全国勘察设计注册工程师公共基础考试用书

数理化基础（第一册）

住房和城乡建设部执业资格注册中心　组编

本书适用于以下专业考试的备考人员

★ 注册一级、二级结构工程师
★ 注册土木工程师（岩土、港口与航道工程、水利水电工程）
★ 注册公用设备工程师（暖通空调、动力、给水排水）
★ 注册电气工程师（发输变电、供配电）
★ 注册化工工程师
★ 注册环保工程师
★ 注册道桥工程师（新增，待考）
★ 注册机械工程师（新增，待考）
★ 注册石油天然气工程师（新增，待考）
★ 注册采矿矿物工程师（新增，待考）
★ 注册冶金工程师（新增，待考）

内含考试新大纲

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书是由住房和城乡建设部执业资格注册中心组编，由勘察设计注册工程师考试委员会主编，根据最新修订的2009版的《勘察设计注册工程师公共基础考试大纲》同步编写的一套辅导丛书中的一本——《数理化基础》。本书分数学、物理、化学三章，完全按照考试大纲要求的知识点、深度和广度对这三门基础课进行了系统且简明扼要的阐述，并穿插了历年有代表性的考题配合讲解，以便考生能在最短的时间内熟悉并掌握考试要点和解题诀窍，从而在繁忙的工作之余有效地抓住要点进行备考复习，顺利通过考试。

本书适合于所有全国勘察设计注册工程师各专业考试的备考人员。

图书在版编目（CIP）数据

全国勘察设计注册工程师公共基础考试用书．数理化基础/住房和城乡建设部执业资格注册中心组编．—2版．—北京：机械工业出版社，2010.3

ISBN 978-7-111-29973-8

Ⅰ.①全… Ⅱ.①住… Ⅲ.①建筑工程-地质勘探-资格考核-自学参考资料②数学-工程技术人员-资格考核-自学参考资料③物理学-工程技术人员-资格考核-自学参考资料④化学-工程技术人员-资格考核-自学参考资料 Ⅳ.①TU19②0

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第035691号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：薛俊高 责任编辑：薛俊高 版式设计：霍永明
责任校对：程俊巧 封面设计：张 静 责任印制：乔 宇
北京京丰印刷厂印刷
2010年3月第2版·第1次印刷
184mm×260mm·14.75印张·1插页·362千字
标准书号：ISBN 978-7-111-29973-8
定价：46.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销 售 一 部：（010）68326294
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

网络服务
门户网：http：//www.cmpbook.com
教材网：http：//www.cmpedu.com

编委会组成人员

前　　言

本丛书是在全国勘察设计注册工程师管理委员会的指导下，由住房和城乡建设部执业资格注册中心组织编写的，其目的在于进一步帮助勘察设计行业广大专业技术人员更准确、更清晰地了解勘察设计注册工程师执业资格考试对他们的科学与技术基础知识的具体要求。

新考试大纲将勘察设计注册工程师公共基础知识要求定位在“工程科学基础”、“现代工程技术基础”和“现代工程管理基础”三个方面，其中包含理论性、方法性、技术性和知识性四个层次的基本要求。

上述的三个方面和它们所包含的四个层次知识要求是从勘察设计注册工程师执业资格考试的角度提出的，是对工程师执业所必须具备的基本素养的检验。它有别于高校基础课程教学的要求，但又和他们所受教育的背景有关；它不是对应考者学历资格的重复检验，但又必须和我国工程高等教育的状况保持必要的衔接。

从工程师公共基础知识检验的角度，编者在丛书中力图体现新考试大纲的下述基本精神：

1. 对理论性问题，重基本概念

描述物质世界基本规律的定理、定律，以及和从事工程设计工作的工程师们密切相关的社会和经济运行的基本规律是人们终身收益的知识精髓，是保证工程师能够跟上科学技术的发展，作到“与时俱进”的重要条件，工程师们必须对此具有清晰的概念和深刻的认识，要求“招之即来，来之能用”。对于更进一步的要求，如奇异现象解释、疑难问题处理、综合问题求解等则不做要求。

