高等学校教材

高等数学教程

下册

主　编　李继彬
副主编　蔡光程　戴　琳　李庶民

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学教程

Gaodeng Shuxue Jiaocheng

下 册

主编 李继彬

副主编 蔡光程 戴 琳 李庶民

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书根据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成，分为上、下两册。下册内容包括：多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、积分学的应用、常微分方程基础与数学建模简介、高等数学实验与数学建模实践。书后附习题参考答案。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材使用，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教程. 下册 / 李继彬主编. —北京：高等教育出版社，2010.3
ISBN 978-7-04-029460-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 027233 号

策划编辑 杨 帆 **责任编辑** 杨 帆 **封面设计** 张 志
版式设计 马敬茹 **责任校对** 金 辉 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	中青印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2010年3月第1版
印 张	17.5	印 次	2010年3月第1次印刷
字 数	320 000	定 价	19.20元

物料号 29460-00

目　　录

第七章　多元函数微分学

在以前各章中讨论的函数都只有一个自变量，这种函数称为**一元函数**. 从本章开始，我们将讨论具有两个或两个以上自变量的函数，即**多元函数**. 在上册中我们主要讨论一元函数的微积分. 本章讨论多元函数微分学及其应用. 我们将以二元函数为主进行讨论，对于一般多元函数的类似内容，只进行简单讨论.

第一节　多元函数的基本概念

一、平面点集及 n 维空间的点集

在讨论一元函数时，已经涉及直线上的点集，如点的邻域以及区间等概念. 同样地，在讨论多元函数时，我们需要用平面上和 n 维空间中的点集，点的邻域以及区域等概念.

1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质的点的集合，称为**平面点集**。例如下面两个点集

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\},\quad B=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\},$$

其中 A 是以原点 $O(0,0)$ 为中心，r 为半径的圆内所有点的集合. 如果以 P 表示点(x,y)，$|OP|$表示点 P 到原点的距离，则点集 A 可表示为 $A=\{P\mid |OP|<r\}$. 点集 B 是对应边平行于坐标轴的矩形内（包括边界）所有点的集合，可记为 $B=[a,b]\times[c,d]$，称为两线段$[a,b]$与$[c,d]$的**笛卡儿积**.

(1) 点的**邻域**

在平面上，以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，$\delta>0$ 为半径的圆内所有点 $P(x,y)$ 所成的点集，称为点 P_0 的 δ **邻域**，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$\begin{aligned}U(P_0,\delta)&=\{P\mid |P_0P|<\delta\}\\&=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.\end{aligned}$$

在 P_0 的 δ 邻域中去掉中心点 P_0 后的点集，称为 P_0 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|P_0P|<\delta\}.$$

如果不需要强调邻域半径 δ 的大小，则可用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，而用 $\mathring{U}(P_0)$ 表示 P_0 的某个去心邻域.

(2) 点集的**内点**、**边界点**及**聚点**

设 E 为一个平面点集，则平面上的一个点 P 与点集 E 的位置关系可能有以下(a),(b),(c),(d)三种情况.

(a) E 的**内点**

如果存在点 P 的一个邻域 $U(P)$，使得

$$U(P) \subset E,$$

则称点 P 是点集 E 的**内点**.

如图 7-1 中，E 表示曲线所围内部的点集，则 P_1 是 E 的内点.

由定义可见，要使 P 成为 E 的内点，不仅 P 本身要属于 E，而且还要有 P 的一个邻域 $U(P)$，使得整个邻域的点都属于 E.

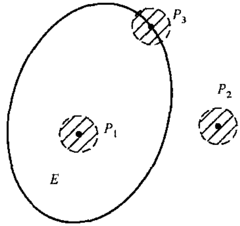

图 7-1

(b) E 的**外点**

如果存在点 P 的一个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)$中不含 E 的点，则称点 P 是点集 E 的**外点**.

如图 7-1 中，P_2 是 E 的外点.

(c) E 的**边界点**

如果点 P 的每一个邻域 $U(P)$ 内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称点 P 为点集 E 的**边界点**.

