

5.2.3 归纳推理与类比推理的关系	212
5.3 合情推理模式	217
5.3.1 合情推理基本模式	217
5.3.2 合情推理模式的修正与扩充	219
5.3.3 两个例子	221
第6章 算法：数学发展的机械化之路	225
6.1 算法的基本思想	225
6.1.1 算法的概念	225
6.1.2 数学发展史上的算法思想	229
6.2 算法设计的一般方法	235
6.2.1 穷举法	236
6.2.2 回溯法	237
6.2.3 贪心法	242
6.2.4 递归法	245
6.2.5 递推法	251
6.3 算法理论的发展	254
6.3.1 可计算性理论	254
6.3.2 算法复杂性理论	256
第7章 展望：从数学思想方法走向数学观念	262
7.1 数学观念的内涵	262
7.2 作为教育任务的数学观念	265
参考文献	278

第1章 引语：认识数学思想方法

比起任何特殊的科学理论来,对人类的价值观影响更大的恐怕还是科学的方法.

斯蒂文(S. Stevin)

别把数学想象为硬邦邦的、死搅蛮缠的、令人讨厌的、有悖于常识的东西,它只不过是赋予常识以灵性的东西.

汤姆生(W. Thomson)

据我看来,要真正打好基础,有两个必经的过程,即“由薄到厚”和“由厚到薄”的过程.“由薄到厚”是学习、接受的过程,“由厚到薄”是消化、提炼的过程.

华罗庚

数学作为现代社会的一种主流文化,在众多不同层次上影响着我们的生活方式和工作方式.数学思想方法是数学知识内容的精髓,是数学的一种指导思想和普遍适用的方法,它能使人们知晓数学活动的一般规律,学会数学地思考和解决问题.数学思想方法也是铭记在头脑中起永恒作用的精神与态度、观点与文化,它能使人们领悟数学的真谛,懂得数学的价值.数学思想方法的研究能促进数学教育把知识的学习与智力、能力的发展有机地统一起来.^[2]

从学科角度讲,数学思想方法属于数学方法论的研究范畴.本章在概述数学方法论的基础上,重点阐述了数学思想方法的概念、特征及其在数学教育中的重要意义.

1.1 数学方法论概述

数学方法论(mathematical methodology),是关于数学方法的元理论.这里所说的数学方法,泛指在数学活动中所采用的一切方法,它既包含狭义的解决数学问题的方法,也包含更广泛的从事数学研究的方式和法则.

我国数学家徐利治认为,数学方法论研究和讨论的对象包括数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则,并把数学方法论分为宏观与微观两个范畴:如果不考虑数学内在因素,只从社会生产实践以及技术发展的客观要求出发来研究数学发展的规律,这属宏观数学方法论范畴;如果不考虑数学发展的外在推动力,专就数学内部体系结构中的特定问题,从数学活动者的角度来研究数学思想方法以及数学的发现、发明、创造等法则,这属微观数学方法论范畴.^[3]

一般认为,宏观数学方法论属数学史与数学哲学的范畴,数学方法论主要指微观数学方法论,即数学本身所蕴涵的思想方法以及数学创造活动的基本规律.由于微观数学方法论主要涉及研究数学活动者个体应该遵循的方法法则,因而有特定的意义,近年来出版的数学方法论论著多属此类.

数学方法论是数学发展的产物,因为数学的产生和发展总包含着数学方法的产生、积累和发展,而对数学方法的系统专门研究就形成了数学方法论.法国数学家庞加莱(J. H. Poincaré, 1854~1912)和阿达玛(J. S. Hadamard, 1865~1963)是数学方法论研究方面两位重要的先行者.

庞加莱围绕数学发明创造这一主题对数学美与数学直觉进行了研究,他的主要代表著作包括:《科学与假设》(1902)、《科学的价值》(1905)、《科学与方法》(1908)^①.庞加莱认为,数学美是一种可与艺术美相提并论的“比较深奥的美”(理性美),“这种美在于各部分的和谐秩序,并且纯粹的理智能够把握它”,数学审美感主要在无意识或下意识状态下进行工作,它对数学创造起着“微妙的筛选作用”;数学直觉是对抽象数学对象内在的和谐与关系的直接洞察,“直觉作为平衡物可作为逻辑的纠正物”,“两者缺一不可.唯有逻辑能给我们以可靠性,它是证明的工具;而直觉则是发明的工具”.庞加莱还依据自己的亲身经历,从心理学的角度对数学发明创造的过程进行了分析.他指出,引起数学直觉的最佳心智状态是顿悟,顿悟以“简洁、突然和直接可靠”为主要特征,它的显现是长期无意识工作的结果,无意识的思维活动与无意识的工作之间存在着互相依赖、互相促进的合作关系.

