

高等学校教材

高等数学教程

下册

主 编 李继彬
副主编 蔡光程 戴 琳 李庶民



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学教程

Gaodeng Shuxue Jiaocheng

下 册

主编 李继彬

副主编 蔡光程 戴 琳 李庶民



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书根据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成,分为上、下两册。下册内容包括:多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、积分学的应用、常微分方程基础与数学建模简介、高等数学实验与数学建模实践。书后附习题参考答案。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材使用,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程. 下册 / 李继彬主编. —北京: 高等教育出版社, 2010.3
ISBN 978-7-04-029460-6

I. ①高… II. ①李… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 027233 号

策划编辑 杨帆 责任编辑 杨帆 封面设计 张志
版式设计 马敬茹 责任校对 金辉 责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	中青印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2010 年 3 月第 1 版
印 张	17.5	印 次	2010 年 3 月第 1 次印刷
字 数	320 000	定 价	19.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29460-00

目 录

第七章 多元函数微分学	1
第一节 多元函数的基本概念	1
一、平面点集及 n 维空间的点集	1
二、多元函数概念	4
三、多元函数的极限	6
四、多元函数的连续性	7
习题 7-1	9
第二节 偏导数	10
一、偏导数的定义及其计算	10
二、高阶偏导数	13
习题 7-2	15
第三节 全微分	16
一、函数可微及全微分的定义	16
二、全微分在近似计算中的应用	19
习题 7-3	20
第四节 多元复合函数的求导法则	21
一、一个中间变量,多个自变量情形	21
二、多个中间变量,一个自变量情形	21
三、多个中间变量及多个自变量情形	22
习题 7-4	26
第五节 隐函数的求导公式	27
一、一个方程的情形	27
二、方程组的情形	30
习题 7-5	33
第六节 多元函数微分学的几何应用	34
一、空间曲线的切线与法平面	34
二、空间曲面的切平面与法线	36
习题 7-6	39

第七节 方向导数与梯度	40
一、方向导数	40
二、梯度	41
习题 7-7	42
第八节 多元函数的极值	43
一、多元函数的极大值和极小值	43
二、多元函数的最大值和最小值	46
三、条件极值和拉格朗日乘数法	48
习题 7-8	52
第九节 二元函数的泰勒公式	53
一、二元函数的泰勒公式	53
二、二元函数极值充分条件的证明	55
习题 7-9	56
总习题七	56
第八章 重积分	58
第一节 定积分的元素法	58
第二节 二重积分的概念与性质	59
一、二重积分的概念	59
二、二重积分的性质	62
习题 8-2	64
第三节 利用直角坐标计算二重积分	64
习题 8-3	73
第四节 利用极坐标计算二重积分	74
一、二重积分的极坐标计算公式	74
二、极坐标下的二重积分计算法	75
习题 8-4	79
第五节 三重积分及其在直角坐标系下的计算方法	80
一、三重积分的定义	80
二、空间直角坐标系下三重积分的计算方法	81
习题 8-5	86
第六节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	87
一、利用柱面坐标计算三重积分	87
二、利用球面坐标计算三重积分	91
习题 8-6	95
总习题八	96

第九章 曲线积分与曲面积分	98
第一节 对弧长的曲线积分	98
一、对弧长的曲线积分的概念与性质	98
二、对弧长的曲线积分的计算法	100
习题 9-1	102
第二节 对坐标的曲线积分	103
一、对坐标的曲线积分的概念与性质	103
二、对坐标的曲线积分的计算法	105
三、两类曲线积分之间的联系	108
习题 9-2	109
第三节 格林公式及其应用	110
一、格林公式	110
二、平面上的曲线积分与路径无关的条件	115
三、二元函数的全微分求积	117
习题 9-3	120
第四节 对面积的曲面积分	121
一、对面积的曲面积分的概念与性质	121
二、对面积的曲面积分的计算法	122
习题 9-4	125
第五节 对坐标的曲面积分	126
一、有向曲面	126
二、对坐标的曲面积分的概念与性质	127
三、对坐标的曲面积分的计算法	129
四、两类曲面积分之间的关系	132
习题 9-5	134
第六节 高斯公式和斯托克斯公式	134
一、高斯公式	134
二、斯托克斯公式	138
三、空间曲线积分与路径无关的条件	141
习题 9-6	142
第七节 场论初步	143
一、数量场与向量场	143
二、向量场的通量和散度	144
三、向量场的环流量与旋度	144
习题 9-7	146

