太奇GCT考前辅导丛书

Winner 赢家图书

2010硕士学位研究生入学资格考试

GCT数学考前冲刺

含7年真题详解+8套模拟试卷

全国硕士学位研究生入学资格考试命题研究组 组编

主编 陈剑

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

太奇GCT考前辅导丛书

Winner 赢家图书

2010硕士学位研究生入学资格考试

GCT数学考前冲刺

含7年真题详解+8套模拟试卷

全国硕士学位研究生入学资格考试命题研究组 组编

主编 陈剑

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书紧扣 GCT 考试大纲，强调实战练习和全真模拟。全书根据考试内容分为阶梯化训练题、历年真题、全真模拟三部分，其中阶梯化训练题针对不同层次的考生又分为基础能力题和综合提高题。本书收录了所有历年真题，逐题深度剖析，以真题为鉴，洞察命题新动向，指导考生把握命题脉搏，赢取高分。为提升实战技巧，便于考生查缺补漏，精心准备了全真模拟题以便巩固和提高，扫除考点的盲区和障碍。本书以提高实战能力为基点，以强调考试方法和做题技巧为宗旨，以实战性强和考前冲刺为核心，可以作为 GCT 考前过关冲刺用书。

图书在版编目(CIP)数据

GCT 数学考前冲刺/陈剑主编. —北京：北京航空航天大学出版社，2010. 7

ISBN 978-7-5124-0157-0

Ⅰ. ①G… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 136608 号

GCT 数学考前冲刺

主编 陈 剑
责任编辑 刘 标

北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) http://www.buaapress.com.cn
发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026
读者信箱：bhpress@263.net 邮购电话：(010)82316936
涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

开本：787×1 092 1/16 印张：14.5 字数：371 千字
2010 年 7 月第 1 版 2010 年 7 月第 1 次印刷 印数：7 000 册
ISBN 978-7-5124-0157-0 定价：22.00 元

太奇 GCT 备考丛书数学编委会

主　编：陈　剑

副主编：冀　韬　王　洋

编　委：陈　剑　冀　韬　王　洋　周远飞　曾　峰

孔孟林　王志宽　王彦明　朱郑波

本书特色

全　覆盖全部必考知识点，分模块无盲点习题，分层次阶梯化训练，以点带面，全部题型尽收眼底。

真　收录所有历年真题，逐题深度剖析，以真题为鉴，洞察命题新动向，指导考生把握命题脉搏，赢取高分。

模　精品模拟试卷，全真演练，提升实战技巧，便于考生有的放矢，查缺补漏，以求做到触类旁通，从容应考。

巧　考试中取胜的关键是速度，提高速度依赖于技巧，通过举一反三阐明解题思路，全面展现题型变化，使考生掌握考试做题技巧。

前　言

为了帮助报考硕士专业学位研究生入学资格考试（GCT）的考生更好地做好考前冲刺，按照最新GCT考试大纲精心编写本书。

全书按照GCT数学考试大纲的要求分为阶梯化训练题、历年真题、全真模拟三部分，其中阶梯化训练题针对不同层次的考生又分为基础能力题和综合提高题。通过阶梯化训练题目，使考生能明确考试的重点、难点及常考点，让考生弄清各知识点之间的相互联系，以便对考试有一个全局的认识和把握。作者结合多年的教学经验与考生的疑难困惑，精心研究设计出很好的练习题，以期提高考生识别题型变异的能力。

真题的作用不言而喻，历年真题部分总结了题型的解题方法，注重一题多解，开阔解题思路，使所学知识融会贯通，并能快速找到解题突破口。以真题为鉴，逐题深度剖析，洞察命题新动向，指导考生把握命题脉搏，赢取高分。在研究完历年真题后，考生可以很清楚历年考试出题的重点和难点，使冲刺阶段的总结性复习更有针对性和目的性。

