名师导学

高中数学精解

上册

主编·吕学礼

副主编·孔令颐

北京

名师导学

高中数学精解

上　册

主　编　$\boxed{吕学礼}$
副主编　孔令颐

北京工业大学出版社

（京）登 95 第 212 号

内容简介

本书精选了大量的高中数学中各种类型的题目，并加以详尽的讨论、分析和解答，旨在帮助学生发展解题思路，提高分析问题和解决问题的能力. 所选题目中有相当一部分属综合性题目，这些题目往往具有多种解法，更易于培养和发展学生的解题思路和能力.

本书分上、下两册出版. 上册包括代数、三角两篇，下册包括立体几体、解析几何两篇.

本书可供高中学生课外阅读之用，也可供高中数学教师参考.

名师导学

高中数学精解

（上册）

主　　编　$\boxed{\text{吕学礼}}$

副主编　　孔令颐

*

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

北京育才印刷厂印刷

*

1996 年 4 月第 1 版　1996 年 4 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 32 开本　15.75 印张　352 千字

印数：1～15000 册

ISBN7-5639-0451-4/G・234

定价：14.60 元

编著者简介

主编： 吕学礼

副主编： 孔令颐

其他编著者(按笔划排序)：

王人伟　王健民　陈剑刚　周沛耕

吕学礼　1919年生，上海青浦人1942年毕业于上海交通大学数学系.

历任中学数学教员，上海交通大学数学系助教、讲师，人民教育出版社数学室编辑、编审.参加1954年至1980年期间历届中学数学教学大纲的起草工作.参加1954年以来历次中学数学通用课本、教学指导书、教学参考书、习题集的编写、校订工作.

编著有《中学数学教学一得集》、《中学数学实际问题选》、《中学数学实用题解》、《初中数学应用例解》、《平面向量和空间向量》、《代数矩阵与几何变换浅说》等；合著有《分角线相等的三角形(初等几何机器证明问题)》、《初级计算机原理和使用》、《BASIC语言——电子计算机初步知识(高中数学选用教材)》等；合译有《计算机程序设计Logo语言》等.

孔令颐　浙江桐乡人，1956年毕业于四川大学数学系，同年任清华大学基础课数学教师，现任清华大学附中数学教师、教研组长，1985年、1987年先后被评为北京市中学特级教师和高级教师.

编著、主编或参加编写的书籍有《名师启迪丛书》、《名师授课录》、《高级中学试验课本》、《高中数学综合解题方法》、《高中各科选修指导丛书》、

《高中数学教学指导书》、《数学竞赛培训教程》、《高中数学总复习》、《数学复习与题解》、《高考总复习指导丛书》等；撰写的论文有《从一次齐次递推公式求通项的特征根法的一个初等证明》、《能力培养与第二课堂》、《从 1988 年高考数学试题看能力培养》、《关于微积分教学》、《关于中学生能力培养的一点实践》、《求导方法与数学实验》等.

王人伟　1945 年生，1968 年毕业于中国科技大学近代力学系，1979 年至 1981 年于北京航空学院攻读硕士，并获工学硕士学位，1982 年至今在北航附中任数学教师及数学教研组组长，现任北京市特级教师，北京数学会理事，航空普教协会数学会理事长. 他在 1987 年北京市中青年教师教学评优中获优秀课奖. 由北京市教研部推荐，他参加了 1990 年在青岛举行的全国首届中学数学教学观摩研讨会，在会上讲了一堂观摩课，作为突出数学思想的典范，受到与会专家及老师们的一致好评.

作为中国奥林匹克高级教练，北京市数学奥校常务教练，他在优秀学生的培养方面做了大量工作. 近年来，他作为北京数学集训队的主教练、副主教练及北京代表队的领队，带领学生连续两年夺得 CMO（中国数学奥林匹克）团体第一（获陈省身杯），与其他教练员一起，培养出多名学生进入国家队，在 IMO（国际数学奥林匹克）上取得优异成绩.

王建民　1939 年生，天津市人，北京市数学特级教师，北京市数学学科带头人，市教研员，现任教于中国科学技术大学附属中学，是海淀区人民代表大会代表.