如图 7-1 中，点 P_3 为点集 E 的边界点.

注意：点集 E 的边界点 P 可能属于 E，也可能不属于 E.

E 的所有边界点的全体所组成的点集，称为 E 的**边界**，记作 ∂E.

下面我们再根据点 P 与点集 E 相联系的密切程度，定义点集 E 的聚点概念.

(d) E 的**聚点**

如果点 P 的每一个邻域 $U(P)$ 内都含有无穷多个属于 E 的点，则称点 P 为点集 E 的**聚点**.

E 的内点必是 E 的聚点，E 的边界点可能是 E 的聚点，也可能不是 E 的聚点.

E 的全部聚点所成的点集称为 E 的**导集**，记作 E'.

例如，设平面点集

$$E = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\},$$

则满足 $1 < x^2 + y^2 < 2$ 的点 (x,y) 都是 E 的内点；圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点 (x,y) 都是 E 的边界点，它们都不属于 E；而圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 上的点 (x,y) 也是 E 的边界点，它们都属于 E. E 的边界为

$$\partial E = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 2\}.$$

E 的导集为

$$E' = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}.$$

(3) **开集、闭集及区域**

如果点集 E 的每一个点都是 E 的内点，则称 E 为**开集**. 如果 E 的聚点都是 E 的点，即 $E' \subset E$，则称 E 为**闭集**.

例如，考察下面四个平面点集

$A_1 = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$；$A_2 = \{(x,y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$；

$A_3 = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$；$A_4 = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\}$；

则 A_1，A_2 都是开集，A_3 是闭集，A_4 既非开集也非闭集. 没有聚点的点集是闭集. 空集 $\varnothing$ 及全平面 $\mathbf{R}^2$ 既是开集也是闭集.

如果点集 G 是开集，并具有**连通性**，即开集 G 中任意两点，都可以用一条完全落在 G 中的折线(即一组完全落在 G 中的首尾相接的直线段)相连接，则称 G 为**区域**(或**开区域**).

由定义可见，区域指的是开区域，它是连通开集，不具有连通性的开集不能称为区域. 例如前面的点集 A_1 是区域. A_2 只是开集而不是区域，因为它不具有连通性，例如 A_2 中的点 $P_1(1,1)$ 与点 $P_2(-1,1)$ 就不能用完全位于 A_2 内部的折线相连接，因为任何与 P_1，P_2 相连接的折线必与 y 轴相交，而交点是不属于 A_2 的点. A_2 可以看成是由四个区域并成的开集.

开区域以及它的边界上的所有点所构成的点集称为**闭区域**. 例如前面的点集 A_3 就是闭区域.

全平面 $\mathbf{R}^2$ 既是开区域，也是闭区域.

对于点集 E，如果存在正数 r，使得对于任意 $(x,y) \in E$，都有 $\sqrt{x^2 + y^2} < r$ 即 $E \subset U(O,r)$，其中 O 为坐标系的原点，则称 E 为**有界集**. 不是有界集的点集称为**无界集**.

例如点集 $\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ 是有界闭区域，点集 $\{(x,y) \mid x < y\}$ 是无界开区域，$\{(x,y) \mid x \leqslant y\}$ 是无界闭区域.

2. n 维空间的点集

设 $\mathbf{R}$ 表示全体实数，由 n 个实数组成的有序实数组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的全体所构成的集合记作 $\mathbf{R}^n$，即

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n\}.$$

集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n **维空间**，其中的每个元素 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 称为 n 维空间中的**点**，$\mathbf{0} = (0,\cdots,0)$ 称为**原点**.

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任何两点，$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的距离 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 具有距离的以下性质：

(1) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时，$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$；

(2) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$；

(3) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\rho(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$.

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，$\delta$ 为正数，则 n 维空间中的点集

$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\}$$

称为点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ **邻域**.