总习题九	146
第十章 积分学的应用	150
第一节 积分学在几何上的应用	150
一、平面图形和空间曲面的面积	150
二、空间立体的体积	157
三、曲线的弧长	161
习题 10-1	162
第二节 积分学在物理上的应用	164
一、液体的压力	164
二、变力所作的功	165
三、引力	167
四、质量	168
五、重心	168
六、转动惯量	171
习题 10-2	174
总习题十	175
第十一章 常微分方程基础与数学建模简介	177
第一节 微分方程的基本概念	177
一、引例	177
二、基本概念	178
三、更多的实际问题	181
习题 11-1	183
第二节 一阶微分方程	184
一、变量可分离方程	184
二、齐次方程	185
三、可化为齐次方程的微分方程	187
四、一阶线性微分方程	188
五、全微分方程	192
习题 11-2	194
第三节 可降阶的高阶微分方程	196
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	196
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	197
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	199
习题 11-3	199

第四节 高阶线性微分方程	200
一、高阶线性微分方程的概念及例子	200
二、二阶线性微分方程通解的结构	201
三、常数变易法	205
习题 11-4	206
第五节 常系数线性微分方程	206
一、二阶常系数齐次线性微分方程	207
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	210
习题 11-5	215
第六节 数学建模与微分方程应用简介	216
一、数学模型简介	217
二、微分方程应用之一——人口增长的数学模型	218
三、微分方程应用之二——传染病传播的数学模型	220
总习题十一	222
第十二章 高等数学实验与数学建模实践	224
第一节 MATLAB 简介	224
一、MATLAB 的功能	224
二、MATLAB 的特点	225
三、MATLAB 基础知识	227
四、数据可视化	232
五、MATLAB 编程及 m 文件	234
第二节 高等数学实验	235
一、空间函数曲线与曲面图形的绘制	235
二、一元函数的极限、求导与积分	239
三、无穷级数	242
四、多元函数微积分	243
五、微分方程	247
第三节 用 MATLAB 进行数学模型实践	248
一、导弹追踪问题	249
二、捕食者—食饵(Predator-Prey)模型	253
下册习题答案	257
参考文献	270

第七章 多元函数微分学

在以前各章中讨论的函数都只有一个自变量,这种函数称为一元函数.从本章开始,我们将讨论具有两个或两个以上自变量的函数,即多元函数.在上册中我们主要讨论一元函数的微积分.本章讨论多元函数微分学及其应用.我们将以二元函数为主进行讨论,对于一般多元函数的类似内容,只进行简单讨论.

第一节 多元函数的基本概念

一、平面点集及 n 维空间的点集

在讨论一元函数时,已经涉及直线上的点集,如点的邻域以及区间等概念.同样地,在讨论多元函数时,我们需要用平面上和 n 维空间中的点集,点的邻域以及区域等概念.

1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质的点的集合,称为平面点集.例如下面两个点集

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}, \quad B = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

其中 A 是以原点 $O(0, 0)$ 为中心, r 为半径的圆内所有点的集合. 如果以 P 表示点 (x, y) , $|OP|$ 表示点 P 到原点的距离, 则点集 A 可表示为 $A = \{P \mid |OP| < r\}$. 点集 B 是对应边平行于坐标轴的矩形内(包括边界)所有点的集合, 可记为 $B = [a, b] \times [c, d]$, 称为两线段 $[a, b]$ 与 $[c, d]$ 的笛卡儿积.

(1) 点的邻域

在平面上, 以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心, $\delta > 0$ 为半径的圆内所有点 $P(x, y)$ 所成的点集, 称为点 P_0 的 δ 邻域, 记作 $U(P_0, \delta)$, 即

$$\begin{aligned} U(P_0, \delta) &= \{P \mid |P_0P| < \delta\} \\ &= \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}. \end{aligned}$$

在 P_0 的 δ 邻域中去掉中心点 P_0 后的点集, 称为 P_0 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(P_0, \delta)$, 即

$$\dot{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |P_0P| < \delta\}.$$

如果不需要强调邻域半径 δ 的大小, 则可用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域, 而用 $\dot{U}(P_0)$ 表示 P_0 的某个去心邻域.

(2) 点集的内点、边界点及聚点

设 E 为一个平面点集, 则平面上的一个点 P 与点集 E 的位置关系可能有以下(a), (b), (c), (d)三种情况.

(a) E 的内点

如果存在点 P 的一个邻域 $U(P)$, 使得

$$U(P) \subset E,$$

则称点 P 是点集 E 的内点.