2. 对方法性问题，重要领

方法指的是处理问题基本的科学方法，包括数学的、物理的、力学的、化学的，以及社会和经济等各个基础学科的基本描述与分析方法，如问题的描述与建模、模型求解、统计方法、数值计算，映射变换，物理实验，化学分析等等。这些普遍的科学方法也都是人们终身受益的科学精髓，工程师们对这些基本方法的核心思想必须深刻领悟，对这些方法的基本要领必须掌握。但不强调解题技巧、难题求解以及复杂问题的综合分析等。

3. 对技术性问题，重要点

技术性问题，如技术名词、术语的含义、技术设备的基本原理、应用系统

的基本组成和主要功能等，要求具有明晰的概念和清楚的认识，而一些具体的细节问题，如技术设备和系统的设计方法与实现手段，以及和运行操作、维护管理有关的问题等，本丛书并不做特别的强调。

鉴于现代电气与信息技术已经成为各个专业领域核心技术中重要的、共有的组成部分，新大纲强调了对该技术领域知识的检验，在本丛书中也给予了特别的重视。

4. 对知识性问题，重知识面

知识性问题是指那些对工程师而言是重要的、必要的常识性问题。知识性问题注重检验工程师们的知识面和应对科技进步挑战的潜力，并不要求对多学科、多领域知识的系统掌握和深入理解。知识性问题遍布大纲的各个部分，在信息与计算机、经济与法律法规部分则有更多体现。丛书对知识性内容以简要、通俗的方式予以叙述或介绍。

应当指出，上述所不特别强调的问题或内容只是从对工程师公共基础知识背景检验或认定的角度考虑的，并不是说这些问题或内容对工程师不重要。相反，这些问题和内容是重要的，但它们应当在专业基础以及专业知识和能力的检验中去体现。

根据上述的基本精神和处理原则，读者不难理解本丛书的下述性质和作用：

1. 丛书是对大纲条目内涵和外延的具体界定和详尽说明，它是一套准确反映考试要求的详解手册而不是教科书。对于已有的知识，读者可以从中得到温故知新；对于或缺的知识，读者可以从中得到进一步学习的指导，从而有效地加以补充。

2. 执业资格考试的性质决定了它有别于学校培养人才的合格性认定，它不是对学历背景的重新检验，所以考试大纲不是高校基础课程教学大纲的简单集合，它既包含高校课程的核心内容，也包括对勘察设计工程师基本素质的特定要求。读者必须按照考试大纲的要求，逐条落实自己的应考准备，不可因盲目通读大学课本而事倍功半。本丛书将对此提供有益的帮助。

3. 执业资格考试实质上是一种国家设立的某一专业领域资格的认定标准，内容结构既有公共性，也有专业性，公共部分内容要求原则上不考虑个体差异的消弭或不同学历背景间的平衡。本丛书也不是教科书，并不提供考试大纲条目内容所涉及知识体系的全貌，它只是一份详细的提纲，为应考者提供脉络清晰的备考指导。读者还必须根据自身的情况做出自己的安排，作好切实的准备，该复习的复习、该补充的补充，没有捷径可走。

为便于读者使用，丛书分四册编写：

1. 第1册：《数理化基础》：本册构成本丛书工程科学基础的前3章，即数学基础、物理基础和化学基础3章，是工程科学基础要求的核心部分，包含描

述物质结构和运动规律的基本理论和基本方法的提要和必要的讲解。对于学历基础厚实的读者，只要浏览本册，了解具体要求即可；对于基础欠缺的读者则需要认真补充并深入理解有关的基础概念、理论和方法。

2. 第2册：《力学基础》：本册构成本丛书工程科学基础的后3章，即第4～6章。它根据勘察设计注册工程师对工程力学基础的特殊要求编写，包含理论力学、材料力学和流体力学三个学科的基本理论、方法和应用的提要与讲解。建议所有读者都应精读本册并认真准备，借应考之机全面充实自身的力学知识，提高力学修养，加强运用力学知识分析工程问题的能力。

3. 第3册：《电气与信息技术基础》：现代工程技术基础包括诸多方面，但作为勘察设计行业各个专业共同的基础，则非电气与信息技术莫属。电气与信息包括电工技术、电子技术和计算机技术三个领域，它们的核心任务都是处理信息，所以本丛书以信息为主线，将它们作为一个整体集中于一册中加以说明。本册共分三章编写，即丛书的第7～9章，分别阐述对电工电子、信号与信息，以及计算机三个方面的知识性要求，其中信号与信息是信息处理的核心概念，电工电子是信息处理的核心技术，而计算机则是信息处理的主要工具。读者对本册的内容会感到似曾相识却又相距甚远，觉得自己的知识不甚完整、概念不甚明晰。所以，尽管本册的内容是知识性的，还是应当予以足够重视，通过必要的学习建立现代信息技术更清晰的概念，获取现代信息技术更全面的知识，增强自己运用信息技术的能力。

