逻辑代数

湖南常德师专数学科

逻辑代数

黄根民　编

湖南常德师专数学科

说　　明

我科1977年编过《集合与逻辑代数》，1978年参加过湖南省师专通用《逻辑代数》讲义的编写工作。在此基础上，编者在多次讲授《逻辑代数与电子计算机》这门课程的教学实践中，吸收兄弟院校同类教材之优点，编写了《逻辑代数》。编者曾力求：

1、以基本理论和基础知识为主，注意反映近代科学成果。

2、理论联系实际指导中学教学，体现师范性。

3、内容由浅入深，语言简练通俗，各章配备适量习题，便于自学。

本教材教学总时数约70学时，其中代＊号的内容约4学时，删去这部分内容不影响教材的系统性。此教材可作为二、三年制师专数学专业或教师进修学院的《逻辑代数》这门课程的教材或教学参考书，亦可作为中学教师的教学参考书。

在编写过程中，编者得到我科教师的大力支持。特别是我科徐行副教授对初稿和二稿都逐章仔细阅读和修改过。我科沙国栋、邱卫平老师参加了整个校对工作。1981年夏，编者还将二稿送请湖南师范学院数学系戴世虎副教授审阅。戴副教授不惮其烦地为编者审阅了全部稿件，并提出了宝贵意见，使本教材得到了进一步改进。在此一并表示衷心地感

目　录

第一章　集合代数……………………………………（1）
　§1　集合的概念……………………………………（1）
　§2　集合的并、交、补运算……………………………（7）
　§3　包含……………………………………………（11）
　§4　差和对称差……………………………………（12）
　§5　直积集…………………………………………（17）
习题一　…………………………………………………（20）
第二章　布尔代数的公理系统…………………………（26）
　§1　公理系…………………………………………（26）
　§2　布尔代数的其他性质……………………………（27）
　§3　公理系的独立性…………………………………（35）
　§4　公理系的完备性…………………………………（37）
*§5　布尔同构和布尔同态……………………………（40）
习题二　…………………………………………………（45）
第三章　命题代数和逻辑推理…………………………（49）
　§1　命题代数………………………………………（49）
　§2　蕴涵……………………………………………（52）
　§3　真值函数………………………………………（56）
　§4　等值……………………………………………（59）
　§5　重言式…………………………………………（61）
　§6　推理的形式结构…………………………………（64）
　§7　命题演算的出发点………………………………（69）

§8 定理的推演……………………………………（74）
§9 求否定规则、对偶规则………………………（84）
§10 命题演算的完全性……………………………（86）
§11 公理系统的独立性……………………………（90）
§12 命题演算的一致性……………………………（93）
习题三 ……………………………………………（95）
第四章 开关代数…………………………………（100）
§1 开关与开关代数…………………………………（100）
§2 各种进位制………………………………………（107）
§3 各种进位制数之间的转换………………………（117）
§4 开关函数…………………………………………（128）
§5 开关函数的完全性与标准形式…………………（130）
§6 公式化简法………………………………………（131）
§7 从范式出发化简开关函数的一般方法……（135）
§8 用卡诺（karnangh）图化简开关函数…（157）
§9 根据给定条件实现开关函数…………………（166）
§10 线路的设计……………………………………（175）
§11 具有“约束”的开关函数的化简……………（187）
习题四 ……………………………………………（193）
第五章 真值方程…………………………………（203）
§1 基本概念…………………………………………（203）
§2 真值方程…………………………………………（212）
习题五 ……………………………………………（223）
第六章 格…………………………………………（227）
§1 关系………………………………………………（227）
§2 有序集……………………………………………（229）

§3　链…………………………………………（231）
§4　上界与下界……………………………………（232）
§5　格…………………………………………（234）
§6　布尔代数……………………………………（239）
*§7　理想………………………………………（241）
习题六　…………………………………………（245）

第一章　集合代数

§1　集合的概念

一．集合的概念

1．集合的概念

集合是近代数学最基本的概念之一，不好下定义而只能描述：

我们把具有某一共同特征的一类事物的全体叫做集合，简称集．而把组成集合的每一个事物叫做集合的元素．

习惯上，常用大写字母A，B，C，…表示集合，而用小写字母a，b，c，…表示元素．

2．集合的表示法

（1）列举法

例1.1　以2，4，6，8为元素的集合可以记为：{2，4，6，8}或{4，6，2，8}、{4，8，6，2}等等．

（2）描述法

例1.2　{绝对值小于3的所有整数}

除了用话语描述元素特征外，还可以用数学式子来表示．设p(x)是某一与x有关的条件，所有适合这一条件的x所构成的集可用 $A=\{x: p(x)\}$ 或 $A=\{x|p(x)\}$ 表示．