如图 7-1 中, E 表示曲线所围内部的点集, 则 P_1 是 E 的内点.

由定义可见, 要使 P 成为 E 的内点, 不仅 P 本身要属于 E , 而且还要有 P 的一个邻域 $U(P)$, 使得整个邻域的点都属于 E .

(b) E 的外点

如果存在点 P 的一个邻域 $U(P)$, 使得 $U(P)$ 中不含 E 的点, 则称点 P 是点集 E 的外点.

如图 7-1 中, P_2 是 E 的外点.

(c) E 的边界点

如果点 P 的每一个邻域 $U(P)$ 内既有属于 E 的点, 又有不属于 E 的点, 则称点 P 为点集 E 的边界点.

如图 7-1 中, 点 P_3 为点集 E 的边界点.

注意: 点集 E 的边界点 P 可能属于 E , 也可能不属于 E .

E 的所有边界点的全体所组成的点集, 称为 E 的边界, 记作 ∂E .

下面我们再根据点 P 与点集 E 相联系的密切程度, 定义点集 E 的聚点概念.

(d) E 的聚点

如果点 P 的每一个邻域 $U(P)$ 内都含有无穷多个属于 E 的点, 则称点 P 为点集 E 的聚点.

E 的内点必是 E 的聚点, E 的边界点可能是 E 的聚点, 也可能不是 E 的聚点.

E 的全部聚点所成的点集称为 E 的导集, 记作 E' .

例如, 设平面点集

$$E = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\},$$

则满足 $1 < x^2 + y^2 < 2$ 的点 (x, y) 都是 E 的内点; 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点 (x, y) 都是 E 的边界点, 它们都不属于 E ; 而圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 上的点 (x, y) 也是 E 的边界点, 它们都属于 E . E 的边界为

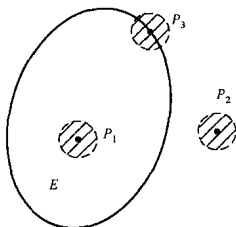


图 7-1

$$\partial E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 2\}.$$

E 的导集为

$$E' = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

(3) 开集、闭集及区域

如果点集 E 的每一个点都是 E 的内点, 则称 E 为开集. 如果 E 的聚点都是 E 的点, 即 $E' \subset E$, 则称 E 为闭集.

例如, 考察下面四个平面点集

$$A_1 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}; A_2 = \{(x, y) \mid x \neq 0, y \neq 0\};$$

$$A_3 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}; A_4 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\};$$

则 A_1, A_2 都是开集, A_3 是闭集, A_4 既非开集也非闭集. 没有聚点的点集是闭集. 空集 $\emptyset$ 及全平面 $\mathbf{R}^2$ 既是开集也是闭集.

如果点集 G 是开集, 并具有连通性, 即开集 G 中任意两点, 都可以用一条完全落在 G 中的折线 (即一组完全落在 G 中的首尾相接的直线段) 相连接, 则称 G 为区域 (或开区域).

由定义可见, 区域指的是开区域, 它是连通开集, 不具有连通性的开集不能称为区域. 例如前面的点集 A_1 是区域, A_2 只是开集而不是区域, 因为它不具有连通性, 例如 A_2 中的点 $P_1(1, 1)$ 与点 $P_2(-1, 1)$ 就不能用完全位于 A_2 内部的折线相连接, 因为任何与 P_1, P_2 相连接的折线必与 y 轴相交, 而交点是不属于 A_2 的点. A_2 可以看成是由四个区域并成的开集.

开区域以及它的边界上的所有点所构成的点集称为闭区域. 例如前面的点集 A_3 就是闭区域.

全平面 $\mathbf{R}^2$ 既是开区域, 也是闭区域.

对于点集 E , 如果存在正数 r , 使得对于任意 $(x, y) \in E$, 都有 $\sqrt{x^2 + y^2} < r$ 即 $E \subset U(O, r)$, 其中 O 为坐标系的原点, 则称 E 为有界集. 不是有界集的点集称为无界集.

例如点集 $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ 是有界闭区域, 点集 $\{(x, y) \mid x < y\}$ 是无界开区域, $\{(x, y) \mid x \leq y\}$ 是无界闭区域.

2. n 维空间的点集

设 $\mathbf{R}$ 表示全体实数, 由 n 个实数组成的有序实数组 $(x_1, \dots, x_n)$ 的全体所构成的集合记作 $\mathbf{R}^n$, 即

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维空间, 其中的每个元素 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 称为 n 维空间中的点, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ 称为原点.