全真模拟是让广大考生能够找到身临其境的感觉，在有限的时间抓住重点，有的放矢，查漏补缺。通过全真演练，掌握考试的技巧和方法，考场上就能从容应考，轻取高分。

本书以提高实战能力为基点，以强调考试方法和做题技巧为宗旨，以实战性强和考前冲刺为核心，对典型考题从多侧面、多视角进行讲解，注重对多解法、多类型题目的训练，培养发散思维和技巧应用能力，因此本书是数学考前过关冲刺的必备辅导书。

本书在编写过程中，得到了北京三民太奇学校张寻、马敏两位校长的大力支持，特此感谢。在编写本书时，编者参阅了有关书籍，引用了一些例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢。由于编者水平有限，兼之时间仓促，错误和疏漏之处难免，恳请读者批评指正。

编　者

2010年5月于清华园

目　录

第一部分　阶梯化训练题

第一章　算术和代数

第一节　算术

基础能力题

1. $\dfrac{1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2-10^2}{2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7}$ 的值是(　　).

(A) $\dfrac{11}{51}$　　(B) $-\dfrac{22}{51}$　　(C) $\dfrac{22}{51}$　　(D) $-\dfrac{11}{51}$

2. 请你想好一个数,将它加 5,其结果再乘以 2,之后再减去 4,并将其结果除以 2,再减去你想好的那个数,最后的结果等于(　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{3}{2}$　　(D) 3

3. 五个不同的数,两两之和依次等于 3,4,5,6,7,8,11,12,13,15. 这五个数的平均值是(　　).

(A) 18.8　　(B) 8.4　　(C) 5.6　　(D) 4.2

4. 方程 $\sqrt{x+y-2}+|x+2y|=0$ 的解为(　　).

(A) $\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$　　(C) $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

5. 已知 $|a-1|=3$, $|b|=4$, $b>ab$,则 $|a-1-b|=$ (　　).

(A) 1　　(B) 7　　(C) 5　　(D) 16

6. 不等式 $|1-x|+|1+x|>a$ 对于任意的 x 成立,则 a 的取值范围为(　　).

(A) $a<2$　　(B) $a\leqslant 2$　　(C) $a>2$　　(D) $a\geqslant 2$

7. 若 $x<-2$,则 $|1-|1+x||$ 的值等于(　　).

(A) $-x$　　(B) x　　(C) $2+x$　　(D) $-2-x$

8. $|a-b|=|a|+|b|$ 成立, $a,b\in\mathbf{R}$,则下列各式中一定成立的是(　　).

(A) $ab<0$　　(B) $ab\leqslant 0$　　(C) $ab>0$　　(D) $ab\geqslant 0$

9. 若不等式 $|3-x|+|x-2|<a$ 的解集是空集,则 a 的取值范围是(　　).

(A) $a<1$　　(B) $a\leqslant 1$　　(C) $a>1$　　(D) $a\geqslant 1$

10. 当 x 取何值时,不等式 $\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\leqslant\dfrac{2-x}{3}$ 恒成立(　　).

(A) $-1\leqslant x\leqslant 1$ (B) $-1\leqslant x\leqslant 2$　　(C) $-2\leqslant x\leqslant 1$　　(D) $-2\leqslant x\leqslant 2$

11. 当 x 取何值时,等式 $\left|\dfrac{3}{2x-1}\right|=\dfrac{3}{1-2x}$ 恒成立(　　).

(A) $x<\frac{1}{2}$　(B) $x\leqslant\frac{1}{2}$　(C) $x>\frac{1}{2}$　(D) $x\geqslant\frac{1}{2}$

12. 使得$\frac{2}{|x-2|-1}$不存在的 x 是方程$(x^2-4x+4)-a(x-2)^2=b$的一个根,则 $a+b=$(　　).

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

13. 某校教师、职工与学生人数之比为 3∶0.5∶100,若全校共有学生 3 000 人,则教师有多少?(　　).

(A) 70　(B) 80　(C) 90　(D) 100

14. 某厂加工一批零件,甲车间加工这批零件的 20%,乙车间加工剩下的 25%,丙车间加工再余下的 40%,还剩 3 600 个零件没有加工,这批零件一共有(　　).