有了邻域的概念，就可以像上面对平面点集所述的那样，定义 n 维空间中点集的内点、边界点及聚点等概念，同样可以定义 n 维空间中的开集、闭集、开区域、闭区域、有界集与无界集等概念，这里不再重述.

例如，在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点常记作 $P(x,y,z)$，点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的 δ 邻域 $U(P_0,\delta)$ 是如下的点集

$$\begin{aligned}U(P_0,\delta)&=\{P\mid\rho(P,P_0)<\delta\}\\&=\{(x,y,z)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\},\end{aligned}$$

这是以点 P_0 为中心，δ 为半径的球的内部的点组成的点集.

三维空间中，点集

$$E_1=\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

是由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的有界闭区域.点集

$$E_2=\{(x,y,z)\mid z>0\}\text{ 及 }E_3=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

都是无界点集，E_2 是无界开区域，E_3 是无界闭区域.

二、多元函数概念

在实际问题中，经常会遇到一个变量与多个变量间的依赖关系，举例如下.

例 1 矩形的面积 S 依赖于其长 x 和宽 y，即

$$S=xy.$$

长、宽只能取正实数值，x,y 的取值范围构成一个平面点集 $\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$，给定每个数对 (x,y) 的值，就可对应面积 S 的一个确定值.

例 2 两个并联的电阻 R_1,R_2，其总电阻 R 为

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

R_1,R_2 的变化范围为 $\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$，给定每一对电阻值 (R_1,R_2)，就确定了总电阻 R 的值。

去掉上面例子中变量的实际含义，以及变量间的具体对应关系，就抽象出下

面二元函数的定义.

定义 1　设 D 是平面上的非空点集，D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射

$$f: D \to \mathbf{R}$$

称为定义在 D 上的**二元函数**，记为

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

或

$$z = f(P), \quad P \in D,$$

其中点集 D 称为函数的**定义域**，x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 有时我们也说：z 是 x,y 的函数.

当自变量 (x,y) 取值为 (x_0,y_0) 时，用记号 $f(x_0,y_0)$ 表示对应的 z 的函数值. 当 (x,y) 在 D 中变化时，$z = f(x,y)$ 所对应的一切函数值组成的实数集称为函数 f 的**值域**，记为 $f(D)$，即

$$f(D) = \{z \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}.$$

作为函数记号的字母 f，可以根据实际需要随意选用其他字母. 例如 $z = \varphi(x,y)$，$z = z(x,y)$ 等都可用以表示 x,y 的二元函数.

关于二元函数的定义域，如果不是讨论实际应用的函数，而是讨论用表达式表达的函数时，其定义域就是使表达式有意义的 x,y 的范围所组成的点集. 对这类函数，它的定义域不再特别标出. 例如，二元函数

$$z = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

的定义域就是由不等式 $0 \leqslant y < x$ 确定的平面点集 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y < x\}$.

在函数 $z = f(x,y)$ 的定义域 D 中任取一点 $P(x,y) \in D$，对应的函数值为 $z = f(x,y)$，这样的 x,y,z 的值确定三维空间中的一个点 $M(x,y,z)$，当 P 在 D 中变化时，点 M 就描绘出空间一个确定的点集

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}.$$

这个点集通常是一张曲面，称为二元函数 $z = f(x,y)$ 的**图像**.（如图 7-2）

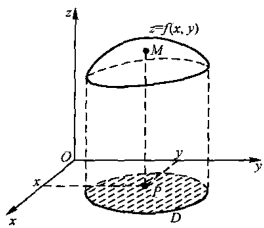

图 7-2

例如，函数 $z = ax + by$ 的图像是一个平面，$z = x^2 + y^2$ 的图像是一个旋转抛物面，$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的图像是一个半球面.

如果把定义 1 中的平面点集 D 换作 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 D，则映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 就称为定义在 D 上的 n **元函数**，记为

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (x_1, x_2 \cdots, x_n) \in D$$

或简记为

$$u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D.$$

三维空间中，点的坐标通常用 x, y, z 表示，因此，三元函数常记作

$$u = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in D.$$

三元函数的定义域 D 是空间中的点集，其函数图像已不能在三维空间中直观地描述. 当 $n \geqslant 4$ 时，n 元函数的定义域及图像亦如此，但我们仍然可以说：n 元函数的定义域为 n 维空间的点集，其图像是 $n+1$ 维空间中的**超曲面**.