4. 第4册：《工程经济与法律法规》：本册构成丛书的最后两章，即第10章、第11章。工程经济与法律法规是工程设计的社会要素，它和前面那些科学与技术要素具有同等的重要性，所以，新大纲强化了这方面知识的考核要求也就不言而喻了。尽管在我国的高等工程教育中设立了经济与法规的相关课程，但在学生的学习进程中却往往得不到足够的重视，所以，读者要特别关注本册的内容，通过强化学习来增强自身的社会意识，做一个基础知识全面、综合素质优秀的合格的设计工程师。

本丛书的编写是全国勘察设计注册工程师公共基础考试大纲修订工作的一个重要组成部分，编写的思路是明晰的，谅必会有益于读者。但是，由于编写时间紧促，必定存在诸多不完善之处，还望读者及各方面人士不吝指教。

赵春山

2009年5月

目　录

第 1 章 数学

1.1 向量代数与空间解析几何

1.1.1 向量代数

1. 向量的基本概念

定义：既有大小又有方向的量称为向量。

2. 向量的线性运算

（1）向量的加法　向量的加法服从平行四边形法则。

向量加法满足交换律和结合律。

（2）向量的数乘　向量的数乘满足结合律和分配律。

（3）共线向量和共面向量

定义：方向相同或相反的向量称为共线向量，平行于同一平面的向量称为共面向量。

定理：两向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的常数 λ、μ，使得 $\lambda\alpha+\mu\boldsymbol{\beta}=0$。

定理：三向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的常数 k_1、k_2、k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=0$。

3. 向量的坐标表达式及其运算

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_x,a_y,a_z)=a_xi+a_yj+a_zk,$$

叫做向量的坐标表达式，(a_x,a_y,a_z)叫向量的坐标。

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_x+b_x)i+(a_y+b_y)j+(a_z+b_z)k$$

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda a_xi+\lambda a_yj+\lambda a_zk$$

4. 向量的数量积及向量积

（1）数量积

定义：两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的数量积是一个数，用 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 表示

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos\theta,$$

其中 θ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角。

数量积的性质：

1）交换律 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$。

2）分配律 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}$。

3）$(\lambda\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\cdot(\lambda\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})$，$\lambda$ 为常数。

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

数量积的应用：

1）求向量的模：$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{\alpha\cdot\alpha}$。

2）判定两向量垂直：$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta=0$。

（2）向量积

定义：两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的向量积 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 是一个向量，它的方向与 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 都垂直，且使得 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 符合右手定理，$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 的模为 $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\sin\theta$，其中 θ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角。

向量积的性质：

1）$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=-(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})$

2）$\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}$

3）$(\lambda\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\times(\lambda\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})$，$\lambda$ 为常数

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

向量积的应用：

1）求面积。

2）判定两向量平行：$\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=0$，或存在常数 λ，使得 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$。

3）求同时垂直于两已知向量的向量。

1.1.2 平面与直线

1. 平面方程

（1）平面的点法式方程　设平面过点 (x_0,y_0,z_0)，法线向量为 (A,B,C)，则平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

（2）平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

2. 平面与平面的垂直、平行条件

设两平面为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$。

两平面垂直的充分必要条件

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

两平面平行的充分必要条件

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\text{或存在 }\lambda\text{，使得}(A_1,B_1,C_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2)$$

3. 空间直线的方程

(1) 直线的一般方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

(2) 直线的对称式方程 直线过点(x_0,y_0,z_0)，方向向量为(l,m,n)，则直线方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

(3) 直线的参数方程

$$\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt(t\text{ 为参数})\\z=z_0+nt\end{cases}$$

4. 两直线的垂直、平行条件

设两直线为$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$和$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$，则

两直线互相垂直的充分必要条件：$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$。

两直线互相平行的充分必要条件：$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$或存在 λ，使得$(l_1,m_1,n_1)=\lambda(l_2,m_2,n_2)$。