(A) 9 000 个　(B) 9 500　(C) 9 800 个　(D) 10 000 个

基础能力题详解

1. **解**　原式 $=\dfrac{1+(3+2)\times(3-2)+\cdots+(10+9)\times(10-9)}{\dfrac{1\times(1-2^8)}{1-2}}=\dfrac{1+2+3+\cdots+10}{2^8-1}$

$=\dfrac{11}{51}$,选(A).

2. **解**　比如取 0,$\dfrac{(0+5)\times2-4}{2}-0=3$,选(D).

3. **解**　$x_1+x_2+x_1+x_3+\cdots+x_1+x_5+x_2+x_3+\cdots+x_4+x_5=3+4+5+\cdots+15=84$,

每个数实际计算了 4 次,故平均值为$\dfrac{\frac{84}{4}}{5}=4.2$,选(D).

4. **解**　根据题意,有$\begin{cases}x+y-2=0\\x+2y=0\end{cases}$,解得$\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$,选(C).

5. **解**　**方法一**　$b>ab\Rightarrow(a-1)b<0\Rightarrow|a-1-b|\,|b|=|(a-1)b-b^2|=|-12-16|=28.$

所以　$|a-1-b|=\dfrac{28}{|b|}=\dfrac{28}{4}=7$,选(B).

方法二　直接讨论

由(1)$b=4\ \Rightarrow\ a<0\ \Rightarrow\ a=-2\ \Rightarrow\ |a-1-b|=7.$

由(2)$b=-4\ \Rightarrow\ a>0\ \Rightarrow\ a=4\ \Rightarrow\ |a-1-b|=7.$

6. **解**　**方法一**　我们对所给不等式的分段讨论:

$x>1$ 时,$|1-x|+|1+x|=2x>2$

$-1<x<1$ 时,$|1-x|+|1+x|=-2x>2$

$x<-1$ 时,$|1-x|+|1+x|=2$

因此,原式大于等于 2,所以 $a<2$,选(A).

方法二　根据绝对值的几何意义,可知上式的最小值是 2,同样得到答案(A).

7. **解**　$|1-|1+x||=|2+x|=-2-x$,选(D).

另解:代入 $x=-3$,马上排除(A),(B),(C),得到答案(D).

8. **解**　根据题目已知只有 a,b 异号或至少其中一个为 0 才能成立,所以应选(B).

9. **解**　根据绝对值的几何意义 $|3-x|+|x-2|\geqslant 1$，可知答案是(B)．

10. **解**　根据绝对值的性质，对不等式两边同时平方，得

$(2x-1)^2\leqslant(2-x)^2 \Rightarrow x^2\leqslant 1 \Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$，所以答案是(A)．

11. **解**　根据绝对值的性质，可知 $2x-1<0\Rightarrow x<\frac{1}{2}$，所以答案是(A)．

12. **解**　**方法一**　由题干可知不存在时 $x=3$ 或 1，代入方程得到 $a+b$ 的值为 1．答案为(C)．

方法二　我们把题干中的方程变形 $(x^2-4x+4)-a(x-2)^2=b\Rightarrow$

$(x-2)^2-a(x-2)^2=b$ 且由 $\frac{2}{|x-2|-1}$ 不存在，可知 $|x-2|=1\Rightarrow a+b=1$.

13. **解**　首先求出总人数 $\frac{3000}{100/(3+0.5+100)}=3\ 105$

然后教职工总人数 $=3\ 105-3\ 000=105$，教师人数 $=105\times\frac{3}{3.5}=90$，选(C).

14. **解**　$(1-20\%)(1-25\%)(1-40\%)=0.8\times\frac{3}{4}\times 0.6=0.36$，总零件 $\frac{3\ 600}{36\%}=$ 10 000 个，选(D).