设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任何两点, $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的距离 $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 定义为

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

$\rho(x, y)$ 具有距离的以下性质:

(1) $\rho(x, y) \geq 0$, 当且仅当 $x = y$ 时, $\rho(x, y) = 0$;

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, δ 为正数, 则 n 维空间中的点集

$$U(a, \delta) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, \rho(x, a) < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域.

有了邻域的概念, 就可以像上面对于平面点集所述的那样, 定义 n 维空间中点集的内点、边界点及聚点等概念, 同样可以定义 n 维空间中的开集、闭集、开区域、闭区域、有界集与无界集等概念, 这里不再重述.

例如, 在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点常记作 $P(x, y, z)$, 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的 δ 邻域 $U(P_0, \delta)$ 是如下的点集

$$\begin{aligned} U(P_0, \delta) &= \{P \mid \rho(P, P_0) < \delta\} \\ &= \{(x, y, z) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta\}, \end{aligned}$$

这是以点 P_0 为中心, δ 为半径的球的内部的点组成的点集.

三维空间中, 点集

$$E_1 = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

是由圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的有界闭区域. 点集

$$E_2 = \{(x, y, z) \mid z > 0\} \text{ 及 } E_3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

都是无界点集, E_2 是无界开区域, E_3 是无界闭区域.

二、多元函数概念

在实际问题中, 经常会遇到一个变量与多个变量间的依赖关系, 举例如下.

例 1 矩形的面积 S 依赖于其长 x 和宽 y , 即

$$S = xy.$$

长、宽只能取正实数值, x, y 的取值范围构成一个平面点集 $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$, 给定每个数对 (x, y) 的值, 就可对应面积 S 的一个确定值.

例 2 两个并联的电阻 R_1, R_2 , 其总电阻 R 为

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

R_1, R_2 的变化范围为 $\{(R_1, R_2) \mid R_1 > 0, R_2 > 0\}$, 给定每一对电阻值 (R_1, R_2) , 就确定了总电阻 R 的值.

去掉上面例子中变量的实际含义, 以及变量间的具体对应关系, 就抽象出下

面二元函数的定义.

定义 1 设 D 是平面上的非空点集, D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射

$$f: D \rightarrow \mathbf{R}$$

称为定义在 D 上的二元函数, 记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(P), \quad P \in D,$$

其中点集 D 称为函数的定义域, x, y 称为自变量, z 称为因变量. 有时我们也说: z 是 x, y 的函数.

当自变量 (x, y) 取值为 (x_0, y_0) 时, 用记号 $f(x_0, y_0)$ 表示对应的 z 的函数值. 当 (x, y) 在 D 中变化时, $z = f(x, y)$ 所对应的一切函数值组成的实数集称为函数 f 的值域, 记为 $f(D)$, 即

$$f(D) = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

作为函数记号的字母 f , 可以根据实际需要随意选用其他字母. 例如 $z = \varphi(x, y)$, $z = z(x, y)$ 等都可用以表示 x, y 的二元函数.

关于二元函数的定义域, 如果不是讨论实际应用的函数, 而是讨论用表达式表达的函数时, 其定义域就是使表达式有意义的 x, y 的范围所组成的点集. 对这类函数, 它的定义域不再特别标出. 例如, 二元函数

$$z = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

的定义域就是由不等式 $0 \leq y < x$ 确定的平面点集 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y < x\}$.

在函数 $z = f(x, y)$ 的定义域 D 中任取一点 $P(x, y) \in D$, 对应的函数值为 $z = f(x, y)$, 这样的 x, y, z 的值确定三维空间中的一个点 $M(x, y, z)$, 当 P 在 D 中变化时, 点 M 就描绘出空间一个确定的点集

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

这个点集通常是一张曲面, 称为二元函数 $z = f(x, y)$ 的图像. (如图 7-2)

例如, 函数 $z = ax + by$ 的图像是一个平面, $z = x^2 + y^2$ 的图像是一个旋转抛物面, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的图像是一个半球面.

