经/典/教/材/配/套/丛/书

配套 高教社 龙永红 《概率论与数理统计(第三版)》(面向21世纪课程教材)

概率论与数理统计
同步辅导与考研指津

秦 衍◎主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

Q21
65

经典教材配套丛书
配套·高教社·龙永红·《概率论与数理统计(第三版)》(面向21世纪课程教材)

概率论与数理统计
同步辅导与考研指津

秦 衍 主编

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导与考研指津/秦衍主编. —上海：华东理工大学出版社，2010.3

(经典教材配套丛书)

ISBN 978-7-5628-2768-9

Ⅰ. ①概... Ⅱ. ①秦... Ⅲ. ①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 040380 号

经典教材配套丛书

概率论与数理统计同步辅导与考研指津

主　　编 / 秦　衍
策　　划 / 周永斌
责任编辑 / 胡　景
责任校对 / 金慧娟
封面设计 / 陆丽君
出版发行 / 华东理工大学出版社
地址：上海市梅陇路 130 号，200237
电话：(021)64250306(营销部)　64252253(编辑部)
传真：(021)64252707
网址：press. ecust. edu. cn
印　　刷 / 常熟华顺印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 14.75
字　　数 / 384 千字
版　　次 / 2010 年 3 月第 1 版
印　　次 / 2010 年 3 月第 1 次
印　　数 / 1—4000 册
书　　号 / ISBN 978-7-5628-2768-9/O·222
定　　价 / 29.50 元

前言

PREFACE

为了帮助经济类和管理类在校学生和自学者学好"概率论与数理统计",同时给他们备考研究生提供一份复习资料,我们总结在教学中积累的大量资料和汇集的考题,编写了这本配套龙永红主编的面向21世纪课程教材《概率论与数理统计(第三版)》同步辅导书。

全书根据全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲(经济类)的要求编写。为了与教材保持同步,本书按原书的编排顺序逐章编写。每章内容包括:大纲要求、本章基本内容、典型例题解析、练习题全解、习题全解、近年考研真题精选等六个栏目。此外,还归纳了考研题和例题的解答过程中的常用方法、技巧及易错之处,尽量使解题方法标准、简捷、巧妙。

考虑到经管类学生和自学者学习数学过程中缺少过程指导书的困难,编写此书时,在选材、理论推导、文字叙述等诸多方面尽量满足其需要,并且在例题后增加了注意要点、解题思路和分析,帮助学生总结解题经验,避免常犯错误。

本书可作为经济和管理类本科生的学习辅导书,更是自学者和有志攻读经济和管理类硕士研究生青年的良师益友,对于从事"概率论与数理统计"教学的教师也有一定的参考价值。

由于水平有限,不足与不当之处在所难免,恳请读者和专家批评指正。

编者

2009年12月

目录 CONTENTS

第1章 随机事件与概率

一、大纲要求

1. 了解样本空间的概念.
2. 理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.
3. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质.
4. 会计算古典型概率和几何型概率.
5. 掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式等.
6. 理解事件的独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算.
7. 理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

二、本章基本内容

1. 随机事件

表1-1 随机事件

名称	定义	说明
随机现象	事先无法准确预知其结果的现象	
随机现象的统计规律性	随机现象在大量重复出现时所表现出来的量的规律性	
随机试验	对随机现象的观察	一般要求满足：(1)相同条件下可重复试验；(2)试验的结果是可观察的；(3)每次试验的结果是事先不可预知的
样本点	随机试验的每个可能的结果，用 ω 表示	
样本空间	随机试验的所有样本点构成的集合，用 Ω 表示	
随机事件（简称事件）	随机试验的一个可观察的特征，记作 $A,B,\cdots$	可用满足相应特征的可能结果（即样本点）的集合表示
事件 A 发生	一个随机试验的结果为 ω，且 $\omega\in A$	
必然事件	在试验中一定发生的事件，用 Ω 表示	由所有样本点构成的集合
可能事件	在试验中一定不发生的事件，用 $\varnothing$ 表示	不包含任何样本点的集合，即空集
基本事件	由一个样本点所构成的事件	