综合提高题

1. 甲、乙、丙 3 人合买一份礼物，他们商定按年龄比例分担费用．若甲的年龄是乙的一半，丙的年龄为甲年龄的三分之一，而甲、乙共花费了 225 元，则这份礼物的售价是(　　)元．

(A) 250　　(B) 265　　(C) 270　　(D) 275

2. 从 100 人中调查对 A，B 两种 2008 年北京奥运会吉祥物的设计方案的意见，结果选中 A 方案的人数是全体接受调查人数的 3/5；选 B 方案的比选 A 方案的多 6 人，对两个方案都不喜欢的人数比对两个方案都喜欢的人数的 1/3 只多 2 人，则两个方案都不喜欢的人数是(　　)人．

(A) 10　　(B) 12　　(C) 14　　(D) 16

3. 甲乙两位长跑爱好者沿着社区花园环路慢跑，如两人同时、同向，从同一点 A 出发，且甲跑 9 m 的时间乙只能跑 7 m，则当甲恰好在 A 点第二次追及乙时，乙共沿花园环路跑了(　　)圈．

(A) 14　　(B) 15　　(C) 16　　(D) 17

4. 甲跑 11 m 所用的时间，乙只能跑 9 m，在 400 m 标准田径场上，两人同时出发向同一方向，以上面速度匀速跑离起点 A，当甲第三次追及乙时，乙离起点还有(　　) m.

(A) 360　　(B) 240　　(C) 200　　(D) 180

5. 某工程队计划用 8 天完成一项疏通河道的任务，施工中仅用两天时间就完成了工程的 40%，问照此速度施工，可提前(　　)天完工？

(A) 4 天　　(B) 3 天　　(C) 2 天　　(D) 1 天

6. 长途汽车从 A 站出发，匀速行驶，1 h 后突然发生故障，车速降低了 40%，到 B 站终点延误达 3 h，若汽车能多跑 50 km 后，才发生故障，坚持行驶到 B 站能少延误 1 h20 min，那么 A、B 两地相距(　　)公里.

(A) 412.5　　(B) 152.5　　(C) 146.5　　(D) 137.5

7. 某商店以每件 21 元的价格从厂家购入一批商品，若每件商品售价为 a 元，则每天卖出 $(350-10a)$ 件商品，但物价局限定商品出售时，商品加价不能超过进价的 20%，商店计划每天从该商品出售中至少赚 400 元. 则每件商品的售价最低应定为(　　)元.

(A) 21　　(B) 23　　(C) 25　　(D) 26

8. 一块正方形地板，用相同的小正方形瓷砖铺满，已知地板两对角线上共铺 101 块黑色瓷砖，而其余地面全是白色瓷砖，则白色瓷砖共用(　　)块.

(A) 1 500　　(B) 2 500　　(C) 2 000　　(D) 3 000

9. A、B、C、D 五个队参加排球循环赛，每两队只赛一场，胜者得 2 分，负者得 0 分，比赛结果

4. **解**　两人同时出发，无论第几次追及，二人用时相同，所距距离之差为 400 m 的整数倍，二人第一次追及，甲跑的距离：乙跑的距离 = 2 200：1 800，乙离起点尚有 200 m，实际上偶数次追及于起点，奇数次追及位置在中点(即离 A 点 200 m 处)，选(C).

5. **解**　余下的工程，计划用 $8-2=6$(天) 完成.

现在的工作是为 $60\%=\frac{3}{5}$，一天的进度为 $\frac{40\%}{2}=20\%=\frac{1}{5}$，

需要天数 $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}}=3$，故提前 $6-3=3$(天) 完工，选(B).

6. **解**　设原来车速为 V km/h，则有：$50/V(1-40\%)-50/V=1+1/3$；$V=25$(km/h)，再设原来需要 T 小时到达，由已知有：$25T=25+(T+3-1)\times 25\times(1-40\%)$；得到：$T=5.5$ h，所以：$25\times 5.5=138.5$ km，选(D).

7. **解**　设最低定价为 x 元，已知：$x\leqslant 21(1+20\%)$；$(x-21)(350-10x)\geqslant 400$；

由以上分析可知：$x\leqslant 25.2$；$(x-25)(x-31)\leqslant 0$；所以 $x\leqslant 25.2$，同时 $25\leqslant x\leqslant 31$；所以，$25\leqslant x\leqslant 25.2$，选(C).