长期参与北京市和海淀区的数学教学和教学科研活动，参加编写各类教学参考书籍数十本，在省市级以上刊物发表论文十数篇，曾到一些省市讲学，与张君达、周沛耕、明知白合著专著《初等数学概论》.

陈剑刚　江苏海门人，1958年毕业于复旦大学数学系，同年任北京大学数学力学系助教．1960年任北大附中数学教师，曾任数学教研组长、副校长、校长等职．1986年被评为北京市中学特级教师、市普教系统先进工作者，1987年被评为北京市中学高级教师，1991年被授予北京市中学数学学科带头人．

著作有《名师启迪丛书》、《名师授课录》．

周沛耕　河北唐山人，1962年至1968年就读于北京大学数学力学系力学专业，1968年毕业．现在北大附中任教，是北京市特级教师．

在教学中，他注重开发学生的智力，调动学生的积极性，形成了"激发式"的教学风格．除了从事普通教学工作外，他多年来从事竞赛数学的辅导与研究，他的学生多次在国内、国际数学竞赛中获奖．他直接培养的学生，先后获得国际数学竞赛的三枚金牌和一枚银牌．1995年，他参与培养的又一名学生已获得世界数学竞赛的参赛资格．

他是中国奥林匹克数学高级教练，现任北京市数学奥林匹克学校培训部主任，任中国"双法"(优选法和统筹法)数学研究会教育委员会副主任．

主要著作有《初等数学概论》、《数学竞赛培训教程》、《组合数学基础》等．

前　　言

学生学习数学，必须首先掌握双基——基础知识、基本技能.

在掌握双基的基础上，还需要引伸触发、深入研究，了解所学的知识技能在各方面的综合运用，同时增强和提高分析问题和解决问题的能力.

数学教师对这方面进行指导，也需要有相应的参考资料.

为此，特请经验丰富的数学名师，编写此书，以适应上述需要.

本书为习题集形式，目的在于巩固双基，同时发展解题思路，帮助学生提高分析问题和解决问题的能力.

本书分上、下两册出版.上册包括代数、三角两篇，下册包括立体几何、解析几何两篇，每篇均有习题数十条.虽然分为四篇，但习题大多是带综合性的，只能由其主要属于某类而放入某篇.每一习题，往往具有多种解法，更易于培养和发展学生的解题思路和能力，解析几何篇中每隔几题有一小结，指明这类问题的共同规律和共同解法.

本书可供高中学生课外阅读之用，对于每一道题，可以先自己加以思考，研究解法，然后再看题后的解法.教师应用本书指导学生，也可先让学生加以思考，再告知解法.这样可能收效更大.

对本书的缺点错误，敬请批评指正.

吕学礼

1995 年 6 月

目　　录

第一篇

代　　数

第一章　函　　数

1. 分别指出下列集合是表示什么内容的集合：

$A=\{x|y=\sqrt{x^2-2x-3}\}$；

$B=\{y|y=x^2-2x-3\}$；

$C=\{t|t^2-2t-3=0\}$；

$D=\{a|a^2-2a-3<0\}$；

$E=\{(x,y)|y=x^2-2x-3\}$；

$F=\{(x,y)|2x-2y+1=0\}$；

$G=\{(x,y)|2x-y+k=0,k\in Z\}$.

解：集合 A 表示函数的定义域，即 $x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$；

集合 B 表示二次函数的值域，即 $y\in[-4,+\infty)$；

集合 C 表示一元二次方程的解集，即 $t\in\{-1,3\}$；

集合 D 表示一元二次不等式的解集，即 $a\in(-1,3)$；

集合 E 表示点集，即分布在抛物线上的所有的点的集合，该抛物线顶点为 $(1,-4)$，对称轴为 $x=1$，且张口向上，简单地说，集合 E 表示抛物线；

集合 F 表示斜率为 2、在 y 轴上的截距为 1 的直线；

集合 G 表示斜率为 2 的所有的直线，即斜率为 2 的平行直线系.

说明：用描述法表示集合，元素的属性可以用文字语言描述，也可以用数学符号语言表达.在用数学符号语言表达时，必须明确元素的符号(即花括号内，竖线左侧的字母符号)，竖线的右侧，列出描述元素属性的具体内容，避免混淆.