2. 事件的关系与运算

表 1-2　关系与运算

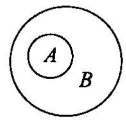
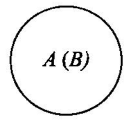
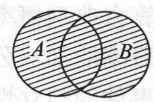
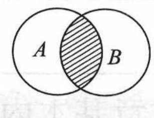
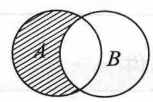
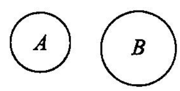
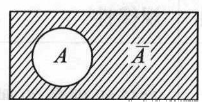
名　称	定　　义	图例和说明
事件的包含	如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$	 一般有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$
事件的相等	如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$	
事件的并(和)	"A 与 B 中至少有一个事件发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的并(和)，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$	
事件的交(积)	"A 与 B 两个事件均发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的交(积)，记作 $A\cap B$ 或 AB	
事件的差	"事件 A 发生而 B 不发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$	 $A-B=A-AB=A(\Omega-B)$
互不相容事件	若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容	
对立事件	"事件 A 不发生"这一事件称为事件 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$	 一般有 $\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\overline{A}}=A$. 事件 A 与事件 B 互为对立事件当且仅当 (1) $AB=\varnothing$；(2) $A+B=\Omega$
完备事件组	有限个或可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，如果两两互不相容且 $\bigcup_i A_i$ 为必然事件，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为一个完备事件组	$\bigcup_i A_i$ 表示"有限个或可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生"这一事件，有限个也可记为 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$（可数个可记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$）. 类似地，$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 表示"有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均发生"这一事件

表 1-3 运算律

交换律	$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$
结合律	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
De Morgan 对偶律	$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A}_i$；$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A}_i$

3. 随机事件的概率

表 1-4 概率

名 称	定 义
概率的描述性定义	一个事件发生的可能性大小的度量
频率	在 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$，称 $f_n(A)=\frac{r_n(A)}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率
概率的频率解释（统计定义）	在 n 次独立重复试验中，事件 A 发生的频率为 $f_n(A)$. 当 $n\to\infty$ 时，$f_n(A)$ 趋于一个稳定值，这个稳定值就是事件 A 在每次试验中发生的概率
概率的公理化定义	设 Ω 是样本空间，定义在 Ω 上的事件域 $\mathscr{F}$（全体事件构成的集合）上的实值函数 $P(\cdot)$ 称为 Ω 上的一个概率测度，如果它满足下列三条公理： 公理 1：$P(\Omega)=1$； 公理 2：对任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$； 公理 3：对任意可数个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

表 1-5 概率的性质

不可能事件的概率	$P(\varnothing)=0$	
非负性	$0\leqslant P(A)\leqslant 1$	
有限可加性	如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$	对任意的 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$
对立事件的概率	$P(\overline{A})=1-P(A)$	
减法公式	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$	如果 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$
单调性	如果 $B\subset A$，则 $P(B)\leqslant P(A)$	
加法公式	$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)$ $-P(BC)+P(ABC)$	

表 1-6 古典概型与几何概型

名 称	概型的假设条件	相应的概率计算公式
古典概型	(1) 随机试验只有有限个可能结果； (2) 每一个可能结果出现的可能性相同	$P(A)=\dfrac{A\text{ 中的样本点个数}}{\Omega\text{ 中的样本点个数}}=\dfrac{\text{使 }A\text{ 发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$
几何概型	(1) 试验的样本空间 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界区域； (2) 每一个样本点出现的可能性相同	$P(A)=\dfrac{\mu(A\cap\Omega)}{\mu(\Omega)}$ 这里 $\mu(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的几何测度，当 $n=1,2,3$ 时，分别表示长度、面积和体积

4. 条件概率与事件的独立性

表 1-7 条件概率

定义	若 $P(A)>0$，称 $P(B\|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下 B 发生的条件概率
性质	(1) 满足概率的三条公理： ① $P(\Omega\|A)=A$； ② $P(B\|A)\geqslant 0$； ③ $A_1,A_2,\cdots$ 为一列两两互不相容的事件，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\|A)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i\|A)$； (2) 满足概率的其他性质(见表 1-5)