阿达玛的《数学领域中的发明心理学》(1945)继承和发展了庞加莱的思想.与庞加莱相比,阿达玛在“创造发明心理学”上的工作具有更为明显的方法论色彩,他的主要观点包括:有意识的思维活动“使得无意识机器得以开动起来”,同时它也“或多或少地确定了无意识的方向”.而紧随顿悟之后的有意识的工作则具有三种作用,即证明结果、将结果精确化以及将结果加以中转;思维既可以借助于语言进行,也可以借助于“心理图像”进行,“问题越是复杂和困难,我们就越是不能轻信语言,我们就越是要警惕词不达意的危险”;“几乎不存在什么纯粹逻辑的发现”.逻辑型与直觉型数学家之间的区分主要表现在三个方面:无意识活动的深浅,主导思想的宽窄,思维表示符号的不同;数学直觉的本质就是某种“美的意识”或“美感”.“重要的数学研究很少是直接起因于实际应用的需要的”,在实际的研究中数学家往往根据科学的审美感来选择自己的研究方向,并常常依据美感来对理论的意义作出判断.

西方数学方法论的现代研究是由美籍匈牙利数学家波利亚(G. Polya, 1887~1985)的数学启发法奠定的.波利亚在数学方法论领域的主要著作包括:《怎样解

① 三者英译本后结集《科学的基础》,中译本改名《科学的价值》.

题》(1944)、《数学与合情推理》(1954)(中译本书名为《数学与猜想》)、《数学的发现》(1962年第一卷,1965年第二卷,1981年合成一卷再版).数学启发法把解题归结为四个阶段,即弄清问题、制订计划、执行计划以及回顾,并针对每一阶段给出建议和启示,以帮助解题者独立地发现和解决问题.它还以解题为中心,给出了几个较为特殊的解题模式:双轨迹模式、笛卡儿模式、递归模式和叠加模式.波利亚的数学启发法还专门讨论了一种与演绎推理相对立的思维形式——合情推理,并提出了合情推理模式.

在波利亚的影响下,问题解决成为西方数学教育改革的重要手段,同时西方数学方法论的系统研究得以展开.

英国开放大学数学教学中心主任梅森(J. Mason)在《数学地思维》(1982)中发展了数学启发法.梅森认为,解题可以分为进入、着手、回顾三个阶段,三阶段都要依赖于特殊化与一般化这两个基本过程;数学思维本质上可以归结为“特殊化、一般化、猜测和确认”;必要的数学知识、必要的方法论知识以及必要的心理素质或情感因素是改进数学思维的三个环节.

英国数学哲学家拉卡托斯(I. Lakatos, 1922~1974)开创了数学启发法的另一个发展方向.拉卡托斯的研究深受英国科学哲学家波普尔(K. R. Popper, 1902~1994)“证伪主义科学观”的影响.波普尔认为:科学理论的严格证实是不可能的,重要的问题在于证伪而不是证实;“理性的方法就是批判的方法”,批判精神是科学发展的根本动力.根据这一思想,拉卡托斯在代表作《证明与反驳》(1976)中提出了数学发现的逻辑,其主要观点包括:素朴的猜想不是归纳的结果,而是由猜测与反驳得出的.素朴的猜想构成了证明分析法的出发点,数学发现逻辑的基本意义就在于对改进已有猜想的启发作用;“证明”与反例的交互作用是展开证明分析方法的主要环节.证明分析法借助反例对已给出的“证明”进行分析,并使隐蔽的前提明朗化,从而达到改进原始猜想的目的;原始猜想既可以通过“批判”(用反例)加以改进,也可以通过演绎引出一系列的猜想.

中国数学方法论的系统研究始于徐利治教授.徐利治也是提出该学科名称的第一人(1980),他的研究概括了数学中发现、发明的方法,提出了关系映射发演原则,创建了“数学抽象度”分析法,为我国数学方法论的研究开辟了广阔的前景.他在该领域中的主要著作包括:《数学方法选讲》(1983)、《关系映射发演方法》(1989)、《数学抽象度概念与抽象度分析法》(1991)等.