如方程 $t^2-2t-3=0$ 的根构成解集 C，而不等式 $a^2-2a-3<0$ 的解集 $(-1,3)$ 构成集合 D.

2. 分别判定下列各组内集合之间的包含关系，并用适当的符号连接这些集合：

(1) $A=\{x\mid x=2k+1,k\in Z\}$，$B=\{y\mid y=2m-3,m\in Z\}$；

(2) $M=\{\alpha\mid \alpha=n\pi,n\in Z\}$，$N=\{\beta\mid \beta=\frac{n\pi}{2},n\in Z\}$，$P=\{\gamma\mid \gamma=\frac{n\pi}{4},n\in Z\}$；

(3) $C=\{x\mid y=\lg x+\lg(x-1)\}$，$D=\{x\mid y=\lg x\cdot(x-1)\}$；

(4) $S=\{(x,y)\mid \log_x y=\log_y x,x\neq y\}$，$T=\{(x,y)\mid y=\frac{1}{x},x>0\}$.

解：(1) 分别令 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$；$m=0,\pm1,\pm2\cdots$，得

$$A=\{1,3,-1,5,-3,7,-5,9,-7,\cdots\},$$
$$B=\{-3,-1,-5,1,-7,3,-9,5,-11,\cdots\},$$

$\because$ 列举出来的元素完全一样，A、B 两个集合是同一个集合，$\therefore$ $A=B$.

(2) 在集合 N 中，

当 $n=2k(k\in Z)$ 时，$\beta=k\pi$，

当 $n=2k+1(k\in Z)$ 时，$\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}$，

$$\therefore\quad N=\{\beta\mid \beta=k\pi,k\in Z\}\cup\{\beta\mid \beta=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}.$$

在集合 P 中，

当 $n=4k(k\in Z)$时，$\gamma=k\pi$，

当 $n=4k+1(k\in Z)$时，$\gamma=k\pi+\frac{\pi}{4}$，

当 $n=4k+2(k\in Z)$时，$\gamma=k\pi+\frac{\pi}{2}$，

当 $n=4k+3(k\in Z)$时，$\gamma=k\pi+\frac{3\pi}{4}$，

$\therefore\quad P=\{\gamma|\gamma=k\pi,k\in Z\}\cup\{\gamma|\gamma=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z\}\cup\{\gamma|\gamma=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}\cup\{\gamma|\gamma=k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in Z\}$，

$\therefore\quad P\supset N\supset M$.

(3) 在集合 C 中，定义域为 $x>1$；在集合 D 中，定义域为 $x>1$ 或 $x<0$.

$\therefore C\subset D$.

(4) 集合 S 可化简为：$S=\{(x,y)|y=\frac{1}{x},x>0$ 且 $x\neq 1\}$.

$\therefore\quad S\subset T$.

说明：欲鉴别集合之间的关系，必须抓住集合中元素的实质内容．为此应对元素的属性具体化、简单化或明朗化.

(1) 中采用列举法，令 k 与 m 为 $0,\pm1,\pm2,\cdots$，但又不能全部列举出来，因此只能帮助观察，并不严格．(2) 中的方法是严格的，采用分类讨论的方法，把总情况分解为若干个彼此独立的情况之总和.

3. 解答下列各题：

(1) 已知 $A=\{x|2x^2+x+m=0\}$，$B=\{y|2y^2+ny+2=0\}$，且 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$．求 $A\cup B$；

(2) 已知 $A=\{x \mid x\neq 1, x\in R\}$，$B=\{y \mid y\neq 2, y\in R\}$，求 $A\cup B$；

(3) 已知全集 $I=R$，$f(x)=x^2-x$，$g(x)=x^2-x-2$，$M=\{x \mid f(x)=0\}$，$N=\{x \mid g(x)=0\}$. 求 $M\cup N$，$\overline{M\cup N}$，$\overline{M}\cap\overline{N}$；

(4) 已知全集 $I=\{x \mid |x|<5, x\in Z\}$ 中有两个子集 A，B，其中 $A=\{y \mid y=3k, k\in Z\}$，$B=\{z \mid z=2t, t\in Z\}$. 求 $\overline{A\cap B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$，$A\cap\overline{B}$.