表 1-8 事件的独立性

名 称		定 义	注意
两个事件的相互独立		若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B 相互独立	
有限个事件	两两独立	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若其中任何两个事件均相互独立，即 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立	
	相互独立	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若对任意 $2\leqslant k\leqslant n$ 及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，均有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$， 则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立	相互独立一定是两两独立的，但两两独立的有限个事件不一定相互独立
可数个事件	两两独立	$A_1,A_2,\cdots$ 是可数个事件，如果其中任意两个事件均相互独立，则称 $A_1,A_2,\cdots$ 两两独立	任意两个事件
	相互独立	$A_1,A_2,\cdots$ 是可数个事件，如果其中任意有限个事件均独立，则称 $A_1,A_2,\cdots$ 相互独立	任意有限个事件

5. 乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

6. 独立试验概型

表 1-12　伯努利试验下的两个概率

伯努利定理	设在一次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1), q=1-p$	在 n 次独立重复试验中,"事件 A 恰好发生 k 次"的概率为: $b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k}$
等待概率		在伯努利试验序列中,"直到第 k 次试验事件 A 才首次发生"的概率为 $g(k,p)=q^{k-1}p$

三、典型例题解析

例 1　设 A,B,C 为三个事件,则"A,B,C 中至少有一个不发生"这一事件可表示为(　　).

(A) $AB+AC+BC$　　　(B) $A+B+C$

(C) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$　　　(D) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

分析　根据事件的并的定义,凡是出现"至少有一个",均可由"事件的并"来表示,而事件"不发生"可由对立事件来表示,于是"A,B,C 至少有一个不发生"等价于"$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 中至少有一个发生",故

答案　(D).

注　(1) 答案中的(A)表示"A,B,C 中至少有两个发生",(B)表示"A,B,C 中至少有一个发生",(C)表示"A,B,C 中恰好有两个发生".

(2) 事件的表示往往不是唯一的,比如本例中,(D)还可表示为"恰好一个不发生或恰好两个不发生或三个都不发生",或者"三个都发生"的对立事件等来得到相应的表示.

(3) 在学习和复习时,不要仅限于事件表示的"简单",要多考虑同一事件的不同表示. 例如

$$A+B=A+(B-A)=A+(B-AB)=(A-B)+(B-A)+AB.$$

在实际中,特别是概率计算中,要根据问题的需要选择相应的表示方法.

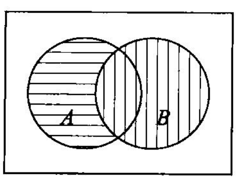
例 2　A,B 是两个事件,则下列关系正确的是(　　).

(A) $(A-B)+B=A$　　　(B) $AB+(A-B)=A$

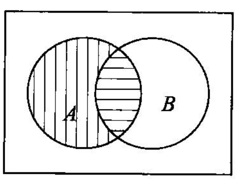
(C) $(A+B)-B=A$　　　(D) $(AB+A)-B=A$

分析　集合(事件)运算与代数运算有较大的区别. 在事件运算中和、差运算不能简单地抵消,事件的结合律和交换律只有在纯粹的并运算或纯粹的交运算中成立. 不能随意去掉运算中的括号. 解决这类问题的关键在于正确理解事件运算的定义和性质,分析时可以借助于文氏图. 注意到本题的四个选项的等式右边都是 A,故分别给出四个选项左边的文氏图. 下图中横线表示选项左边的第一个事件,竖线表示选项左边的第二个事件. 可见选项(A)的左边的运算结果为 $A+B$,选项(C)为 $A-B$,选项(D)也是 $A-B$,而选项(B)的左边实际上等于 $AB+A\overline{B}=A$,故

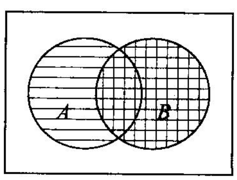
答案　(B).



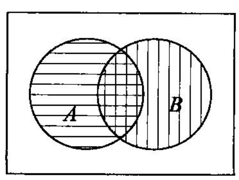
(A)



(B)



(C)



(D)

例 6 某城有 N 辆车，车牌号从 1 到 N，某观察员在某地把所遇到的 n 辆车的牌号抄下（可能重复抄到车牌号），问为抄到最大号码正好 k 的概率（$1\leqslant k\leqslant N$）是多少？

分析 本题仍是古典概型，由于可重复抄到同一车牌号，故属于有放回抽样而且记序. 因此本题的概率计算中，样本空间的样本点总数可用 N^n 计算. 为计算事件"抄到最大号码正好 k" 的样本点数，我们用 $A-B$ 方法化简之，抄到最大车牌号正好为 k 的事件概率等于抄下的车牌号不超过 k 的事件概率减去抄下车牌号不超过 $k-1$ 的事件概率，"抄下的车牌号不超过 k"可理解为从牌号为 1 到 k 的车中去抄号，故该事件的样本点数仍可用 k^n 计算.