总的说来,目前数学方法论还不是一门成熟的学科.在权威的美国《数学评论》文献杂志分类目录中,“数学方法论”只是与“教学法”(didactics)合在一起作为“数学一般”(general)的一个子目(编号 OOA35).中国也许是最重视数学方法论的国家.由于“中学数学解题”的社会需求,数学方法论作为一门新兴的学科,在我国数学界特别是数学教育界获得了广泛的重视和迅速的发展.我国学者以波利

亚的启发法为实际起点开展了一系列独立的研究,有意义的成果已对实际的数学研究和数学教学产生积极的影响.

1.2 数学思想方法

数学在其自身的发展中形成了许多具有数学特色的典型思想和方法.对各种数学思想方法的内容、特点、作用、发展历史及应用作系统的理论研究是数学方法论的重要内容.

1.2.1 数学思想与数学方法

数学思想方法是数学思想与数学方法的合称.所谓数学思想是指从具体的数学内容中提炼出来的对数学知识的本质认识,它在数学认识活动中被普遍使用,是建立数学理论和解决数学问题的指导思想.所谓数学方法是指研究数学问题过程中所采用的手段、途径、方式、步骤、程序等,它通过一些可操作的规则或模式达到某种预期的目的.

数学思想与数学方法之间的关系表现在如下几个方面:

首先,数学思想和数学方法是层次不同的两个概念.数学思想提供数学活动的根本想法和一般性观点,数学方法提供数学活动的思路、逻辑手段和操作原则.两者相比,数学思想更为抽象,具有概括性和普遍性;数学方法则更为具体,具有可操作性和过程性.简言之,数学思想强调指导思想,数学方法强调操作过程.

其次,数学思想和数学方法又是紧密联系的.其一,数学思想与数学方法往往是相互作用,共同发展.一方面,随着数学方法的积累,人们可以进一步对它们进行概括和提炼得到数学思想,从而更好地指导数学方法的运用,并使其向更高、更深层次发展;另一方面,基于一定的数学思想,人们又可以通过长期的实践发现许多运用数学思想的手段、门路或程序,它们由于被重复运用多次并且都达到了预期的目的便成为数学方法,从而推动数学思想走向可操作化与可仿效化.其二,数学思想与数学方法之间并没有绝对的界限.数学思想是数学方法的理论基础和精神实质,数学方法是实施有关数学思想的技术手段.各种数学思想往往或多或少包含着某些方法元素,而各种数学方法也都会体现一定的思想观念.同一个数学成就,当用它去解决个别的数学问题时,称之为方法;当评价它在数学体系中的价值和意义时,称之为思想.

例如,极限是微积分的基本思想方法.极限思想是一种用运动变化的观点,把所考察的对象视为某对象在无限变化过程中变化结果的思想,是“从有限中找到无限,从暂时中找到永久,并且使之确定下来”的一种运动辩证思想.在这种思想指导下,人们给出了用差商的极限去描述切线斜率、变速运动物体的瞬时速度、加速度

等概念的方法,以及用分割求和取极限的方法去描述变速运动物体的路程与速度的关系、曲边梯形的面积与曲边的关系,这些都称为极限方法.

最后,数学思想和数学方法在实际使用时往往不加区别.例如,M. 克莱因(M. Klein, 1908~1992)的巨著《古今数学思想》,其实说的都是“古今数学方法”,只不过从数学史角度看,人们更多注意那些数学大家们的思想贡献、文化价值,较少从“方法”的有用性去考虑,因而才称之为数学思想.因此,一般场合下为了方便起见,常将两重意思合在一起说,统称为数学思想方法.下文将数学思想和数学方法混用,且更多的时候使用数学思想,即更多强调的是它们对数学学习和研究的指导意义.

数学的历史发展始终反映着两条线,即数学知识的积累与数学思想方法的创新.数学思想方法伴随着数学知识体系的建立而确立,数学思想方法寓于数学知识之中,没有游离于数学知识之外的数学思想方法,同样也没有不包含数学思想方法的数学知识.同时,数学思想方法是数学发现、发明的关键和动力.数学的发展绝不仅仅是材料、事实、知识的积累和增加,而必须有新的思想方法的参与,才会有创新,才会有发现和发明.可以说,数学上的发现、发明主要是思想方法上的创新,只有方法才是获得数学创造的“钥匙”.