8. **解**　因为两对角线交叉处共用一块黑色瓷砖，所以正方形地板的一条对角线上共铺 $(101+1)/2=51$ 块瓷砖，因此该地板的一条边上应铺 51 块瓷砖，则整个地板铺满时，共需要瓷砖总数为 $51\times 51=2\ 601$，故需白色瓷砖为：$2\ 601-101=2\ 500$ 块，选(B).

9. **解**　整个比赛共有 20 分，A、B、C、D 可能得分结果是：6，6，4，2，2 或者 8，8，4，0，0，无论结果怎么排，C 队都得 4 分，所以选(D).

10. **解**　将 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 平方，$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$，由合分比定理：$\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{c^2+d^2}{d^2}$

交换两内项：$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{b^2}{d^2}$，开平方根得　$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{b}{d}$

研究 C 选项　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，由合分比定理得　$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，交换两内项得　$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$

从而有 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$，选(C).

方法二

令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\quad(k\neq 0)$，$\Rightarrow\begin{cases}a=bk\\c=dk\end{cases}$ 代入，得

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{b^2k^2+b^2}}{\sqrt{d^2k^2+d^2}}=\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot b}{\sqrt{1+k^2}\cdot d}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{bk+b}{dk+d}=\frac{(1+k)b}{(1+k)d}=\frac{b}{d}$$

11. **解**　根据题意，有 $\frac{10-a-\frac{10-a}{10}a}{10}=49\%$，解得 $a=3$ 或 $a=17$(舍去)，选(B).

12. **解**　依题意知，种树总数 = 每人种树棵数 × 师生总人数.

即 572 = 每人种树棵数 ×(1 + 学生数)，而学生数恰好平均分成三组，即学生数是 3 的倍数，再加上王老师一人，则师生总数被 3 除余 1.

下面先将 572 分解质因数：$572 = 2 \times 2 \times 11 \times 13$，然后按照题意进行组合使之为两数之积.

若 $572 = 44 \times (1 + 12)$，$1 + 12 = 13$ 为师生总人数，则每人种 44 棵，这不符合实际；

若 $572 = 11 \times (1 + 51)$，$1 + 51 = 52$ 为师生总人数，则每人种树 11 棵；

若 $572 = 2 \times (1 + 285)$，$1 + 285 = 286$ 为师生总人数，则每人种树 2 颗，这不符合实际.

因此，这个班共有学生 51 人，每人种树 11 棵.

13. **解**　对于一个不很大的自然数 $n(n > 1, n$ 为非完全平方数)，可用下面方法去判断它是质数还是合数：先找出一个大于 n 的最小的完全平方数 k^2，再写出 k 以内的所有质数；若这些质数都不能整除 n，则 n 是质数；若这些质数中有一个质数能整除 n，则 n 为合数. 本题中，因为 $103 < 11^2$，而 11 以内的质数 2,3,5,7 都不能整除 103，故 103 是质数. $437 < 21^2$，而 21 以内的质数有：2,3,5,7,11,13,17,19. 因为 $437 \div 19 = 23$，所以 437 是合数.

14. **解**　因为 20,40 都是合数，而 $a + 20$，$a + 40$ 又都是质数，所以 $a \neq 2$. 又因为 $20 \div 3 = 6$(余 2)，所以 a 不是被 3 除余 1 的数，否则 $a + 20$ 能被 3 整除，即为合数，与题意不符. 同理，a 不能是被 3 除余 2 的数，否则 $a + 40$ 为合数，与题意不符. 因此，a 必是能被 3 整除的数，又且 a 是质数，所以 $a = 3$.

15. **解**　在所有的质数中，只有质数 2 是偶数. 这样，根据数的奇偶运算规律可知 $a \times b + c = 1\,993$，具有 $a \times 2 + c = 1\,993$ 或 $a \times b + 2 = 1\,993$ 两种组合形式.