解：(1) $x=\frac{1}{2}$ 是方程 $2x^2+x+m=0$ 的根，由韦达定理得方程的另一个根为 -1；$\frac{1}{2}$ 也属于集合 B，即 $y=\frac{1}{2}$ 也是方程 $2y^2+ny+2=0$ 的根，由韦达定理得方程的另一个根为 $y=2$.

$\therefore\quad A=\{\frac{1}{2},-1\},\qquad B=\{\frac{1}{2},2\},$

$\therefore\quad A\cup B=\{-1,\frac{1}{2},2\}.$

(2) 集合 A 是不等于 1 的一切实数，集合 B 是不等于 2 的一切实数，它们的并集为全体实数，即 $A\cup B=R$.

(3) $\because\quad M=\{x \mid f(x)=0\}=\{0,1\},$

$N=\{x \mid g(x)=0\}=\{-1,2\},$

$\because\quad \overline{M}=\{x \mid f(x)\neq 0\}=\{x \mid x\neq 0$ 且 $x\neq 1, x\in R\}$，

$\overline{N}=\{x \mid g(x)\neq 0\}=\{x \mid x\neq -1$ 且 $x\neq 2, x\in R\}$，

$\therefore\quad M\cup N=\{x \mid f(x)\cdot g(x)=0\}=\{-1,0,1,2\};$

$\overline{M\cup N}=\{x \mid f(x)\cdot g(x)\neq 0\}=\{x \mid x\neq 0$ 且 $x\neq \pm 1$ 且 $x\neq 2, x\in R\}$；

$\overline{M}\cap\overline{N}=\{$不等于 $0,-1,1,2$ 的一切实数$\}$.

(4) $I=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，

$A=\{-3,0,3\}$, $B=\{-4,-2,0,2,4\}$.

$\because$ $A\cap B=\{0\}$,

$\overline{A}=\{-4,-2,-1,1,2,4\}$,

$\overline{B}=\{-3,-1,1,3\}$,

$\therefore$ $\overline{A\cap B}=\{-4,-3,-2,-1,1,2,3,4\}$,

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{-4,-3,-2,-1,1,2,3,4\}$,

$A\cap\overline{B}=\{-3,3\}$.

说明：(1) {不等于 1 的一切实数}与{不等于 2 的一切实数}，它们的并集为{全体实数}，而它们的交集为{既不等于 1、又不等于 2 的一切实数}. 这两者之间不能混淆.

(2) 由上面例题可知：

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

4. 在全集 $I=\{x\,|\,x<10, x\in N\}$ 中，有三个子集 A,B,C. 已知 $\overline{A\cup B}=\{1,4,7,9\}$，$\overline{B\cup C}=\{3,4,7\}$，$\overline{A}\cap B=\{2,8\}$，$\overline{C}\cap B=\{2,6\}$，且 $(A\cap B)\cup C=\varnothing$. 求集合 A,B,C.

解：$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$\because$ $(\overline{A\cup B})\cap(\overline{B\cup C})=\{4,7\}$,

$\therefore$ $\overline{(A\cup B)\cup(B\cup C)}=\overline{(A\cup B)\cup C}=\{4,7\}$,

可将元素 4,7 填入图 1-1 中的相关部分.

$(\overline{A\cup B})\cap C=\{1,9\}$,

$(\overline{B\cup C})\cap A=\{3\}$,

可将元素 1、9 及 3 分别填入图 1-1 中的集合 C 和集合 A 中.

$(A\cap B)\cap C=\varnothing$，表示图 1-1 中的阴影部分.

$\because$ $(\overline{A}\cap B)\cap(\overline{C}\cap B)=\{2\}$,

$\therefore$ $(\overline{A}\cap\overline{C})\cap B=(\overline{A\cup C})\cap B=\{2\}$，可将元素 2 填入图 1-1 中的集合 B 中.

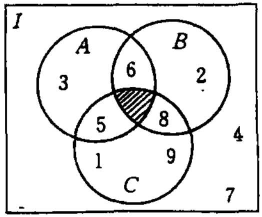

图 1-1

$(\overline{A}\cap B)\cap C=\{2,8\}\cap C=\{8\}$,

$(\overline{C}\cap B)\cap A=\{2,6\}\cap A=\{6\}$,

$\overline{B}\cap(A\cap C)=\{5\}$,

可将元素 8、6、5 分别填入图 1-1 中的集合 $B\cap C$、集合 $A\cap B$ 和集合 $A\cap C$ 中.

