金榜®版高等学校教材同步辅导系列

配高教社《微积分》（第二版）下册 同济大学应用数学系 编

微积分

同步辅导与课后习题详解

第二版 下册

金榜教学与研究专家委员会/编审

中国科学院 孙明彦/主编

吉林大学出版社

金榜®版高等学校教材同步辅导系列

微积分

同步辅导与课后习题详解

第二版 下册

金榜教学与研究专家委员会/编审

中国科学院 孙明彦/主编

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步辅导与课后习题详解:第2版.下册/
孙明彦主编.—长春:吉林大学出版社,2008.7
(金榜版高等学校教材同步辅导系列)
ISBN 978-7-5601-3882-4

Ⅰ.微… Ⅱ.孙… Ⅲ.微积分—高等学校—
教学参考资料Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第101388号

书名:金榜版高等学校教材同步辅导系列
　　微积分同步辅导与课后习题详解　第2版　下册
作者:孙明彦　主编

责任编辑、责任校对:黄风新
吉林大学出版社出版、发行
开本:880×1230毫米　1/32
印张:297.5　字数:7488千字
ISBN 978-7-5601-3882-4

封面设计:金榜图文设计室
北京市后沙峪印刷厂　印刷
2008年7月　第1版
2008年7月　第1次印刷
总定价:567.90元

社址:长春市明德路421号　邮编:130021
发行部电话:0431-88499826
网址:http://www.jlup.com.cn
E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前　言

随着近几年大学连续扩招，大学生的就业压力越来越大，社会对高层次、高素质人才的需求倾向也逐步加大。这就要求大学生在学习生活中，必须越来越注重素质的培养和实际能力的提高。因此，大学生对各种基础教材、专业理论教材、教学辅导书、考试用书、工具书等学习用书的需求急剧增加。有鉴于此，我们组织全国多所知名重点大学的专家和教授，依据最新教材，编写了这套大学重点科目辅导系列丛书。本套丛书涉及的学科有数学、物理、力学、化学、电子、电气工程、工程、经济等，基本上覆盖所涉及专业的主干课程和基础课程。我们在编写此系列图书时，一方面坚持对学科内容的覆盖性；另一方面注重因材施教，准确把握不同层次学生的学习要求。

作为一种辅导性教材，本套丛书力求做到有的放矢，恰到好处。体例设计具有如下特色：

1. 知识点概括：每章首先介绍基本理论与方法，尽量避免使用抽象方法，尽可能用简单的方法，做到深入浅出。内容按照基础知识点、重要知识点和疑难知识点进行划分，方便学生对整章内容进行整体性地把握。

2. 易考题型解析及解题技巧总结：在此部分，我们列举了大量难度不等的易考常考题型，并针对每种题型给出解题思路和解题技巧，对学生的学习有着很强的启发性，能够帮助学生开阔思路、活跃思维、举一反三、触类旁通。书中例题都非常新颖，有着实际工程应用背景，很有参考价值，一改国内教材习题大同小异的弊病。

3. 课后习题详解：完全针对最经典教材最新版本的课后习题给予解答。解答过程中力求做到概念清晰、步骤完整、数据准确、附图齐全，必要时给以恰当的评注，更有助于学生深入思考以及远离解题误区。

由于编者水平有限，本书难免会有疏漏之处，恳请广大读者朋友批评指正。

联系我们：中国考试培训网 www.julian.com.cn。

编　者

目 录

第五章　向量代数与空间解析几何

一、知识点概括

(一)基础知识点

1. 向量

(1)定义：

向量是既有大小，又有方向的量.向量的大小叫做向量的模.

向量可记作 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$，模记作 $|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$

(2)单位向量和零向量

单位向量：模等于 1 的向量

零向量：模等于 0 的向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的方向是任意的.

(3)两个向量平行

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$.

2. 向量的加法和数乘运算

(1)向量的加法

①平行四边形法则(如图 5－1)

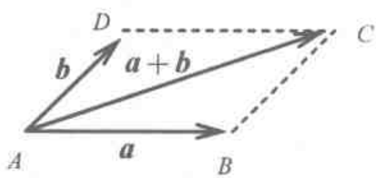

图 5－1

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为邻边作一平行四边形，对角线为 AC，则称向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

②三角形法则(如图 5－2)

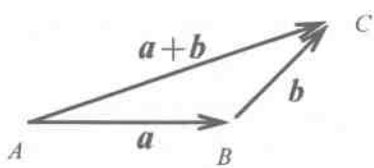

图 5－2

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连结 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

③向量的加法运算满足：

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，

结合律：$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.

