应用型本科数理类基础课程系列教材

线性代数

主编　毛立新　戚美新

科学出版社
www.sciencep.com

应用型本科数理类基础课程系列教材

线性代数

主　编　毛立新　咸美新

副主编　吴业军　双冠成　杨芝艳

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书涵盖了教育部制定的大学本科线性代数的教学基本要求的内容. 全书共分 5 章,分别为行列式,矩阵,向量组的线性相关性与线性方程组的解法,特征值、特征向量与二次型,线性空间与线性变换. 全书内容深入浅出,层次简洁,注重应用. 每章后配有适量习题并按难易程度分类,并在书后附有习题参考答案或提示.

本书可供普通高等院校理工、经济管理等非数学专业的学生使用,也可供自学者及有关教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/毛立新,咸美新主编. —北京:科学出版社,2010
(应用型本科数理类基础课程系列教材)
ISBN 978-7-03-028171-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①毛… ②咸… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 123791 号

责任编辑:刘俊来 姚莉丽 唐保军 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2010 年 7 月第一次印刷 印张:9 3/4
印数:1—6 000 字数:190 000

定价: 19.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　　言

线性代数是理工、经济管理等专业的大学生的一门重要的数学基础课程，是学生学习后续课程的基本工具. 近年来，随着我国的高等教育由精英教育转化为大众化教育，一大批应用型本科院校应运而生. 为了适应这一层次本科院校的人才培养目标，我们总结了多年来线性代数课程教学的经验，编写了本书.

本书涵盖了教育部制定的大学本科线性代数的教学基本要求的内容. 主要内容有：行列式，矩阵，向量组的线性相关性与线性方程组的解法，特征值、特征向量与二次型，线性空间与线性变换.

本书有如下几个方面的特点：

(1) 贯彻“强化概念，淡化理论，加强训练，学以致用”的原则，突出应用性，努力使学生学会应用数学思想、概念和方法去处理工程实践和经济管理中遇到的实际问题. 例如，前四章中通过增设“应用举例”这一节，选取一些实际问题中生动有趣的例子，让学生对线性代数应用的广泛性有所了解，学会将抽象的概念与具体的对象联系起来，并最终解决实际问题.

(2) 强调内容的实际背景与几何直观阐述，对基本概念的引入尽量采用启发式，力求理论推导简单明了，突出重点，分散难点，尤其对一些难度较大的定理略去了证明，另外在每一章的末尾附加了阅读小资料，以便读者了解相关知识的历史背景与来龙去脉，同时也能激发读者学习的兴趣.

(3) 每章后配有精选的习题，书末附答案或提示. 习题分为 A、B 两个层次：A 层次为基本题，供教师布置作业用；B 层次为综合引申题，有一定难度，供学有余力的学生选做.

本书的教学时数不得低于 32 学时. 如讲解加“ * ”号内容，则需增加课时. 本书可供应用型本科院校工科、经济管理等非数学专业使用.

本书共 5 章，编写分工如下：第 1 章由咸美新编写；第 2 章由杨芝艳编写；第 3 章由吴业军编写；第 4 章由双冠成编写；第 5 章由毛立新编写. 全书由毛立新和咸美新负责统稿. 在编写过程中，南京工程学院广大数学教师对本书的编写提出了不少有益的建议，南京大学丁南庆教授仔细审阅了本书，并提出了许多宝贵意见；科学出版社对此书出版给予了大力的支持. 编者在此一并表示由衷的感谢.

限于编者水平，疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2010 年 2 月于南京

目　录

第 1 章

行　列　式

行列式是一种特定的算式，它是研究线性代数的一个基本工具. 本章主要介绍行列式的定义、性质及其计算等内容. 此外还要介绍用 n 阶行列式求解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶和三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

对于一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

利用消元法，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

从二元线性方程组解的形式可以发现，如果引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1.3}$$

则(1.1.2)式可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

从而，二元线性方程组的解简洁明了.

定义 1.1 由 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 四个数构成的两行、两列的式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**，其值定义为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

在二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中，$a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为这个行列式的第 i 行第 j 列的**元素**，元素 a_{ij} 的第 1 个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第 2 个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1.1

上述二阶行列式的定义，可用图 1.1 来记忆.

把 a_{11} 到 a_{22} 的实联线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚联线称为**副对角线**，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差. 这一计算行列式的方法称为**对角线法则**.

利用二阶行列式的定义，若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21},$$

则(1.1.2)式可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.1.4}$$

需要注意的是：

(1) 这里的分母 D 是由二元线性方程组(1.1.1)的系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

(2) 公式(1.1.4)用行列式解线性方程组(1.1.1)的方法称为**克拉默法则**. 以后还要介绍 n 元线性方程组的克拉默法则.