解 设 A 为抄下的车牌号不超过 k ，B 为抄下车牌号不超过 $k-1$ 的事件. 从而所求概率为

$$P(A-B)=P(A)-P(B)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

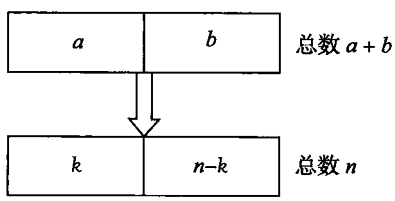
例 7（超几何分布） 一批产品共有 $a+b$ 个，其中 a 个正品，b 个次品. 今采用不放回抽样 n 次，问抽到的 n 个产品里恰有 k 个是正品的概率是多少？

分析 本题还是古典概型，由于采用不放回不计序抽样，故样本空间的样本点总数为 C_{a+b}^n，在计算事件"抽到的 n 个产品里恰有 k 个是正品"的样本点数时不需涉及正品、次品的位置，仅与正品、次品的样本数有关，故样本点数为 $C_a^kC_b^{n-k}$.

解 设事件 A 表示"抽到的 n 个产品里恰有 k 个是正品"，则

$$P(A)=\frac{C_a^kC_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},\quad k=1,2,\cdots,\min(n,a).$$

注 上述公式对应的随机变量常称为服从超几何分布，上述公式有时也可简记为"正抽正，次抽次，全体抽总数". 用图表示为



这种表示有利于不同形式下的概率公式的记忆. 例如若记 $a+b=N$，则

$$P(A)=\frac{C_a^kC_{N-a}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=1,2,\cdots,\min(n,a).$$

例 8 从$[0,1]$中随机取两个数，求两数之和小于$\frac{6}{5}$的概率.

分析 如果从$[0,1]$中取出的两个数视为平面上的坐标，根据题意，它等可能取正方形区域$[0,1]\times[0,1]$上的点，故本题属几何概型.

解 设 x，y 表示从$[0,1]$中取出的两个数，考虑二维平面集合 $\Omega=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant1\ ,\ 0\leqslant y\leqslant1\}$，此时相应的几何度量应为正方形的面积，$L(\Omega)=1$. 设事件 A 表示"两数之和小于$\frac{6}{5}$"，则 A 为 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$x+y<\frac{6}{5}$ 的交集（见图 1－2），所以由几何概率公式

$$P(A)=\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\right)\Big/1=\frac{17}{25}.$$

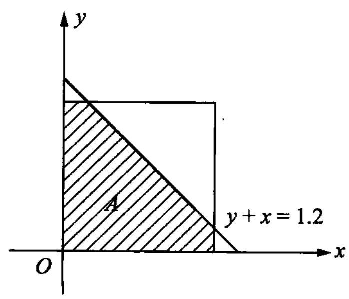


图 1－2

例 9　设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，且 $P(A|B)\geqslant P(A)$，则下列结论中不成立的是(　　).

(A) $P(B|A)\geqslant P(B)$　　(B) $P(A|\overline{B})\leqslant P(A)$

(C) $P(\overline{A}|\overline{B})\geqslant P(\overline{A})$　　(D) $P(\overline{A}|\overline{B})\leqslant P(\overline{A})$

分析　由题设 $P(A|B)\geqslant P(A)$，有 $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$. 从而 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\geqslant P(B)$，即(A)成立，又由 $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{P(\overline{B})}\leqslant\dfrac{P(A)-P(A)P(B)}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)P(\overline{B})}{P(\overline{B})}=P(A)$，知(B)成立. 由 $P(\overline{A}|\overline{B})+P(A|\overline{B})=1, P(A)+P(\overline{A})=1$，故 $P(\overline{A}|\overline{B})=1-P(A|\overline{B})\geqslant 1-P(A)=P(\overline{A})$，导出(C)成立，从而只有(D)不成立.