例1.3　满足方程 $x^2-1=0$ 的一切x所组成的集合，可以表示为：

$$A=\{x|x^2-1=0\}$$

或$A=\{x:x^2-1=0\}$。

3．有限集和无限集

若集合p的元素个数是有穷个，则称为有穷集合；否则称集合p为无穷集合。

例如：$M=\{x|x^2-3x-4>0\}$为无穷集合。

$A=\{x|x^2-3x+2=0\}$为有穷集合。

4．空集

空集或零集是表示任何元素都没有的集合，记作0或ϕ。

例如：常德师专数学科全体少先队员的集合．这就是空集。莫以为空集完全是虚构．但凭集合元素的意义，有时并不知道这样的元素到底存不存在．例如，我们的祖先早已知道$3^2+4^2=5^2$，但是能使方程$x^{n+2}+y^{n+2}=z^{n+2}$对自然数x，y，z可解的自然数n的集是否是空集，至今无人能作出结论．这就是有名的Fermat命题．由此可见，建立空集的概念是必要的．因为宣布某集合为空集则表示人们对某一事物的认识．

但$A=\{x|x^2=0\}=\{0\}$并不是空集．因为它是由一个元素0所构成。

二．集合与元素间的关系

若a是集合A的元素，就说a属于A，记为$a\in A$。$\in$读作："属于"．

若b不是集合A的元素，就说b不属于A，记为$b\overline{\in}A$或$b\notin A$。$\overline{\in}$或$\notin$读作"不属于"．

任意一个元素对于一个集合来说，或者是集合的元素或者不是集合的元素，二者必居其一，且只居其一．

三、集合与集合间的关系

设A，B为两个集，a，b分别为A，B的元，则关于一个集的元素是否也属于另一个集的回答有且只有如下四种情形：

(1)每个$a\in B$，每个$b\in A$；

(2)每个$a\in B$，并非每个$b\in A$；

(3)并非每个$a\in B$，每个$b\in A$；

(4)并非每个$a\in B$，并非每个$b\in A$。

第一种情形，即两集的元素相同，我们就说，两集相等，记作$A=B$。

第二种情形和第三种情形实质上是相同的。第四种情形最常见，不需特别记号。

第二种情形说明集合A中的每个元素都属于B，但集合B中的元素并不全部属于A。也就是说集合A被集合B包含，或者说集合B包含集合A。用图形来表示有如图1.1〔称为文氏图（Uenn's diagram）〕。

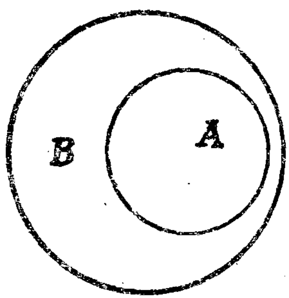


图1.1

于情形(1)，(2)叫集合A做B的子集。即有定义：

设A，B是两个集合，若A的每个元素都是B的元素，则说A是B的子集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，读作A包含于B或B包含A。

有没有一个集合它包含每一个集合呢？也就是说，有没有一个集合它以每一集合为其子集合呢？这个集合必以每一个集合的元素为其元素，也就是这个集合的元素穷尽了世界上的一切

事物．根据多方研究，无条件地以一切集合为其子集的集合是不存在的．但以一定范围的各个集合为其子集的集合是存在的．这个集合叫做该范围的全集，并记为1．严格地说，如果讨论的范围不同，则全集1也是不相同的，须使用不同的记号．但当讨论范围确定以后，相应的全集只有一个．所以，只使用1就可以了，无须加以区别．

任意集合p是全集合1的子集合，即$p\subseteq 1$。

任意两个集合不一定有包含关系．例如，A是某班少先队员的集合，B是长毛绿眼猫的集合，这两个集合就没有包含关系．

定理1　对于任意的集A，B，C，

（1）　$A\subseteq A$；

（2）　$0\subseteq A$；

（3）若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$．

证明　（1）由子集定义知，任意集都是它自己的子集，即$A\subseteq A$．

（2）因$B\subseteq A$的意义是：若$a\in B$，则$a\in A$．此命题的等价命题是若$a\overline{\in}A$，则$a\overline{\in}B$．

设$B=0$，故要证$0\subseteq A$，只要证：若$a\overline{\in}A$，则$a\overline{\in}0$即可．事实上，若$a\overline{\in}A$，因0是空集，当然$a\overline{\in}0$。所以，$0\subseteq A$．