如果把定义 1 中的平面点集 D 换作 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 D , 则映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 就称为定义在 D 上的 n 元函数, 记为

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$$

或简记为

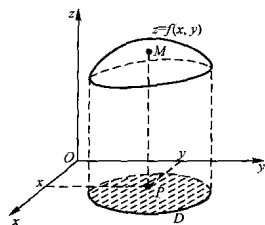


图 7-2

$$u = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

三维空间中,点的坐标通常用 x, y, z 表示,因此,三元函数常记作

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D.$$

三元函数的定义域 D 是空间中的点集,其函数图像已不能在三维空间中直观地描述.当 $n \geq 4$ 时, n 元函数的定义域及图像亦如此,但我们仍然可以说: n 元函数的定义域为 n 维空间的点集,其图像是 $n+1$ 维空间中的超曲面.

多元函数的四则运算与一元函数情形类似,这里不再重述.

例 3 设 $f(x, y) = x \sin \frac{y}{x}$, 则

$$f(2, \pi) = 2, f(\cos t, \sin t) = \cos t \cdot \sin(\tan t), f(y, x) = y \sin \frac{x}{y},$$

$$f(x+y, xy) = (x+y) \sin \frac{xy}{x+y}, f(x, f(x, y)) = x \sin \left(\sin \frac{y}{x} \right).$$

例 4 已知 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 + y^2$, 求 $f(x, y)$.

解 令 $x+y = u, \frac{y}{x} = v$, 则

$$x = \frac{u}{1+v}, \quad y = \frac{uv}{1+v},$$

代入已知等式,得

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v} \right)^2 + \left(\frac{uv}{1+v} \right)^2 = \frac{u^2(1+v^2)}{(1+v)^2}.$$

因此,

$$f(x, y) = \frac{x^2(1+y^2)}{(1+y)^2}.$$

三、多元函数的极限

对于二元函数 $z = f(x, y)$, 当动点 $P(x, y)$ 趋向于某个定点 $P_0(x_0, y_0)$ 时,若函数值 $f(x, y)$ 趋向于某个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的极限.其严格定义如下.

定义 2 设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点,若对任意给定的正数 ε , 都存在正数 δ , 使得当 $P(x, y) \in D, 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时,都有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

则称当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时, $f(x, y)$ 的极限为 A , 记为

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

二元函数的极限有时也称为二重极限.

由定义 2 中可见,当讨论函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的极限时,我们并不要求函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 有定义.

定义 2 还意味着,只要 D 中的点 $P(x, y)$ 与定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的距离充分小,相应的函数值 $f(x, y)$ 与定数 A 的差就可以任意小,而不管点 $P(x, y)$ 是如何趋向定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的.也就是说,不论动点 $P(x, y)$ 沿何种路线趋向定点 $P_0(x_0, y_0)$,函数值 $f(x, y)$ 都趋向同一个极限值 A .因此,当动点 $P(x, y)$ 沿着两条不同路线趋向定点 $P_0(x_0, y_0)$ 时,若函数 $f(x, y)$ 趋向不同的极限值,则上述定义的二重极限就不存在,这也是判定二元函数在一点 $P_0(x_0, y_0)$ 处极限不存在的主要方法.

二元函数的极限概念可以推广为 n 元函数 $u = f(x_1, \cdots, x_n)$ 的极限.一元函数关于极限的运算定理,对于多元函数的极限同样成立,这里不再重述.

例 5 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{|xy|}{x^2 + y^2} \right)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $x^2 + y^2 \neq 0$.

解 因为

$$0 \leq \frac{|xy|}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2},$$

所以当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时,

$$0 \leq \left(\frac{|xy|}{x^2 + y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0,$$

由夹逼准则,原极限为 0.

例 6 证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在.

证 令动点 $P(x, y)$ 沿直线 $y = kx$ 趋向原点 $(0, 0)$, 则有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

由此可见,当点沿不同直线趋向原点时,函数趋向不同的值,因此该二元函数的极限不存在.

四、多元函数的连续性

定义 3 设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0) \in D$, 且 P_0 是 D 的聚点.如果

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续.

如果用“ ε - δ ”语言来描述,则 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续的概念定义如下:对任给的正数 ε , 存在正数 δ , 使得当 $P(x, y) \in D$, 且 $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时,有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

这里与极限定义不同之点在于 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续, 要求 $f(x, y)$ 在点 P_0 必须有定义, 而且极限值等于 P_0 点的函数值.

如果函数 $f(x, y)$ 在 D 上每一点都连续, 则称 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 或者称 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数.

以上关于二元函数的连续性概念, 可以推广到 n 元函数 $u = f(x_1, \dots, x_n)$ 上去.

与一元函数的情形相同, 容易证明两个多元连续函数的和、差、积仍是连续函数; 当分母不为零时, 商也是连续函数.