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0, \\ 3x_1+4x_2=1. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0,$$

又因

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-2, \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{2}.$$

1.1.2 三阶行列式

定义 1.2 由 $3\times3=9$ 个数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,3)$ 排成 3 行 3 列的式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 称为**三阶行列式**,其值定义为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.1.5}$$

由(1.1.5)可知,三阶行列式共有 6 项. 每项均为不同行不同列的 3 个元素的乘积,其中 3 项的前面为正号,另外 3 项的前面为负号,可以用图 1.2 所示的对角线法则记忆:图 1.2 中每一条实线上的 3 个元素的乘积带正号,而每一条虚线上的 3 个元素的乘积带负号,所得 6 项的代数和就是三阶行列式的值.

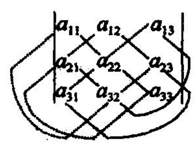

图 1.2

例 1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$D=1\times2\times1+1\times(-1)\times1+0\times3\times3-1\times2\times3-1\times3\times1-0\times(-1)\times1$$
$$=-8.$$

需要注意的是:对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,但对四阶及更高阶的行列式不适用.

为研究更高阶的行列式,先考察二阶和三阶行列式的关系.

1.1.3 二阶和三阶行列式的关系

由二阶和三阶行列式的定义,可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

由上式可以看到,三阶行列式等于它的第1行的每个元素分别乘以一个二阶行列式的代数和.为了进一步了解这3个二阶行列式与原来的三阶行列式的关系,下面引入余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 中,把元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$所在的第 i 行和第 j 列划去后,剩下来的元素按原来位置顺序构成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij},称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**,记作 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}(i,j=1,2,3)$.例如,在三阶行列式 D 中,元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是指:在 D 中把元素 a_{12} 所在的第1行和第2列划去后,剩下来的元素按原来位置顺序构成的二阶行列式,即 $M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$,而元素 a_{12} 的代数余子式为 $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{ij}=-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$.

应用代数余子式,三阶行列式可写成 $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$,即表明三阶行列式等于它的第1行的每个元素与其对应的代数余子式乘积之和.这个表达式也称为三阶行列式按第1行展开的**展开式**.

例 1.3 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0\\-1&2&3\\2&4&1\end{vmatrix}.$$

解 按行列式第1行展开,得

$$D=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&3\\4&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&3\\2&1\end{vmatrix}=1\cdot(-10)+2\cdot7=4.$$

行列式按第 1 行展开的结果可以推广为如下定理.

定理 1.1 三阶行列式等于它的任一行(列)的 3 个元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik},\quad i=1,2,3; \tag{1.1.7}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj},\quad j=1,2,3. \tag{1.1.8}$$

证明 只证(1.1.8)式中 $j=2$ 的情况,其他情况可类似证明.

$$\begin{aligned}
D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\
&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\\
&=-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})\\
&=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\
&=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}.
\end{aligned}$$

此定理称为**行列式按行(列)的展开定理**,(1.1.7)式称为三阶行列式按第 i 行展开的**展开式**,(1.1.8)式称为三阶行列式按第 j 列展开的**展开式**.

如果定义一阶行列式 $D=|a_{11}|=a_{11}$(注意与数 a_{11} 的绝对值的区别),那么二阶行列式也有类似的展开式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2},\quad i=1,2,$$

或

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j},\quad j=1,2.$$

例 1.4 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix}.$$

解 由于第 2 列中有两个元素为零,故按行列式第 2 列展开较方便,有

$$D=4\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=(-4)\cdot(-1)=4.$$

1.2 n 阶行列式

类似二阶和三阶行列式的定义，下面用归纳法给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3 由 $n\times n$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 行 n 列的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，简记为 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$，规定其值为：

(1) 当 $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$；

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}, \tag{1.2.1}$$

其中

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j},$$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并称 M_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的**余子式**，A_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的**代数余子式**.

例 1.5 应用行列式定义计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由行列式的定义，得

$$\begin{aligned} D&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14} \\ &=1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+0-2\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &=1\times 1-0+0-2\times 4=-7. \end{aligned}$$

同三阶行列式类似，n阶行列式也有行列式按行(列)的展开定理.

定理 1.2 n阶行列式D等于它的任一行(列)元素与它们所对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n; \tag{1.2.2}$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{1.2.3}$$

定理的证明略.

需要注意的是：应用定理 1.2 可将高阶行列式化为较容易的低阶行列式计算.