(2)向量与数的乘法

①数乘：任意实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$.

它的模：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

它的方向：当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反方向；当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$.

②向量的数乘运算满足下列运算律：

结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

分配律：$(\mu+\lambda)\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

③任何非零向量可以表示为它的模与同向单位向量的数乘.

④设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

3. 向量的坐标

(1)向量的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，分别以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 来记 x 轴、y 轴、z 轴，对任意的向量 $\boldsymbol{a}$，通过平移使其起点移到原点，此时终点在 x 轴、y 轴、z 轴分别对应 a_x，a_y，a_z，则 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 a_x,a_y,a_z 之间一一对应，我们把有序数组 a_x,a_y,a_z 称作向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$

(2) 利用坐标作向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

①$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$.

②$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$.

③$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$. ($\lambda$ 为实数)

此时，可用坐标表示两个向量的平行，即：$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$，也就是相对应的坐标成比例.

(3)向量的模

①设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

②设 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

于是点 A 与点 B 间的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(4)方向角和方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向所成的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，方向角的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

即 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$.

方向余弦满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

(5)向量的投影

向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影表示为 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$, $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

4. 向量的乘法运算

(1)向量的数量积(点积,内积)

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,定义为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$. ($\theta$ 为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$)

(2)用数量积表示投影

向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$ $(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$

(3)数量积的坐标表示

若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

(4)数量积的性质和结论

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;　　②(交换律)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

③(分配律)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

④(数乘结合律)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, λ、μ 为任意实数;

⑤向量 $\boldsymbol{a}(a_x,a_y,a_z)$ 与 $\boldsymbol{b}(b_x,b_y,b_y)$ 的夹角 θ 满足公式

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}};$$

⑥$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 或 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=\boldsymbol{0}$.

(5)向量的向量积(叉积,外积)

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,其模为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,并且 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则.

(6)向量积的性质和结论

①$\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$;

②$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

③(反交换律)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

④(分配律)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

⑤$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;

⑥向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

⑦设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,

则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$;

⑧ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(7)向量的混合积

向量的混合积定义为 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,则混合积的坐标表达式为:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

(7)混合积的性质和结论

①$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]$;

②三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$;

③混合积$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$的绝对值是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻三棱的平行六面体的体积.

5. 平面

(1)平面的法向量

垂直于平面的非零向量叫做该平面的法向量.

(2)平面的方程

①点法式方程

过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,且法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$的平面 Π 的方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

②三点式方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

③平面的一般方程

$Ax+By+Cz+D=0$ (A,B,C 不同时为 0),(A,B,C)为平面法向量.

④截距式方程

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,$a,b,c$ 依次称作平面在 x,y,z 轴上的截距.

(3)两平面的夹角

两平面的法向量的夹角称为两平面的夹角(通常不取钝角).

若两个平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$,平面 Π_1 和 Π_2 的夹角设为 θ,则

$$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

两个结论：

①平面 Π_1 和 Π_2 垂直$\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

②平面 Π_1 和 Π_2 平行或重合$\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

(4)点到平面的距离

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

6. 直线

(1)直线的方向向量

平行于已知直线的非零向量称作该直线的方向向量,简称直线的方向.

(2)直线的方程

①直线的参数方程

过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$且以 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$为方向向量的直线方程为

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt.\end{cases}$$

②直线的对称式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

③直线的一般方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

其中$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$不成立.

(3)直线的夹角、直线与平面的夹角

①两直线的夹角(设为 θ)

设两直线的方向向量分别是 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$,则两直线夹角余弦为

$$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}\right|=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

②直线与平面的夹角(设为 φ)

设直线的方向向量 $s=(m, n, p)$，平面的法线向量为 $n=(A, B, C)$，则直线与平面的夹角正弦为

$$\sin\varphi=\frac{|n\cdot s|}{|n|\,|s|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

(6)过直线的平面束方程

若直线 L 的方程为 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$ 则方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ 就是通过直线 L 的平面束方程.