与一元初等函数类似, 可以证明, 多元初等函数在其定义区域内都是连续函数. 所以, 要判断多元初等函数在某区域 D 上是否连续, 只要检查该函数在区域 D 上是否都有定义即可.

设函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 如果 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 不连续, 则称 $P_0(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的间断点. 显然, 对于初等多元函数来说, 间断点必是没有定义的点. 例如初等二元函数

$$f(x, y) = \frac{1}{x+y-1} + \sin \frac{xy}{x^2+y^2}$$

间断点为原点 $(0, 0)$ 及直线 $x+y=1$ 上的所有点. 除了这些点外, 函数 $f(x, y)$ 都是连续的.

如果 $f(x, y)$ 不是初等函数, 则在点 (x_0, y_0) 有定义就不见得在该点连续.

例 7 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

这个函数在原点 $(0, 0)$ 有定义, $f(0, 0) = 0$, 但由例 6

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ 不存在,}$$

所以 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 不连续. 如果 $(x, y) \neq (0, 0)$, 则 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ 是初等函数, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时有定义, 因而连续.

将闭区间上一元连续函数的性质, 推广到多元函数, 就是下面的有界闭区域上多元连续函数的性质.

定理 设多元函数 $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则

(1) (有界性定理) $f(P)$ 在 D 上有界. 即存在常数 $M > 0$, 对一切 $P \in D$, 有 $|f(P)| \leq M$.

(2) (最值定理) $f(P)$ 在 D 上取得最大值和最小值. 即 D 上存在两点 P_1 ,

P_2 使得

$$f(P_1) = \max \{f(P) \mid P \in D\}, f(P_2) = \min \{f(P) \mid P \in D\}.$$

(3) (介值定理) 对任意 $P_1, P_2 \in D$, $f(P)$ 取得介于 $f(P_1)$ 与 $f(P_2)$ 之间的一切值. 特别地, 如果 $f(P_1)$ 与 $f(P_2)$ 异号, 则存在 $P \in D$, 使得 $f(P) = 0$.

(4) (一致连续性定理) $f(P)$ 在 D 上一致连续. 即对于任给的正数 ε , 存在正数 δ , 对于 D 中任意两点 P_1, P_2 , 只要 $|P_1 P_2| < \delta$, 就有

$$|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon.$$

要使上述性质(1), (2), (4)成立, D 为有界闭区域的条件不可少, 但对于性质(3), 主要是由于区域的连通性, 与 D 是否有界, 是否为闭集无关. 即性质(3)对于任何区域 D 上的连续函数 $f(P)$ 都成立.

因此, 如果 $f(P)$ 在区域 D 上连续, 且在 D 上 $f(P) \neq 0$, 则在 D 上恒有 $f(P) > 0$ 或者恒有 $f(P) < 0$. 作为一个应用, 如果连续曲线 $f(x, y) = 0$ 将平面分成几个区域时, 为了判别不等式 $f(P) > 0$ (或 < 0) 确定的区域, 只要在各区域中任取一点 P_0 进行检验即可. 如果 $f(P_0) > 0$, 则 P_0 所在区域的点 P 都有 $f(P) > 0$; 如果 $f(P_0) < 0$, 则 P_0 所在区域的点 P 都有 $f(P) < 0$.

习 题 7-1

1. 判定下列点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集?

- (1) $\{(x, y) \mid y \neq 0\}$; (2) 去心邻域 $\dot{U}(P, \delta)$;
(3) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$; (4) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

2. 设 $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2} - 2xy$, $t > 0$. 求 $f(\cos t, \sin t)$ 及 $f(tx, ty)$.

3. 试证函数 $g(x, y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式

$$g(xy, uv) = g(x, u) + g(x, v) + g(y, u) + g(y, v).$$

4. $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$, 求 $f(x+y, x-y, xy)$.

5. 设 $F(x, y) = \sqrt{y} + f(\sqrt{x}-1)$, 已知 $F(x, 1) = x$, 求 $f(x)$ 及 $F(x, y)$ 的表达式.

6. 求下列函数的定义域:

- (1) $z = \sqrt{1-x^2} + \ln(1-y^2)$; (2) $z = \sqrt{x-\sqrt{y}}$;
(3) $z = \sqrt{\sin xy - 1}$; (4) $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

7. 求下列各极限:

- (1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \arctan(x-y^2)$; (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy} + 4 - 2}$;
(3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin xy}{y}$; (4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2 \cdot e^{xy}}$.

8. 证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 不存在.