例如，在例 1.5 中，由于第 4 行的零元素较多，所以按第 4 行展开行列式较方便，展开即得

$$D=1\times(-1)^{4+2}\times\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&1&0\\1&3&1\end{vmatrix}=-7.$$

这与按n阶行列式定义计算的结果是一致的.

例 1.6 计算n阶上三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 根据定理 1.2，考虑到D_n第 1 列元素除a_{11}外均为零，所以按第 1 列展开，得

$$D_n=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times M_{11}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\0&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

同样，对上式右端的$n-1$阶行列式按第 1 列展开，得

$$D_n=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}&\cdots&a_{3n}\\0&a_{44}&\cdots&a_{4n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

以此类推,得

$$D_n = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似地,n 阶下三角行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 特别地,$n$ 阶对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由 n 阶行列式的定义,可以得到

$$\begin{aligned} D_n &= a_{1n} \times (-1)^{1+n} \times M_{1n} \\ &= a_{1n} \times (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

注意到上式右端中余子式 M_{1n} 是 $n-1$ 阶行列式,而且有与 n 阶行列式 D_n 同样的形式,反复利用(n 阶)行列式定义,有

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{1+n} \cdot (-1)^{1+(n-1)} \cdots (-1)^{1+2} \cdot a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \end{aligned}$$

需要注意的是,这个 n 阶行列式 D_n 的值并不总等于 $-a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

1.3 行列式的性质

由行列式的定义可知，当行列式阶数 n 较大时，直接用定义计算行列式是较为繁琐的.下面介绍行列式的一些性质，以简化行列式的计算.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将行列式 D 的各行与同序数的列互换，所得到的新行列式称为行列式 D 的**转置行列式**，记作 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

证明 对行列式的阶数作数学归纳法.

(1) 当 $n=2$ 时，命题显然成立；

(2) 现假设对 $n-1$ 阶行列式命题成立，下证对 n 阶行列式命题也成立.

事实上，若将 D 和 D^{T} 分别按第 1 行和第 1 列元素展开，有

$$D=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot(-1)^{1+k}M_{1k}, \tag{1.3.1}$$

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}B_{k1}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot(-1)^{k+1}N_{k1}, \tag{1.3.2}$$

其中 A_{1k}，M_{1k} 是 D 的第 1 行元素的代数余子式和余子式；B_{k1}，N_{k1} 是 D^{T} 的第 1 列元素的代数余子式和余子式.

由于 M_{1k}，N_{k1} 都是 $n-1$ 阶行列式，而且显然可看出 N_{k1} 是 M_{1k} 的转置行列式，由归纳法假设知 $N_{k1}=M_{1k}(k=1,2,\cdots,n)$ 成立，从而由(1.3.1)和(1.3.2)式得 $D=D^{\mathrm{T}}$，即命题对 n 阶行列式也成立.

综合上述，命题得证.

需要注意的是，行列式中行与列有相同的地位，即行列式关于行成立的性质对于列也同样成立，反之亦然.

性质 1.2 互换行列式中两行(列),行列式变号.

证明 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \end{array}.$$

互换第 i 行与 j 行($1\leqslant i,j\leqslant n, i\neq j$)得

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \end{array}.$$

下面用数学归纳法证明 $\overline{D}=-D$.

(1) 当 $n=2$ 时,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}.$$

显然 $\overline{D}=-D$.

(2) 假设对阶数小于 n 的行列式,结论都成立,下证对 $n(\geqslant 3)$ 阶行列式命题结论也成立.

注意到行列式 D 与 $\overline{D}$ 中除去第 i 行与第 j 行的位置互换外,其余各行均相同.取定一个 $k(k\neq i,j)$,并将行列式 D 与 $\overline{D}$ 都按第 k 行展开,得到

$$D=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{kl}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\cdot(-1)^{k+l}M_{kl}, \tag{1.3.3}$$

$$\overline{D}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}B_{kl}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\cdot(-1)^{k+l}N_{kl}, \tag{1.3.4}$$

其中 A_{kl},M_{kl}是 D 的第 k 行元素的代数余子式和余子式;B_{kl},N_{kl}是 $\overline{D}$ 的第 k 行元素的代数余子式和余子式.

由于 M_{kl},N_{kl}都是 $n-1$ 阶行列式,而且 N_{kl}与 M_{kl}除去两行的元素互换外,其余各行都相同,由归纳法假设知 $N_{kl}=-M_{kl}$ ($l=1,2,\cdots,n$)成立,从而由(1.3.3)