答案　(D).

例 10　玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0、1、2 只残次品的概率分别为 0.8、0.1 和 0.1. 顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时售货员随意取一箱，而顾客随机察看该箱中 4 只玻璃杯，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回. 试求：

(1) 顾客买下该箱的概率 α；

(2) 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β.

分析　在问题(1)中，顾客买下一箱玻璃杯，意味着顾客随机察看的 4 只玻璃杯无残次，这依赖于箱含残次品的个数，因而要用全概率公式，其中在箱中有 i 只残次品条件下，顾客买下该箱玻璃杯(取到的 4 只玻璃杯都无残次品)的概率可参照例 7 的方法计算. 而问题(2) 讨论的是在顾客买下一箱的条件下，该箱玻璃杯确实没有残次品的概率，故用贝叶斯公式.

解　设事件 $A=\{$顾客买下该箱$\}$，$B_i=\{$箱子中有 i 只残次品$\}$，$i=0,1,2$. 由题意 $P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=P(B_2)=0.1$，又

$$P(A|B_i)=\frac{C_{20-i}^4}{C_{20}^4}\ (i=0,1,2).$$

(1) 利用全概率公式，可得

$$\alpha=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.1\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=0.943\ 16.$$

(2) 利用贝叶斯公式，可得

$$\beta=P(C|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8\times1}{P(A)}=0.848\ 21.$$

例 11　射手对目标独立地射击三次，每次射击的命中率均为 $p(0<p<1)$，求目标被击中的概率.

分析　这个问题有多种方法求解. 其关键在于将要求其概率的事件分解成一些简单事件或已知概率值的事件之并或交，由于分解式不唯一，所以解法也不唯一. 在下面的方法中，后两种方法比较简单，而前三种方法对于每次射击的命中率不相同时也适用. 解题的关键在于事件的分解要既正确又恰当.

解法 1　设事件 C 表示"目标被击中"，令 B_k 表示事件"三次射击中有 k 次击中了目标"，$k=0,1,2,3$，则有 $C=B_1\cup B_2\cup B_3$，$B_iB_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,3$. 利用加法公式有

$$P(C)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i),$$

B_1 表示事件"三次射击中有一次击中了目标"，那么还有两次是未击中目标，所以令 A_j 表示事件"第 j 次射击击中了目标"，$j=1,2,3$，有

$$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

类似地，有 $B_2=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3$，$B_3=A_1A_2A_3$.

由题设知，$P(A_j)=p, j=1,2,3$ 且 A_1,A_2,A_3 相互独立，所以有

$$P(C)=3pq^2+3p^2q+p^3=3pq+p^3,$$

其中 $q=1-p$. 这种解法的计算是很烦的.

解法 2 目标被击中"即指三次射击中至少有一次击中了目标，用前面的符号，有 $C=A_1\cup A_2\cup A_3$，利用加法公式得到

$$\begin{aligned}P(C)&=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=3p-3p^2+p^3=3pq+p^3.\end{aligned}$$

解法 3 题中假定了 A_1,A_2,A_3 互相独立，但 A_1,A_2,A_3 不是两两互不相容的，可将 C 分解成"互不相容"事件之和，即 $C=A_1\cup A_2\cup A_3=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$，故

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)\\&=p+pq+pq^2=3pq+p^3.\end{aligned}$$

解法 4 利用对偶原理，有 $C=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$. 故

$$\begin{aligned}P(C)&=1-P(C)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=1-q^3\\&=(p+q)^3-q^3=3pq^2+3p^2q+p^3=3pq+p^3\text{（答案一致）}.\end{aligned}$$

解法 5 若视一次射击为一次试验，那么这是一个三重伯努利试验，一次成功概率为 p 的伯努利概型，因此有

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-C_3^0p^0(1-p)^3=1-q^3=3pq+p^3.$$

四、练习题全解

练习 1.1

1. 写出下列各试验的样本空间：

(1) 掷两枚骰子，分别观察其出现的点数；

(2) 观察一支股票某日的价格（收盘价）；

(3) 一人射靶三次，观察其中靶次数；

(4) 一袋中装有 10 个同型号的零件，其中 3 个合格 7 个不合格，每次从中随意取出一个，不合格便放回去，直到取到合格的零件为止，观察所抽取的次数.