5. 直线和平面的相互关系

设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，直线方程为$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$。

直线和平面垂直的充分必要条件：$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$或存在 λ，使得$(A,B,C)=\lambda(l,m,n)$。

直线和平面平行的充分必要条件：$Al+Bm+Cn=0$。

1.1.3 曲面及其方程

1. 柱面方程

$F(x,y)=0$，母线平行于 z 轴的柱面。

2. 圆锥面方程

$$x^2+y^2=z^2$$

3. 旋转面方程

由直线 L：$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$，绕 x 轴旋转一周产生的旋转面方程为

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$$

4. 二次曲面

椭球面方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

单叶双曲面方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

椭圆抛物面方程：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$，其中 p、q 同号。

双曲抛物面方程：$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$，其中 p、q 同号。

【例 1.1-1】 设 $\alpha=i+j-k$，$\beta=2i-2k$，则 $\alpha\times\beta=$

(A) $2i+2k$ (B) $-2i-2k$

(C) $-2j-2k$ (D) $2j+2k$

答：(B)。

解：$\alpha\times\beta=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2i-2k$，故选(B)。

【例 1.1-2】 已知 $\alpha=i+tj-k$，$\beta=2i-j+tk$ 互相垂直，则 $t=$

(A) -2 (B) 2

(C) -1 (D) 1

答：(D)。

解：$\alpha\cdot\beta=1\times2+t\times(-1)+(-1)\times t=0$，$2-2t=0$ 解得 $t=1$，故选(D)。

【例 1.1-3】 已知 $\alpha=i+j+tk$，$\beta=ti-2j+4k$，$\gamma=-2i+j-4k$，若 α、β、γ 共面，则 $t=$

(A) 1 或 2 (B) -1 或 2

(C) 2 或 -2 (D) 1 或 -2

答：(C)。

解：$\begin{vmatrix} 1 & t & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ t & 4 & -4 \end{vmatrix}=t^2-4=0$，解得 $t=2$ 或 $t=-2$，故选(C)。

【例 1.1-4】 设直线 L 过点$(1,-1,0)$，方向向量为 $2i+j-k$，则以下选项中不是直线 L 的方程的是

(A) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ (B) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$

(C) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ (D) $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases}$

答：(A)

解：由题设，已知直线过点$(1,-1,0)$，其方向向量为 $2i+j-k$ 或 $-2i-j+k$，故(B)、(C)和(D)都是 L 的方程，而选项(A)的直线过点$(-1,1,0)$，不在直线 L 上，故选(A)。

【例 1.1-5】 当 t 取什么值时，直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{t}$与直线$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{1}$相交。

(A) $t=-1$ (B) $t=0$

(C) $t=2$ (D) $t=1$

答：(D)

解：两方程的方向向量分别为 l_1:$(1,2,t)$和 l_2:$(2,-2,1)$，易见此两直线不平行，它们要相交必共面。又两直线分别过点 A_1:$(-1,1,0)$和点 A_2:$(0,3,1)$，由三向量 A_1A_2、l_1、l_2 共面，有 $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=6-6t=0$，解得 $t=1$，故选(D)。

【例 1.1-6】 过点$(1,0,-1)$、$(0,1,0)$和$(1,0,1)$的平面方程是

(A) $x+y-1=0$ (B) $x+y+1=0$

(C) $x+z-1=0$ (D) $y+z-1=0$

答：(A)

解：所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-0 & 0-1 & -1-0 \\ 1-1 & 0-0 & -1-1 \end{vmatrix}=2i+2j$，过已知三点的平面的法向量为 $i+j$，又过$(0,1,0)$点，则方程为 $1\cdot(x-0)+1\cdot(y-1)+0\cdot(z-0)=0$，即 $x+y-1=0$，故选(A)。

【例 1.1-7】 设平面 π 的方程是 $x-z=1$，则以下选项错误的是

(A) 平面 π 过点$(1,0,0)$，其法向量为 $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$

(B) 平面 π 过点$(1,0,1)$，其法向量为 $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$

(C) 平面 π 过点$(0,1,-1)$，其法向量为 $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$

(D) 平面 π 过点$(1,1,0)$，其法向量为 $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$

答：(B)

解：由方程可知，该平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，或 $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$，四个选项都符合要求，再用点的坐标代入，显然选项(B)的坐标不符合方程，所以选(B)。