当 $a \times 2 + c = 1\,993$ 时，c 的值是 3,5 或 7，则 a 的值应是 995、994、993，因为 995、994、993 不是质数，所以不合题意删去.

当 $a \times b + 2 = 1\,993$ 时，c 的值是 2，$a \times b = 1\,991$，$1\,991 = 11 \times 181$，a 的值是 11(或是 181)，b 的值是 181(或是 11). 2,11,181 均为质数，符合题意，这样 $a + b + c = 2 + 11 + 181 = 194$.

说明：当 a、b、c 都是质数，$a \times b + c = 1\,994$，这就是哥德巴赫猜想问题，根据陈氏定理，有 $1\,994 = 11 \times 181 + 3$.

16. **解**　$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 3 \times 4 \times 5 \times 6$，所以四个小朋友的年龄分别是 3 岁、4 岁、5 岁、6 岁，其中年龄最大的是 6 岁.

17. **解**　根据题意，可知将 1 155 个同样大小的正方形拼成长与宽不一的各种长方形，其面积不变，可应用分解质因数的原理分解组合两个数的乘积形式.

分解：$1\,155 = 1 \times 1\,155 = 3 \times 385 = 5 \times 231 = 7 \times 165 = 11 \times 105 = 15 \times 77 = 21 \times 55 = 33 \times 35$. 因此，共有八种拼法.

【注意】此题可用 1 155 的约数个数除以 2，即为所得. 因为 $1\,155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$，因此，1 155 的约数个数为 $4^2 = 16$ 个，$16 \div 2 = 8$(个).

18. **解**　因为 $2 \times 5 = 10$，这样含有质因数一个 2 和一个 5，乘积末尾就有一个 0. 同时在这 100 个因数中，含有质因数 2 的个数一定多于质因数 5 的个数，所以只需知道乘积中含质因数 5 的个数就可知积的末尾连续 0 的个数. 这 100 个数中是 5 的倍数有 5,10,15…,100 共有 20 个，其中 25,50,75,100 又是 25 的倍数，它们各含有质因数 5 两个，所以，乘积中共有质因数 5 的个数是 $20 + 4 = 24$ 个. 因此，乘积末尾共有 24 个连续的零.

19. **解**　设两数分别为 a 和 b，由题意可知：$4\,875 = (a \times b) \times n$($n$ 为整数).

根据被除数 = 除数 × 商的关系，则有：$4\,875 = (a \times b) \times n$. 这样，运用分解质因数的原理进行分解. 再根据 $a + b = 64$ 进行组合. $4\,875 = 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 13 = (39 \times 25) \times 5$. 故这两个数分别为 39 和 25，它们之差是：$39 - 25 = 14$.

第二节　数和代数式

基础能力题

1.复数 $z=(1-i)^2$ 的模 $|z|=$(　　).

(A) 4　(B) $2\sqrt{2}$　(C) 2　(D) $\sqrt{2}$

2.复数 $z=\dfrac{-1+i}{1+i}-1$,在复平面内,z 所对应的点在(　　).

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3.复平面上一等腰直角三角形的 3 个定点按逆时针方向以此为 O(原点)、Z_1 和 Z_2,$\angle Z_1OZ_2=\dfrac{\pi}{2}$,若 Z_1 对应复数 $z_1=-1+\sqrt{3}i$,则 Z_2 对应复数 $z_2=$(　　).

(A) $-1-\sqrt{3}i$　(B) $1-\sqrt{3}i$　(C) $\sqrt{3}+i$　(D) $-\sqrt{3}-i$

4.复数$\dfrac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}=$(　　).

(A) $1+\sqrt{3}i$　(B) $-1+\sqrt{3}i$　(C) $1-\sqrt{3}i$　(D) $-1-\sqrt{3}i$

5.复数 $z=-3\left(\sin\dfrac{4}{3}\pi-i\cos\dfrac{4}{3}\pi\right)$的辐角主值是(　　).