（3）若$A=0$，结论显然成立．

现设$A\neq 0$．

任取$a\in A$，$\because A\subseteq B$，$\therefore a\in B$．

又$\because B\subseteq C$，$\therefore a\in C$，

$\therefore A\subseteq C$．　▮

定理2　$A=B$的充要条件是$A\subseteq B$且$B\subseteq A$。

证明　1.必要性

$\because A\subseteq A$，而$A=B$，$\therefore A\subseteq B$。

同理有$B\subseteq A$。

2.充分性

反设$A\neq B$。这只有下列两种情形：

(1)要么A中至少有一元素$a\overline{\in}B$，

$\because A\subseteq B$，由$a\in A$，得$a\in B$，与$a\overline{\in}B$矛盾。

(2)要么B中至少有一元素$b\overline{\in}A$，

$\because B\subseteq A$，由$b\in B$，得$b\in A$，与$b\overline{\in}A$矛盾。

既然(1)，(2)的假设都不成立，故A与B所含元数完全相同，即$A=B$。　∎

若集合A是集合B的子集合，且B里至少有一个元素不属于A，就说集合A是集合B的真子集合，或者说B真包含A。记作$A\subset B$或$B\supset A$。

比如说，自然数集合A和整数集合B，显然A是B的子集合。B中存在元素不属于A，例如-2，故自然数集合A是整数集合B的真子集合。

若集合A里至少有一个元素a不属于B，则说A不是B的子集合，或者说B不包含A，记作$A\not\subset B$或$B\not\supset A$，读作“A不包含于B”或“B不包含A”。

集合A不是集合B的子集合有下列两种情形：

1、集合A中没有一个元素是属于集合B的

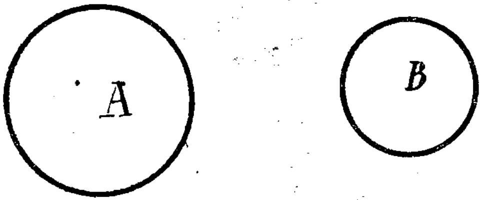
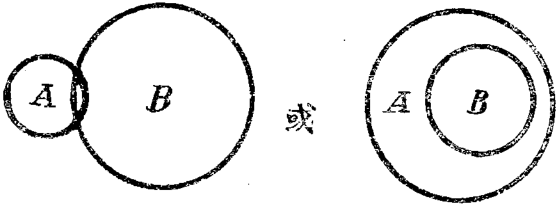


图 1.2

2、集合A中有一部分元素属于B，有另一部分元素不属于B


Ⅰ 图 1.3 Ⅱ

集合A不是集合B的子集合，并不排斥集合B是集合A的子集合，有如图1·3（Ⅱ）所示。

最后提醒读者注意：

1.符号“∈”和“⊆”是有区别的。“∈”是表示从属关系，即表示集的元素与集的本身的关系。在符号“∈”的左边是写集的元素，而在它的右边是写集．而符号“⊆”是表示包含关系，即表集与集之间的关系，它的两边都应写集。

2．符号“∈”、“＝”、“⊆”所表示的意义各不相

同。但日常用语往往不加区别。

例如：李明是大学生。

白马是马。

偶质数全体所成的集是$\{2\}$。

三句话中的“是”含义各不相同，它们分别为$\in$，$\subseteq$及$=$。故在研究集合时，应注意避免混淆。

§2．集合的并、交、补运算

一．集合的并、交、补运算

1．并集

属于集A或属于集B的所有元素所组成的集，叫做A与B的并集。或者说A的元素与B的元素的全体构成的集叫做A与B的并集，也有叫和集的。记为$A\cup B$（或$A+B$），读作A并B。

求并集的运算称作并运算。

由定义知，当$x\in A\cup B$时，x或属于A，或属于B（不排斥x同时属于A，B二集）。

推而广之，有n个集的并集的定义：

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup An=\{x\mid x\in A_1$，或$x\in A_2$，或…或$x\in An\}$。

2．交集

属于集A且属于集B的所有元素所组成的集合叫做A与B的交集。记为$A\cap B$（或$A\cdot B$，AB）。

推而广之，有n个集的交集的定义：

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap An=\{x\mid x\in A_1$，且$x\in A_2$，且…且$x\in An\}$。

3．补集

从全集1中去掉A的所有元素，剩余下来的元素构成的集叫做集A的补集（或余集），简称补（或余），记为$\bar{A}$.

由定义知，$\bar{A}$的元素不属于A，但属于1.所以$\bar{A}$可写成：

$\bar{A}=\{x \mid x \overline{\in} A,\ 但x \in 1\}$.