【例 1.1-8】 过点$(-1,0,1)$与平面 $3x+y+1=0$ 垂直的直线方程为

(A) $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$

(C) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ (D) $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$

答：(D)

解：由题设，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=3i+j$，或 $-3i-j$，选项(A)，(C)，(D)都符合要求，其中选项(A)过点$(1,0,1)$，(C)过点$(1,0,1)$，都不在所求直线上，(D)过点$(-1,0,1)$，故选(D)。

【例 1.1-9】 过直线$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}$和直线$\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=-3t-1 \\ z=-2t+1 \end{cases}$的平面方程为

(A) $x-z-2=0$ (B) $x+z=0$

(C) $x-2y+z=0$ (D) $x+y+z=1$

答：（A）

解：由题设知此两直线平行，它们的方向向量均为 $\boldsymbol{l}=(2,3,2)$，又知它们分别过点 $A:(-1,2,-3)$ 和 $B:(3,-1,1)$，因此，所求平面的法向量同时和 $\boldsymbol{l}$ 及 $\boldsymbol{AB}$ 垂直，于是 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-18i+18k$，或 $i-k$，四个选项中只有（A）符合要求，故选（A）。事实上，法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，过点 $(-1,2,-3)$ 的平面方程为

$$1\cdot(x+1)+0\cdot(y-2)+(-1)\cdot(z+3)=0，即 x-z-2=0$$

【例 1.1-10】 已知平面 π：$x-y+3z+1=0$ 与直线 L：$1-x=y-1=\dfrac{z+3}{-3}$，则直线 L 与平面 π

（A）相交但不垂直　　（B）平行

（C）垂直　　（D）重合

答：（C）

解：由题设平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,3)$，直线的方向向量为 $\boldsymbol{l}=(1,-1,3)$，可知直线和平面垂直，故选（C）。

【例 1.1-11】 下列方程中表示母线平行于 y 轴的圆柱面方程是

（A）$x^2+y^2+z^2=1$　　（B）$x^2+y^2=1$

（C）$x^2+z^2=1$　　（D）$y^2+z^2=1$

答：（C）

解：母线平行于 y 轴的柱面方程的特征为方程中缺变量 y，故选（C）。选项（A）是球面，选项（B）是母线平行 z 轴的圆柱面，选项（D）是母线平行 x 轴的圆柱面。

【例 1.1-12】 将 xoy 坐标面上的抛物线 $x^2=y$ 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转面方程是

（A）$x^2+z^2=y$　　（B）$y^2+z^2=x^4$

（C）$x^2+z^2=y^2$　　（D）$x^2+z^2=y^4$

答：（A）

解：抛物线 $x^2=y$ 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转面方程是 $\begin{cases} x^2+z^2=x_0^2 \\ y=y_0 \end{cases}$，其中 $x_0^2=y_0$，故 $x^2+z^2=y$，故选（A）。

【例 1.1-13】 方程 $2x^2-y^2-2z^2=1$ 在三维空间表示

（A）单叶双曲面　　（B）双叶双曲面

（C）椭球面　　（D）椭圆柱面

答：（B）

解：双叶双曲面的标准方程具有形为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，故选（B）。

【例 1.1-14】 方程 $x^2+y^2+z^2-4y-1=0$ 在三维空间表示

（A）平面　　（B）旋转面

（C）球面　　（D）不表示任何图形

答：（C）

解：方程化为 $x^2+(y-2)^2+z^2=5$，表示球面，故选（C）。

1.2 微分学

1.2.1 函数极限与连续

1. 函数

(1) 函数概念

定义：如果两个变量 x 和 y 之间有一个依赖关系，使变量 x 在其可取值的数集 X 内每取一个值时，变量 y 就依照这个依赖关系确定一个对应值，则说 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in X$，其中 x 叫做自变量，y 叫因变量。

(2) 函数的几种特性

1) 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在 $M>0$，使得恒有 $|f(x)|\leqslant M$，$\forall x\in I$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称 $f(x)$ 在 I 上无界。

2) 函数的单调性

设 $x_1<x_2$ 是区间 I 任意两点，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则说 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（单调减少）。

3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称，若恒有 $f(-x)=-f(x)$，$\forall x\in X$，则称 $f(x)$ 是奇函数，若恒有 $f(-x)=f(x)$，$\forall x\in X$，则称 $f(x)$ 是偶函数。