(A) $\dfrac{4}{3}\pi$　(B) $\dfrac{5}{3}\pi$　(C) $\dfrac{11}{6}\pi$　(D) $\dfrac{1}{6}\pi$

6.$f(x)=x^2+x-1$,$g(x)=a(x+1)^2+b(x-1)(x+1)+c(x-1)^2$,$a,b,c$ 为(　　)时,$f(x)=g(x)$.

(A) $a=-\dfrac{1}{4},b=1,c=-\dfrac{1}{4}$　(B) $a=\dfrac{1}{2},b=1,c=-\dfrac{1}{2}$

(C) $a=\dfrac{1}{4},b=1,c=-\dfrac{1}{4}$　(D) $a=-\dfrac{1}{2},b=2,c=-\dfrac{1}{2}$

7.若 x 和分式$\dfrac{3x+2}{x-1}$都是整数,那么 $x=$(　　).

(A) 2,6　(B) 0,2,6　(C) -4　(D) $-4,0,2,6$

8.x 取(　　)时,分式$\dfrac{x^2-4}{x+2}$的值等于零.

(A) 2　(B) -2　(C) ± 2　(D) ± 4

9.m 取(　　)值时,分式$\dfrac{2m+7}{m-1}$的值是正整数.

(A) $-8,0,4,10,\pm 2$　(B) $-8,2,4,10$

(C) 2,4,10　(D) $-8,-2,0$

10.a 为(　　)时,有$\dfrac{|a|-2}{a^2+a-6}=0$.

(A) -2　(B) ± 2　(C) 2　(D) -3

11.已知 $3a^2+2a+5$ 是一个偶数,那么整数 a 一定是(　　).

(A) 奇数　(B) 偶数　(C) 任意正数　(D) 质数

2. **解**　$z=\dfrac{-1+i}{1+i}-1=\dfrac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}-1=-1+i$，显然在第二象限，选(B).

3. **解**　$\overrightarrow{OZ_1}$ 绕 O 按逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 角即得 $\overrightarrow{OZ_2}$，

则 $z_2=z_1e^{\frac{\pi}{2}i}=(-1+\sqrt{3}i)\cdot i=-\sqrt{3}-i$，选 D.

4. **解**　$\dfrac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}=\dfrac{2^4(1+i)^4}{-2^5(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^5}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{(2i)^2(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^6}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot(-4)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-1+\sqrt{3}i，选(B).$$

5. **解**　$z=-3\left(\sin\dfrac{4}{3}\pi-i\cos\dfrac{4}{3}\pi\right)=3\left(-\sin\dfrac{4}{3}\pi+i\cos\dfrac{4}{3}\pi\right)$

$$=3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi\right)\right]=3\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$$

所以选(C).

6. **解**　显然有，

$$g(x)=a(x+1)^2+b(x-1)(x+1)+c(x-1)^2$$
$$=(a+b+c)x^2+(2a-2c)x+(a-b+c)$$

若 $f(x)=g(x)$，则有 $\begin{cases}a+b+c=1\\2a-2c=1\\a-b+c=-1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\b=1\\c=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$，选(C).

7. **解**　令 $t=\dfrac{3x+2}{x-1}=3+\dfrac{5}{x-1}$. x 和 t 均是整数，所以 $x-1$ 应是 5 的约数，又有 $5=1\times5=(-1)\times(-5)$，则 $x-1=1,5,-1,-5$，所以 $x=2,x=6,x=0,x=-4$，选(D).

8. **解**　根据题意，应有 $\begin{cases}x^2-4=0\\x+2\neq0\end{cases}$，即 $x=2$，选(A).

9. **解**　同第 2 题，有 $\dfrac{2m+7}{m-1}=2+\dfrac{9}{m-1}$，有 $m-1=1,9,-1,-9,3,-3$，即 $m=2,m=10,m=0,m=-8,m=4,m=-2$，只有 $m=-8,m=2,m=10,m=4$ 时 $\dfrac{2m+7}{m-1}$ 的值才是正整数，选(B).

10. **解**　同第 8 题，显然有 $\begin{cases}|a|-2=0\\a^2+a-6\neq0\end{cases}$，解得 $a=-2$，选(A).