(7)一些结论

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别是 $s_1=(m_1, n_1, p_1)$ 和 $s_2=(m_2, n_2, p_2)$，平面 Π 的法线向量为 (A, B, C)，则有

①$L_1\perp L_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

②$L_1 /\!/ L_2\Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$；

③$L_1\perp \Pi\Leftrightarrow \dfrac{A}{m_1}=\dfrac{B}{n_1}=\dfrac{C}{p_1}$；

④$L_1 /\!/ \Pi\Leftrightarrow Am_1+Bn_1+Cp_1=0$.

7. 曲面与曲线

(1)柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线形成的轨迹叫做柱面，定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线叫做柱面的母线. 一般地，不完全三元方程(即 x, y, z 不同时出现的方程)在空间直角坐标系中表示柱面.

(2)旋转曲面

平面上的曲线 C 绕其平面上的一条定直线旋转一周所形成的曲面叫做旋转曲面，该曲线 C 称作旋转曲面的母线，这条定直线叫做旋转曲面的轴.

在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中 z 保持不变，而将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$；若 y 不变，而将 z 改成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，则得到曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程 $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

其他情况可类似推出.

(3)空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线. 设 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x, y, z)=0$ 是两个曲面方程，则它们的交线为 Γ 的方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

(4) 空间曲线在坐标面上的投影

以空间曲线 Γ 为准线、母线垂直于 xOy 面的柱面叫做曲线 Γ 对 xOy 面的投影柱面，投影柱面与 xOy 面的交线叫做 Γ 在 xOy 面上的投影曲线.

求法：设空间曲线 Γ 的一般方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，方程组消去变量 z 后所得的方程 $H(x,y)=0$ 就是曲线 Γ 关于 xOy 面的投影柱面.

(类似地可以得到曲线 Γ 在其他坐标面上的投影的定义和求解方法).

(5)常见的二次曲线方程

椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$　　椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm z$

双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm z$　　单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$　　椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

(二) 重要知识点

向量的概念及其坐标表示、两向量平行或垂直的条件、向量运算的坐标表示、平面和直线方程的求法、平面与平面或平面与直线或直线与直线之间的夹角、点到直线的距离、简单求解旋转曲面及空间曲线在坐标平面上的投影的求解都是本章的重要知识点.

本章所引入的向量的概念及坐标表示在以后的章节中都会不时的用到，应该掌握好本章的基本概念及知识点.

(三) 疑难知识点

1. 向量是一个最基本的概念，要理解好，向量仅仅表示大小和方向，并不能说两个向量相等就得到两个向量有同一个起点，同一个终点，起点可能是不同的.

2. 对于向量的一些运算，要跟几何意义结合起来，比如两个向量的和为分别以已知两向量为邻边的平行四边形的对角线.

3. 要区分好两个向量的内积和外积，内积是一个数，而外积仍是个向量，掌握内积和外积的计算公式及用内外积来判断两个向量垂直和平行的方法，可以通过内积和外积在类似性质上的比较来很好地理解.

4. 平面和直线方程的各个系数的几何含义一定要理解好，以及会选用适当的平面或直线方程表示来求平面或直线的方程

5. 若给定直线的方程是通过两个平面的交线来表示的，可以通过平面束方程来进行相关问题的求解.

二、易考题型解析及解题技巧总结

易考题型一　点到平面的距离

例题 1　(2006 年，数学一)点$(2,1,0)$到平面$3x+4y+5z=0$的距离$d=$________.

【解析】 本题考查的就是给定已知点，求该点到平面的距离，直接套用点到平面的公式求即可

故 $d=\dfrac{|3\times2+4\times1+5\times0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{50}}=\sqrt{2}$.

【解题技巧总结】 关于点到平面距离的考查，其实是对该章最基本知识点的考查，点到平面的距离就是一个公式，有时候越简单的东西越被容易大家忽视，本章很多东西都很基础，在别的章节中可能会有很大的用处，比如向量的概念和一些性质，常用的曲面与曲线的函数表达式都会在以后的章节中用到.

易考题型二　平面的方程的考查

例题 2　(2003 年，数学一)曲面$z=x^2+y^2$上与平面$2x+4y-z=0$平行的切平面的方程是__________.

【解析】 本题考查的是平面方程的系数的意义、两平面平行的条件和曲面表面处法向量的求法，曲面表面法向量的求法在下章多元微分会讲到.

设曲面上与所给平面平行的切平面的切点为(x_0,y_0,z_0).

由平面的法向量$\boldsymbol{n}=\{2,4,-1\}$和曲线$z=x^2+y^2$切平面的法向量$\{-2x_0,-2y_0,1\}$，得$x_0=1,y_0=2,z_0=5$，故所求切平面方程为$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，即$2x+4y-z=5$.