多元函数的四则运算与一元函数情形类似，这里不再重述.

例 3 设 $f(x,y) = x\sin\dfrac{y}{x}$，则

$$f(2,\pi) = 2, f(\cos t, \sin t) = \cos t \cdot \sin(\tan t), f(y,x) = y\sin\frac{x}{y},$$

$$f(x+y, xy) = (x+y)\sin\frac{xy}{x+y}, f(x, f(x,y)) = x\sin\left(\sin\frac{y}{x}\right).$$

例 4 已知 $f\left(x+y, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 + y^2$，求 $f(x,y)$.

解 令 $x+y = u, \dfrac{y}{x} = v$，则

$$x = \frac{u}{1+v}, \quad y = \frac{uv}{1+v},$$

代入已知等式，得

$$f(u,v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 + \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1+v^2)}{(1+v)^2}.$$

因此，

$$f(x,y) = \frac{x^2(1+y^2)}{(1+y)^2}.$$

三、多元函数的极限

对于二元函数 $z = f(x,y)$，当动点 $P(x,y)$ 趋向于某个定点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，若函数值 $f(x,y)$ 趋向于某个常数 A，则称 A 为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的极限. 其严格定义如下.

定义 2 设二元函数 $f(P) = f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点，若对任意给定的正数 ε，都存在正数 δ，使得当 $P(x,y) \in D$，$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时，都有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon,$$

则称当 $(x,y) \to (x_0, y_0)$ 时，$f(x,y)$ 的**极限**为 A，记为

$$\lim_{P \to P_0} f(x,y) = A \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

二元函数的极限有时也称为**二重极限**.

由定义 2 中可见，当讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的极限时，我们并不要求函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 有定义.

定义 2 还意味着，只要 D 中的点 $P(x,y)$ 与定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离充分小，相应的函数值 $f(x,y)$ 与定数 A 的差就可以任意小，而不管点 $P(x,y)$ 是如何趋向定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的. 也就是说，不论动点 $P(x,y)$ 沿何种路线趋向定点 $P_0(x_0,y_0)$，函数值 $f(x,y)$ 都趋向同一个极限值 A. 因此，当动点 $P(x,y)$ 沿着两条不同路线趋向定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，若函数 $f(x,y)$ 趋向不同的极限值，则上述定义的二重极限就不存在，这也是判定二元函数在一点 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在的主要方法.

二元函数的极限概念可以推广为 n 元函数 $u=f(x_1,\cdots,x_n)$ 的极限. 一元函数关于极限的运算定理，对于多元函数的极限同样成立，这里不再重述.

例 5 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$，其中 $x^2+y^2\neq 0$.

解 因为

$$0\leqslant\frac{|xy|}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2},$$

所以当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，

$$0\leqslant\left(\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\to 0,$$

由夹逼准则，原极限为 0.

例 6 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证 令动点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋向原点 $(0,0)$，则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

由此可见，当点沿不同直线趋向原点时，函数趋向不同的值，因此该二元函数的极限不存在.

四、多元函数的连续性

定义 3 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)\in D$，且 P_0 是 D 的聚点. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果用"$\varepsilon-\delta$"语言来描述，则 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续的概念定义如下：对任给的正数 ε，存在正数 δ，使得当 $P(x,y)\in D$，且 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

这里与极限定义不同之点在于 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，要求 $f(x,y)$ 在点 P_0 必须有定义，而且极限值等于 P_0 点的函数值.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的**连续函数**.

以上关于二元函数的连续性概念，可以推广到 n 元函数 $u=f(x_1,\cdots,x_n)$ 上去.

与一元函数的情形相同，容易证明两个多元连续函数的和、差、积仍是连续函数；当分母不为零时，商也是连续函数.