11. **解**　$3a^2+2a+5$ 是偶数，又 $2a$ 一定是偶数，故 $3a^2+5$ 也必须是偶数，即 $3a^2$ 应是奇数，从而 a 应是奇数，选(A).

12. **解**　$M-N=(4x^2-9x+4a)-(3x^2-9x+4a)=x^2\geqslant0$，故 $M>N$ 或 $M=N$，选(D).

13. **解**　考虑到 $1^n=1(n\in\mathbf{R})$，$(-1)^{2k}=1(k\in\mathbf{Z})$，$x^0=1(x\in\mathbf{R})$. $x=-10$ 是其一个整数解；令 $x^2-x-1=1$，解得 $x=2$ 或 $x=-1$；再令 $x^2-x-1=-1$，解得 $x=0$ 或 $x=1$，而当 $x=1$

时有$(x^2-x-1)^{x+10}=-1$,故原方程的整数解为$x=-10,x=-1,x=0,x=2$,共4个,选(D).

14.解　根据题意有$\begin{cases}b\neq 0\\2a-4=0\end{cases}$,即为$-bx^2+x-2b$,$-x^2+x-2$满足,选(B).

15.解　设预计的速度是x,结果是按$\frac{6}{5}x$的速度行军的,那么有$\frac{60}{x}=\frac{60}{\frac{6}{5}x}+1$,解得$x=10$,所以这时的速度是$\frac{6}{5}x=12$,选(C).

16.解　根据题意,应该有a,b,c两正一负,故$x=0$,$ax^3+bx^2+cx+1=1$,那么选(C).

17.解　由$abc=1$知,$a=\frac{1}{bc}$,所以

$$\begin{aligned}\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}&=\frac{\frac{1}{bc}}{\frac{1}{bc}\cdot b+\frac{1}{bc}+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{\frac{1}{bc}\cdot c+c+1}\\&=\frac{1}{bc+b+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{bc+b+1}=1\end{aligned}$$

选(C).

18.解　$$\begin{aligned}2bx^2-8bxy+8by^2-8b&=2b[(x-2y+2)^2-4x+8y-4-4]\\&=2b[0-4(x-2y+2)]=0,\text{选(B)}.\end{aligned}$$

19.解　$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac&=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\\&=\frac{1}{2}[(-1)^2+(-1)^2+2^2]=3,\text{选(C)}.\end{aligned}$$

20.解　$2\,001x(x^2-2x-1)-2\,001(x^2-2x-1)-2\,001-8=-2\,009$,选(A).

21.解　右边$=\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x+2}=\frac{(m+n)x+2m+n}{x^2+3x+2}=\frac{x-1}{x^2+3x+2}$,

即$\begin{cases}m+n=1\\2m+n=-1\end{cases}$,解得$\begin{cases}m=-2\\n=3\end{cases}$,选(A).

22.解　(1) 方程两边同乘以x^2-4得$1-2(x-2)=3(x+2)$,解得$x=-\frac{1}{5}$,故原方程的解是$x=-\frac{1}{5}$;

(2) 方程两边同乘以$2(x^2-1)$得$4=2(x-1)-3(x+1)$,解得$x=-9$,故原方程的解为$x=-9$;

(3) 方程两边同乘以$(x^2-5x+6)(x^2-x-6)$得$x^2-x-6=2(x^2-5x+6)$,即$x^2-9x+18=0$,解得$x=3$或$x=6$,又$x=3$时$x^2-5x+6=0$是增根,故原方程的解是$x=6$.

综合提高题

1.设$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,则1的三次方根是(　　).

(A) $1,\omega,-\omega$　　(B) $1,\omega,\omega^2$　　(C) $1,-\omega,\omega^2$　　(D) $1,1-\omega,1+\omega$

2.$\operatorname{Arg} z$表示z的辐角,今有$\alpha=\operatorname{Arg}(2+i)$,$\beta=\operatorname{Arg}(-1+2i)$,$\sin(\alpha+\beta)=$(　　).