【解题技巧总结】 关于平面的考查一般都是基本的考查，即平面的方程的系数的含义，由法向量和一点写出平面的方程及平面平行或垂直的判定等.

具体内容见前面知识点 6.

易考题型三　关于直线在平面上的投影的考查

例题 3　(1998 年，数学一)求直线$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$\pi:x-y+$

$2z-1=0$ 上投影直线 l_0 的方程，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

【解析】 本题考查的是投影直线的求法及旋转曲面方程的求法，在求投影曲线的时候，可以通过求过直线且垂直于所给平面的平面来表示投影直线；求垂直于所给平面的平面时，可以通过已知直线的方向向量和 π 的法向量来求法向量，然后加上一已知点，或用直线束方程来表示通过 l 的平面，然后利用与所给平面的法向量垂直来确定待定系数，我们选择使用直线束表示平面的方法来求解.

直线 l 的方程可以变为 $\begin{cases} x-y-1=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$

故过 l 的平面方程可表示为直线束方程 $x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$.

整理得 $x-(1-\lambda)y+\lambda z-(1+\lambda)=0$.

若平面与所给平面垂直则 $(1,-1+\lambda,\lambda)\cdot(1,-1,2)=0$ 得　$\lambda=-2$.

故过直线且与所给平面垂直的平面方程为 $x-3y-2z+1=0$.

所以所求的投影直线 l_0 的方程为 $\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}$

上面方程可改为 $\begin{cases} x=2y, \\ z=\dfrac{1}{2}(1-y). \end{cases}$

所以 l_0 绕 y 轴旋转得 $x^2+z^2=(2y)^2+\dfrac{1}{4}(1-y)^2$.

即 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

【解题技巧总结】 通常在涉及直线和平面之间的问题的时候，直线方向向量和平面的法向量都会用得上，有时候可能通过两个向量作向量积得到所求的向量，涉及过直线的平面的时候，通常可以考虑用直线束方程来表示平面，可以达到简化的目的；求直线方程可以转化为用两个平面的交线来表示所求直线的问题；直线绕坐标轴旋转，假设绕 x 轴旋转，则可以将 y 和 z 分别表示 x 的方程 $y=y(x)$，$z=z(x)$，然后通过 $y^2+z^2=y^2(x)+z^2(x)$ 来表示所求的旋转曲面.

三、课后习题详解

▶习题 5－1◀

1. 设 A、B、C 为三角形的三个顶点，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

【解】 利用向量相加的三角形法则，有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

故$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}=0$.

2. 已给正六边形 $ABCDEF$(字母顺序按逆时针向),记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{CB}$.

【解】 正六边形 $ABCDEF$ 如图 5-3 所示.

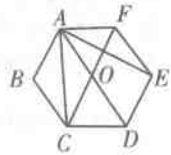

图 5-3

$\because \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$.

由正六边形的平行关系及长度的倍数关系得

$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{BA}$.

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

3. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 来表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

【解】 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}+11\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}$

4. 用向量法证明:三角形两边中点的连线平行于第三边,且长度等于第三边长度的一半.

【证明】 设$\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 的中点分别为 M,N,如图 5-4 所示,根据向量的三角形法则有$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$.

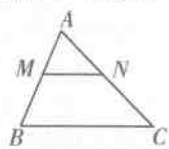

图 5-4

$$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

故由定理 1 知$\overrightarrow{MN}/\!/\overrightarrow{BC}$,所以结论成立.

5. 设 C 为线段 AB 上一点且$|CB|=2|AC|$,O 为 AB 外一点,记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$,试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 来表示 $\boldsymbol{c}$.

【解】 $OABC$ 四点关系如图 5-5 所示.

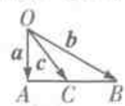

图 5-5

$\because ABC$ 共线且$|CB|=2|AC|$,

$\therefore \overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

$\therefore \boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}.$

▶习题 5－2◀

1. 在空间直角坐标系中，各卦限中的点的坐标有什么特征？指出下列各点所在的卦限：

$A(1,-3,2)$；　$B(3,-2,-4)$；　$C(-1,-2,-3)$；　$D(-3,2,-1)$.