与一元初等函数类似，可以证明，**多元初等函数在其定义区域内都是连续函数**. 所以，要判断多元初等函数在某区域 D 上是否连续，只要检查该函数在区域 D 上是否都有定义即可.

设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，如果 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的**间断点**. 显然，对于初等多元函数来说，间断点必是没有定义的点. 例如初等二元函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x+y-1}+\sin\frac{xy}{x^2+y^2}$$

间断点为原点 $(0,0)$ 及直线 $x+y=1$ 上的所有点. 除了这些点外，函数 $f(x,y)$ 都是连续的.

如果 $f(x,y)$ 不是初等函数，则在点 (x_0,y_0) 有定义就不见得在该点连续.

例 7 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

这个函数在原点 $(0,0)$ 有定义，$f(0,0)=0$，但由例 6

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\text{ 不存在},$$

所以 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不连续. 如果 $(x,y)\neq(0,0)$，则 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是初等函数，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时有定义，因而连续.

将闭区间上一元连续函数的性质，推广到多元函数，就是下面的有界闭区域上多元连续函数的性质.

定理 设多元函数 $f(P)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在有界闭区域 D 上连续，则

(1)（**有界性定理**） $f(P)$ 在 D 上有界. 即存在常数 $M>0$，对一切 $P\in D$，有 $|f(P)|\leqslant M$.

(2)（**最值定理**） $f(P)$ 在 D 上取得最大值和最小值. 即 D 上存在两点 P_1，

P_2使得

$$f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\},f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}.$$

(3)(**介值定理**)对任意 $P_1,P_2\in D$,$f(P)$ 取得介于 $f(P_1)$与 $f(P_2)$之间的一切值.特别地,如果 $f(P_1)$与 $f(P_2)$异号,则存在 $P\in D$,使得 $f(P)=0$.

(4) *(**一致连续性定理**) $f(P)$ 在 D 上**一致连续**.即对于任给的正数ε,存在正数 δ,对于 D 中任意两点 P_1,P_2,只要 $|P_1P_2|<\delta$,就有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon.$$

要使上述性质(1),(2),(4)成立,D 为有界闭区域的条件不可少.但对于性质(3),主要是由于区域的连通性,与 D 是否有界,是否为闭集无关.**即性质(3)对于任何区域 D 上的连续函数 $f(P)$ 都成立.**

因此,如果 $f(P)$在区域 D 上连续,且在 D 上 $f(P)\neq 0$,则在 D 上恒有 $f(P)>0$或者恒有 $f(P)<0$.作为一个应用,如果连续曲线 $f(x,y)=0$ 将平面分成几个区域时,为了判别不等式 $f(P)>0$(或<0)确定的区域,只要在各区域中任取一点 P_0 进行检验即可.如果 $f(P_0)>0$,则 P_0 所在区域的点 P 都有 $f(P)>0$;如果 $f(P_0)<0$,则 P_0 所在区域的点 P 都有 $f(P)<0$.

习 题 7-1

1. 判定下列点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集?

(1) $\{(x,y)\mid y\neq 0\}$;　(2) 去心邻域$\mathring{U}(P,\delta)$;

(3) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$;　(4) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

2. 设 $f(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}-2xy$,$t>0$.求 $f(\cos t,\sin t)$ 及 $f(tx,ty)$.

3. 试证函数 $g(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$g(xy,uv)=g(x,u)+g(x,v)+g(y,u)+g(y,v).$$

4. $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,求 $f(x+y,x-y,xy)$.

5. 设 $F(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$,已知 $F(x,1)=x$,求 $f(x)$ 及 $F(x,y)$ 的表达式.

6. 求下列函数的定义域:

(1) $z=\sqrt{1-x^2}+\ln(1-y^2)$;　(2) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

(3) $z=\sqrt{\sin xy-1}$;　(4) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

7. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\arctan(x-y^2)$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{y}$;　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2\cdot e^{xy}}$.

8. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.