∴ $A=\{3,5,6\}$, $B=\{2,6,8\}$, $C=\{1,5,8,9\}$.

5. 已知 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, $B=\{y\mid y\subset A\}$,求在 B 集的子集中,有多少个子集同时满足下面两个条件:

(1) 含有四个元素;

(2) 每个元素中都含有数字 0.

解:集合 B 中的元素是由集合 A 的真子集所组成的.

在 B 集的子集中,满足原题两个条件的,必须在下列五类元素

$\{0\}$, $\{0,\times\}$, $\{0,\times,\times\}$, $\{0,\times,\times,\times\}$, $\{0,\times,\times,\times,\times\}$中任取四个元素组成,其中“$\times$”指五个非零数字中的任意一个,且不能重复.

这五类元素共有

$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4=2^5-1=31$(个).

∴ 同时满足两个条件的 B 集的子集共有

$C_{31}^{4}=31465$(个).

6\. 下面是集合 A 到集合 B 的对应法则,试判断这种对应哪些是映射,一一映射,哪些有逆映射,并写出逆映射的对应法则.

(1) $A=\{x|x\geqslant0\}$,$B=R$,$A\to B$ 使 B 集中的元素 y 按 y 是 x 的平方根与 A 集中的元素 x 对应;

(2) $A=R$,$B=\{y|y>0\}$,$A\to B$ 使 B 集中的元素 y 按 $y=x^{-2}$ 与 A 集中的元素 x 对应;

(3) $A=\{x|0\leqslant x\leqslant\pi\}$,$B=\{y||y|\leqslant1\}$,$A\to B$ 使 B 集中的元素 y 按 $y=\sin x$ 与 A 集中的元素 x 对应;

(4) $A=\{x|x>0\}$,$B=\{y|y\geqslant0\}$,$A\to B$ 使 B 集中的元素 y 按 $y=x^2$ 与 A 集中的元素 x 对应;

(5) $A=\{x|x\leqslant0\}$,$B=\{y|y\geqslant0\}$,$A\to B$ 使 B 集中的元素 y 按 $y=x^2$ 与 A 集中的元素 x 对应;

(6) $A=\{x|x>0\}$,$B=R$,$A\to B$ 使 B 集中的元素 y 按 $y=-\log_2x$ 与 A 集中的元素 x 对应.

解:(1) ∵ 4 的平方根为 2 和 -2(即 A 中的元素 4 在 B 中有两个象),

∴ $A\to B$ 是非映射.

(2) ∵ 当 $x=0$ 时,x^{-2}不存在(即 A 中的元素 0 在 B 中无象),

∴ $A\to B$ 是非映射.

(3) ∵ A 中的任何一个元素,在 B 中有唯一的象,

∵ 当 $x=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$时,$\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$(即 B 中的元

素$\frac{1}{2}$在 A 中有两个原象),

$\therefore$ $A \to B$ 是映射,但非一一映射.

(4) $\because$ A 中的任何一个元素,在 B 中有唯一的象,

$\because$ 当 $y=0$ 时,$x=0$,且 $0 \notin A$(即 B 中的元素 0 在 A 中无原象),

$\therefore$ $A \to B$ 是映射,但非一一映射.

(5) $\because$ A 中的元素与 B 中的元素是一对一的对应关系(即 A 中的任何一个元素,在 B 中有唯一的象;B 中的任何一个元素,在 A 中有唯一的原象),

$\therefore$ $A \to B$ 是映射,又是一一映射,存在逆映射,对应法则为 $y \to x = -\sqrt{y}$.

(6) $\because$ A 中的元素与 B 中的元素是一对一的对应关系,

$\therefore$ $A \to B$ 是映射,又是一一映射.存在逆映射,对应法则为 $y \to x = 2^{-y}$.

7. 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$,f 与 g 是从集合 A 到集合 A 的一一映射,根据下表中的已知数据;填出空白格里的数.

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4		
$g(x)$	2		3	
$f[g(x)]$		2		
$g^{-1}(x)$				