【解】 设点坐标(x,y,z)，则在空间直角坐标系中，八个卦限中的点的坐标的 x,y,z 的正负关系分别为

$(+,+,+),(-,+,+),(-,-,+),(+,-,+),(+,+,-),(-,+,-),(-,-,-),(+,-,-)$.

$\therefore A$ 点在第 4 卦限，B 点在第 8 卦限，C 点在第 7 卦限，D 点在第 6 卦限.

2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$P(0,2,-5)$；　$Q(5,2,0)$；　$R(8,0,0)$；　$S(0,2,0)$.

【解】 在 xOy 面，yOz 面和 xOz 面上的点的坐标分别为$(x,y,0)$，$(0,y,z)$和$(x,0,z)$在 x 轴，y 轴和 z 轴上的点的坐标分别为$(x,0,0)$，$(0,y,0)$和$(0,0,z)$

$\therefore P$ 点在 yOz 面上，Q 点在 xOy 面上，R 点在 x 轴上，S 点在 y 轴上.

3. 求点(a,b,c)关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

【解】 (1)点(a,b,c)关于三个坐标面 xOy，yOz 和 xOz 的对称点分别是$(a,b,-c)$，$(-a,b,c)$和$(a,-b,c)$.

(2)点(a,b,c)关于三个坐标轴即 x 轴，y 轴和 z 轴的对称点分别是$(a,-b,-c)$，$(-a,b,-c)$和$(-a,-b,c)$.

(3)点(a,b,c)关于原点的对称点为$(-a,-b,-c)$.

4. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标，进而求出 P_0 到各坐标面和各坐标轴的距离.

【解】 (1)点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$分别向三个坐标面即 xOy 面，yOz 面和 xOz 面作垂线，垂足分别为$(x_0,y_0,0)$，$(0,y,z_0)$和$(x_0,0,z_0)$，所对应的 P_0 点到垂足的距离分别为$|z_0|$，$|x_0|$和$|y_0|$.

(2)点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$分别向三个坐标轴即 x 轴,y 轴和 z 轴作垂线,垂足分别是$(x_0,0,0)$,$(0,y_0,0)$和$(0,0,z_0)$,所对应的 P_0 到该垂足的距离分别为 $\sqrt{y_0^2+z_0^2}$,$\sqrt{x_0^2+z_0^2}$和 $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

5. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特征?

【解】 (1)过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$作平行于 z 轴的直线,该直线上的点的坐标与 P_0 有相同的横坐标和纵坐标,即(x_0,y_0,z).

(2)过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$作平行于 xOy 面的平面,该平面上的点与 P_0 点有相同的竖坐标即(x,y,z_0).

6. 已知点 $A(2,1,4)$、$B(4,3,10)$,写出以线段 AB 为直径的球面方程.

【解】 若以 AB 为球的直径,则球心 O 为 AB 的中点,即坐标$(3,2,7)$.

故该球的半径 $r=\sqrt{(3-2)^2+(2-1)^2+(7-4)^2}=\sqrt{11}$.

∴以线段 AB 为直径的球面方程为

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=11.$$

7. 设长方体的各棱与坐标轴平行,已知长方体的两个顶点的坐标,试写出其余六个顶点的坐标:

(1)$(1,1,2)$,$(3,4,5)$; (2)$(4,3,0)$,$(1,6,-4)$.

【解】 (1)设已知两点分别为 $A(1,1,2)$和 $B(3,4,5)$,则$\overrightarrow{AB}=(2,3,3)$.

∵$\overrightarrow{AB}$不平行于 3 条坐标轴和 3 个坐标面.

∴$\overrightarrow{AB}$为对角线的向量.

∴由分析得其余 6 个点的坐标为$(1,1,5)$,$(1,4,5)$,$(3,1,5)$,$(3,1,2)$,$(3,4,2)$和$(1,4,2)$.

(2)同理可知已知两点为长方体对角线上的两个端点.

∴由分析得其余 6 个点坐标为$(4,6,0)$,$(1,6,0)$,$(1,3,0)$,$(1,3,-4)$,$(4,3,-4)$和$(4,6,-4)$.

8. 证明:三点 $A(1,0,-1)$,$B(3,4,5)$,$C(0,-2,-4)$共线.

【证明】 ∵$\overrightarrow{AB}=(2,4,6)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,-2,-3)$.

∴$\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

∴由定理 1 得$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$.

又∵$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB}$都过 A 点.

∴A,B,C 三点共线.

9. 证明:以点 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