二．集合运算的规律

1．交换律

$$A \cup B = B \cup A，\quad A \cup B = B \cup A$$

显然等式成立。

2．结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

事实上，$A \cup (B \cup C)$是由属于A或属于B或属于C的元素组成，而$(A \cup B) \cup C$也是这样，因而它们表示同一个集合。

交的结合律也是很明显的．因为$A \cap (B \cap C)$是由A，B，C的公共元素所组成的集，它与$(A \cap B) \cap C$同是一个集合。

根据结合律，可记：

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C,$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

推论1）　n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$的并集与括号的添法无关。

2）　n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$的交集与括号的添法无关。

3．分配律

1. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

2. $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

证明　(1)任取$a\in(A\cup B)\cap C$,

则$a\in A\cup B$且$a\in C$,

即$a\in A$或$a\in B$且$a\in C$.

若$a\in A$又$a\in C$,则$a\in A\cap C$.

于是,$a\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

若$a\in B$,又$a\in C$,则$a\in B\cap C$.

于是,$a\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

因此,$(A\cup B)\cap C\subseteq(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

仿此,可证

$(A\cup B)\cap C\supseteq(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

故$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cup C)$. ■

(2)其证明留给读者.

4. 0—1律

对于任意集合A,有

(1)$A\cup 0=A$, $A\cup 1=1$, $A\cup A=A$;

(2)$A\cap 0=0$, $A\cap 1=A$, $A\cap A=A$.

其证明留给读者.

5. 互补律

(1)$A\cap\bar{A}=0$,

(2)$A\cup\bar{A}=1$.

证明　(1)若$A\cap\bar{A}\neq 0$,则有$x\in A\cap\bar{A}$,

从而$x\in A$且$x\in\bar{A}$,

但这是不可能的.因$\bar{A}$的元素不属于A,故$A\cap\bar{A}=0$. ■

(2)其证明留给读者.

6．吸收律

(1) $A\cup(A\cap B)=A$,

(2) $A\cap(A\cup B)=A$.

证明　(1) $A\cup(A\cap B)=(A\cap 1)\cup(A\cap B)$

$$=A\cap(1\cup B)$$

$$=A\cap 1$$

$$=A. \qquad \blacksquare$$

(2)其证明留给读者。

7．若有 $A\cup B=1$，$A\cap C=0$，则 $B=C\cup B$.

证明　$B=0\cup B=(A\cap C)\cup B$

$$=(A\cup B)\cap(C\cup B)$$

$$1\cap(C\cup B)=C\cup B. \qquad \blacksquare$$

8．若 $A\cup B=1$，$A\cap B=0$，则 $B=\bar{A}$.

证明　由 $A\cup B=1$ 及 $A\cap\bar{A}=0$，根据7推得

$$B=\bar{A}\cup B.$$

由 $A\cup\bar{A}=1$ 及 $A\cap B=0$，根据7推得

$$\bar{A}=B\cup\bar{A}.$$

故 $B=\bar{A}\cup B=B\cup\bar{A}=\bar{A}$. $\blacksquare$

9．反演律——德·摩根(De morgan)定理

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\ \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

证明　$(A\cup B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})$

$$=[(A\cup B)\cup\bar{A}]\cap[(A\cup B)\cup\bar{B}]$$

$$=[(A\cup\bar{A})\cup B]\cap[(B\cup\bar{B})\cup A]$$

$$=(1\cup B)\cap(1\cup A)$$

$$=1. \qquad (1)$$

$(A\cup B)\cap(\bar{A}\cap\bar{B})$

$$= [A\cap(\bar{A}\cap\bar{B})]\cup[B\cap(\bar{A}\cap\bar{B})]$$
$$= [(A\cap\bar{A})\cap\bar{B}]\cup[(B\cap\bar{B})\cap\bar{A}]$$
$$= (0\cap\bar{B})\cup(0\cap\bar{A})$$
$$= 0. \qquad (2)$$

由(1)、(2)根据8得$\bar{A}\cap\bar{B}=\overline{A\cup B}$。

$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$留给读者证明。

推论：(1) $\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n$，简 记为$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i$，

(2) $\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_n$，简记为$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i$。

§3. 包含

定理1　$A\subseteq B$的充要条件是$A\cup B=B$。

证明　　充分性

若$A\cup B=B$，则A的元素都是B的元素，故$A\subseteq B$。

必要性

由子集的定义，若$A\subseteq B$，则A的元素都是B的元素。因而$A\cup B$的元素，按照并的定义，与B的元素完全相同。故$A\cup B=B$。 ▮

定理2　$A\cup B=B$的充要条件是$A\cap B=A$。

证明　　必要性

若$A\cup B=B$，则$A\cap B=A\cap(A\cup B)=A$。

充分性

若$A\cap B=A$，则$A\cap B=(A\cap B)\cup B=B$。 ▮

根据定理1和定理2，有$A\subseteq B$的充要条件是$A\cap B=A$。