4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 $X(X=(-\infty,+\infty))$，若有常数 $T\neq0$，使得 $x\in X$ 时，必有 $x\pm T\in X$，且恒有 $f(x+T)=f(x)$，$\forall x\in X$，则说 $f(x)$ 是周期函数，使上式成立的最小正数 T 称为该函数的周期。

(3) 初等函数

下列6类函数称为基本初等函数。

1) 常函数 $y=C$。

2) 幂函数 $y=x^\mu$，μ 为实常数。

3) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$。

4) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$。

5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$。

6) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\,x$。

由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合所得到的，并能用一个式子表示的函数称为初等函数。

2. 极限

(1) 极限概念与性质

定义：如果随着 x 的无限增大，函数 $f(x)$ 就无限地接近某一常数 A，则称 x 趋于正无穷大时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

定义：如果 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则说当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$。

定义：如果随着 x 的无限趋向于 x_0，函数 $f(x)$ 就无限地接近某一常数 A，则称 x 趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$。

定理（唯一性）：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则极限值唯一。

定理（极限点附近的保序性）：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

1）如果 $A<B$，则在 x_0 的某邻域内（点 x_0 可除外）恒有 $f(x)<g(x)$。

2）如果在 x_0 的某邻域内（点 x_0 可除外）恒有 $f(x)\leqslant g(x)$，则有 $A\leqslant B$。

定理（极限点附近的有界性）：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则在 x_0 的某邻域内（点 x_0 可除外）$f(x)$ 是有界的。

推论：数列若有极限必有界。

（2）极限的运算

定理：如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

1）$\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$。

2）$\lim(f(x)g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$。

$\lim(Cf(x))=C\lim f(x)=CA$（$C$ 为常数）。

3）当 $B\neq0$ 时，$\lim\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$。

定理：设复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 的某邻域内（点 x_0 可除外）有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$。

推论：若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B>0$，则 $\lim g(x)^{f(x)}=B^A$。

（3）极限存在的两个准则

定理（夹逼准则）：如果在极限点附近 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$。

定理（单调有界准则）：单调有界数列必有极限。

（4）两个重要的极限

1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$。

（5）无穷小与无穷大

在一个极限过程中，以零为极限的变量叫做这个极限过程中的无穷小。

无穷小有如下的运算性质：

1）有限个无穷小的和仍是无穷小。

2）极限点附近有界的函数与无穷小的乘积仍为无穷小；常数与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小之积是无穷小。

3）一个有极限但极限值不为零的函数去除无穷小，其商仍为无穷小。

定理(极限与无穷小的关系)：$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是极限过程中的无穷小。

定义：若当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$。

定理(无穷大与无穷小的关系)：无穷大的倒数是无穷小；非零无穷小的倒数是无穷大。

定义：设 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$，

1）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则说 β 是 α 的高阶无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$。

2）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则说 β 是 α 的低阶无穷小。

3）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$（$C$ 是常数），则说 β 与 α 是同阶无穷小。

特别，当 $C=1$ 时，说 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$。

定理：$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta-\alpha=o(\alpha)$。

定理：设 $\alpha \sim \hat{\alpha}$，$\beta \sim \hat{\beta}$ 且 $\lim\dfrac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}=A$（或$\infty$），则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}=A（或\infty）。$$

3. 连续

(1) 连续与间断

定义：设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0}\Delta y=0$，则说 $f(x)$ 在 x_0 处连续，并称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点。

在定义域上连续的函数称为连续函数。

(2) 连续函数的性质

1）连续函数的和差积商(分母不为零时)仍为连续函数。

2）连续函数的复合函数仍为连续函数。

3）初等函数在其定义的区间内是连续的。

设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。

(3) 间断点分为两大类

左右极限都存在的间断点称为第一类间断点，其中 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，但不等于 $f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无意义的间断点叫做可去间断点，而 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 的间断点称为跳跃间断点。

左右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点。

(4) 闭区间上连续函数的性质

定理(有界性定理)：闭区间上连续函数必有界。

定理(最值存在定理)：闭区间上连续函数必有最大值和最小值。

定理(零点存在定理)：设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)f(b)<0$，则有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

定理(介值定理)：闭区间上连续函数一定能取得介于最大值和最小值之间的任何值，