与数学思想方法相关联的还有一个更低层次的概念——“招术”.所谓“招术”,是指解决特殊问题的专用计策或手段.“招”(也写作“着”)的价值要远低于“法”(这里的“法”指“通法”),正所谓“授之以鱼,不如授之以渔”.“法”的可仿效性带有较为“普适”的意义,而“招”的“普适”要差得多;实施“招”要以能实施统辖它的“法”为前提.^[4]

例如,待定系数法是一种特别有用的“法”.求二次函数的解析式时,用待定系数法根据图像上三个点的坐标求出解析式可视为第一“招”;根据顶点和另一点的坐标求出解析式可视为第二“招”;根据与 x 轴交点和另一点的坐标求出解析式可视为第三“招”.这三“招”各有奇妙之处.哪一“招”更好使用,要看条件和管辖它们的“法”而定.学习“用待定系数法求二次函数的解析式”,最根本、最要紧的“法旨”就在于明确二次函数的解析式中自变量、函数值和图像上点的横、纵坐标的对应关系;以及对于一般的点和特殊的点(如顶点及与 x 轴的交点),解析式可以有什么不同的反映.而这样的“法旨”,恰恰体现了对应思想和数形结合的思想.

当前关于数学思想的体系尚未达成共识.一般说来,可以从横向和纵向两个不同的维度来进行讨论.

横向维度依赖相应的数学内容.它们是建立某一具体数学理论时所用到的思想,决定一个大的数学学科方向,构成一门数学的重要基础.此时,数学思想常用来泛指某些具有重大历史意义的、内容比较丰富的、体系相当完整的、发挥奠基性和总结性作用的数学成果或数学观点,特别是一些能够深刻揭示本质的重要数学概

念,如初等数学中的方程思想、函数思想,高等数学中的极限思想、微积分思想、概率思想、统计思想、群的思想、不变量的思想等.显然,这个维度即是对每门学科的总体认识,因此有时也称为学科观念.

纵向维度与思维模式相联系.它们虽然脱离具体的数学内容而存在,但已通过充分的数学化而深深地打上了数学的烙印,在应用于数学时也有自己的特点,如抽象思想、演绎思想、归纳思想、类比思想、转化思想、构造思想、公理化思想、模型思想等.

关于数学方法概念的使用,有一点需要说明.由于数学对于各门科学的研究具有普遍意义和举足轻重的地位和作用,因而一般科学方法论也有所谓数学方法的研究.不过在那里,数学方法指的是运用数学所提供的概念、理论与方法,对研究对象进行量(或形)的分析、描述、推导与计算,以揭示认识对象的本质及其发展规律的方法.显然,它的含义较之前面的说法要更为广泛.按照这种理解,只要是应用了某种数学成果来解决问题都可以称为“数学方法”,这其中数学成果不独指具体的(狭义的)数学方法,还包括数学中的概念、定理、公式等.^[5]

1.2.2 数学思想方法与数学教育

1. 数学思想方法的教学规定

我国中学数学教育对于数学思想方法重要性的认识有一个从低到高的过程.

《全日制十年制学校中学数学教学大纲(试行草案)》(1978年2月)在“教学内容的确定”中首次指出“把集合、对应等思想适当渗透到教材中去.这样,有利于加深理解有关教材,同时也为进一步学习作准备”.《全日制中学数学教学大纲》(1986年12月)又把上述文字改成“适当渗透集合、对应等数学思想”.

《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲(试用)》(1992年6月)第一次在总论中明确提出,数学的“内容、思想、方法和语言已广泛渗入自然科学和社会科学,成为现代文化的重要组成部分”,并在“教学目的”中规定“初中数学的基础知识主要是初中代数、几何中的概念、法则、性质、公式、公理、定理以及由其内容所反映出来的数学思想和方法”.还指出,“要注意充分发挥练习的作用,加强对解题的正确指导,应注意引导学生从解题的思想方法上作必要的概括”.《全日制普通高级中学数学教学大纲(供试验用)》(1996年5月)则继续维持了初中大纲的相关认识与要求,并在界定“思维能力”一词的四个主要层面时,进一步指出第三层面是“会合乎逻辑地、准确地阐述自己的思想和观点”,第四层面是“能运用数学概念、思想和方法,辨明数学关系,形成良好的思维品质”.

进入新世纪,随着“课程标准”取代“教学大纲”,数学思想方法的教学得到了更加广泛的重视,数学思想方法的教学地位得到进一步的明确,教学数学思想方法已