解 (1) 样本空间 $\Omega=\{(i,j)\mid i=1,2,\cdots,6, j=1,2,\cdots,6\}$；

(2) $\Omega=\{x\mid 0<x<+\infty\}$；

(3) $\Omega=\{1,2,3\}$；

(4) $\Omega=\{1,2,\cdots,8\}$.

2. 四名乒乓球运动员——1，2，3，4 参加单打比赛，在第一轮中，1 与 2 比赛，3 与 4 比赛. 然后第一轮中的两名胜者相互比赛决出冠亚军，两名败者也相互比赛决出第三名和第四名. 于是比赛的一种最终可能结果可以记作 1324（表示 1 胜 2，3 胜 4，然后 1 胜 3，2 胜 4）.

(1) 写出比赛所有可能结果构成的样本空间 Ω；

(2) 设事件 A 表示运动员 1 获得冠军，写出 A 中所包含的所有可能结果；

(3) 设事件 B 表示运动员 1 进入冠亚军决赛，写出 B 中所包含的所有可能结果；

(4) 分别写出 $A\cup B, A\cap B, \overline{A}$ 中包含的所有可能结果.

解 (1) $\Omega=\{1324,1342,3124,3142,1423,1432,4123,4132,2314,2341,3214,3241,2413,2431,4213,4231\}$;

(2) $A=\{1324,1342,1423,1432\}$;

(3) $B=\{1324,1342,3124,3142,1423,1432,4123,4132\}$;

(4) $A\cup B=B=\{1324,1342,3124,3142,1423,1432,4123,4132\}$;

$A\cap B=A=\{1324,1342,1423,1432\}$;

$\overline{A}=\{3124,3142,4123,4132,2314,2341,3214,3241,2413,2431,4213,4231\}$.

3. 投掷一枚硬币三次,观察三次投掷出现正反面情况,比如一种可能结果为 HTT(表示第一次出现的是正面,第二次和第三次出现的都是反面).

(1) 写出所有可能结果构成的样本空间 Ω;

(2) 事件 A 表示恰好出现两次正面,写出 A 中所包含的所有可能结果;

(3) 事件 B 表示三次中出现过正面,写出 B 中所包含的所有可能结果;

(4) 分别写出 $A\cup B, A\cap B, A-B, \overline{B}$ 中所包含的所有可能结果.

解 (1) $\Omega=\{\text{HHH},\text{HHT},\text{HTH},\text{THH},\text{TTH},\text{THT},\text{HTT},\text{TTT}\}$;

(2) $A=\{\text{HHT},\text{HTH},\text{THH}\}$;

(3) $B=\{\text{HHH},\text{HHT},\text{HTH},\text{THH},\text{TTH},\text{THT},\text{HTT}\}$;

(4) $A\cup B=B=\{\text{HHH},\text{HHT},\text{HTH},\text{THH},\text{TTH},\text{THT},\text{HTT}\}$;

$A\cap B=A=\{\text{HHT},\text{HTH},\text{THH}\}$;

$A-B=\{\text{HHH},\text{TTH},\text{THT},\text{HTT}\}$;

$\overline{B}=\{\text{TTT}\}$.

4. 掷一枚骰子,观察其出现的点数,A 表示"出现奇数点",B 表示"出现的点数小于 5",C 表示"出现的点数是小于 5 的偶数",用集合列举法表示下列事件:$\Omega, A, B, C, A+B, A-B, B-A, AB, AC, \overline{A}+B$.

解 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$A=\{1,3,5\}$;

$B=\{1,2,3,4\}$;

$C=\{2,4\}$;

$A+B=\{1,2,3,4,5\}$;

$A-B=\{5\}$;

$B-A=\{2,4\}$;

$AB=\{1,3\}$;

$AC=\varnothing$;

$\overline{A}+B=\{1,2,3,4,6\}$.

5. 甲、乙、丙三人各射一次靶,记 A——"甲中靶",B——"乙中靶",C——"丙中靶",则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件:

(1)"三人中至少有一人中靶"——$A+B+C$;

(2)"三人中至少有两人中靶"——$AB+AC+BC$;

(3)"三人中至多一人中靶"——$A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(4)"三人中至多两人中靶"——$\overline{ABC}$.

写出上述事件的其他表示方法.