微積分學

黃守中
張季信
程綸
合譯

周家樹
張鴻基
校訂

中華書局印行

民國二十六年五月印刷
民國二十七年七月再版

大學用書 微積分（全一册）

◎實價國幣一元
（郵運匯費另加）

原著者 W. M. Baker
譯者 黃守中 張季信 程綸
校訂者 周家樹 張鴻基

發行者 中華書局有限公司 代表人 路錫三
印刷者 中華書局印刷所 香港九龍北帝街
總發行處 中華書局發行所
分發行處 各埠中華書局
（一一四八九）

原序

此書爲微積分之大意,其分配曾試教於初學班而後定,乃獲得此科之實用智識之捷徑也.

微分及積分標準形式之較簡者,務使早日能應用於面積,弧長,旋轉體積,及極大極小值之決定,與力學中及物理學中問題之解法,以及簡單之三角函數之展開式.

習題及復習題約共七百五十,其選擇與分配均經過愼重之考慮.

有時於習題下附以略解.

編者對於此書之讀者,假定已有由方程式作圖之經驗及下列各科之智識.

代數至二項式定理及指數定理.

三角至三角形之解法.

動力學及靜力學之大綱.

除上列者外,尙有解析幾何中直線與圓之一部份,常時應用,但不甚重要耳.

余之同事Hyett先生之供獻及證題之校閱,編者謹

陳謝意.

習題之答案,用穿孔頁附印於後,以便教者撕去亦可.

書後並附有索引.

目 次

常數表

以下常數於習題中常用之.

$\pi=3.1416$. $\frac{1}{\pi}=.31831$.

一立方呎水之重量$=62.3$磅.

一竏水之重量 $=1$兛.

一立方糎水之重量$=1$克.

自然對數之底$=e=2.7183$.

$og_{10}e=0.4343$.

$log_{e}10=2.3026$.

微積分學

第一章

函數　極限值　微分係數

§1. 函數　若 $y=x^2+2x$, 可知

當	$x=0$	1	2	3
則	$y=0$	3	8	15

此處 x 與 y 有如此之關係,即其中一變數之值若有變動,則他一個之值亦必有相當之變動.

當二量有如此情形之關係時,則此量稱爲彼量之函數,而二量均謂之變數.

其一謂之**自變數**,則他一謂之**因變數**.

自變數爲可給予以任何值之量;因變數則爲一經給予自變數以數值後其值卽因以決定之量.

當變數有兩個或多於兩個時,常任擇其一爲自變數.

x 之函數常以 $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ 等符號記之.有時因便利而用字母 U,V,W 以記 x 之函數.如 ax^2+bx+c, $\sqrt{a^2-x^2}$, $sinx$, tan^2x, $1+sin^2x$ 皆 x 之函數.

在研究呈 $y=f(x)$ 形式之方程式時,常以 x 爲自變數,則 y 當然爲因變數.

§2. 極限值　在等比級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

中,n 項之和 $=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

當項數增加,則 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 漸次縮小;即當使 n 充分大時,此級數之和連續漸近於 2,而終與 2 差一任意甚小之數.

故可云此級數至無窮項之和爲 2.

此亦即下文之省語:所取之項數愈多,則其和愈近似於 2.因 n 無論若何大,其和決不確爲 2.

有時表以

$$\underset{n=\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2.$$

試就 $\frac{(1+x)^n-1}{x}$ 一式論之.當使 $x=0$ 時,此式呈 $\frac{0}{0}$ 之形式,爲無意義,又稱爲不定式.

由二項式定理,若 $x<1$,在 n 爲任何值時,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n\overline{n-1}}{\lfloor 2}x^2+\frac{n\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$

$$\therefore\ \frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{1}{x}\left[nx+\frac{n\overline{n-1}}{\lfloor 2}x^2+\frac{n\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{\lfloor 3}x^3+\cdots\right]$$

$$=n+\frac{n\overline{n-1}}{\lfloor 2}x+\frac{n\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{\lfloor 3}x^2+\cdots$$

若 x 連續減小漸近於零,則式中凡第一項以後之各項連續減小而終成爲零.

即當 $x=0$ 時,此極限 $\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$,

或　　$\underset{x=0}{Lt}\left[\frac{(1+x)^n-1}{x}\right]=n.$

以下二式爲三角學中所常見者;

$\underset{x=0}{Lt}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1.\quad \underset{x=0}{Lt}\left(\frac{\tan x}{x}\right)=1.$　(參看32頁)

要留心記着此卽是下列文句之省語:卽謂當 x 無限減小時此二式連續漸近於壹,又由所取之 x 有充分小,則可使之與壹相差一任意甚小之數.

當 $x=a$ 時求 $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ 之極限值.

若使 $x=a$ 則此式成 $\frac{0}{0}$ 之形式爲不定式.今使 $x=a+h$ 而 h 爲一微量,則

原式 $=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}$

$=2a+h$　　　h 可以任意小.

故若 h 連續減小,此式連續漸近於 $2a$.

$\therefore$ 當 $x=a$ 時 $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ 之極限值爲 $2a$.

此際務要記着,這就是下文之省語:卽謂當 x 連續漸近於值 a, 此式 $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ 連續漸近於值 $2a$,且可使與之相差一任意微數.

§3. 記法　若 y 爲 x 之任何函數,則以 Δx, Δy 各爲 x 及 y 之相當變動或增長,

如　$y=x^2$,　　$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$;

„　$y=\sin x$,　　$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$;

„　$y=f(x)$,　　$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$

增長本可正可負,但實際上常以 x 之增長爲正.

微分係數

§4. 定義 若$f(x)$爲x之任何函數，$f(x+\Delta x)$爲$x+\Delta x$之同一函數，**則當使Δx無限小時$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$之極限值，謂之$f(x)$對於$x$之微分係數.**

若$y=f(x)$，而Δx，Δy爲x及y之相當增長，則

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

$$\therefore \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

故若y爲x之任何函數，而Δx，Δy爲x及y之相當增長，**則當使Δx無限小時$\frac{\Delta y}{\Delta x}$之極限值爲$y$對於$x$之微分係數.**

學者須熟悉此定義之兩種形式.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$之極限值亦用$\frac{dy}{dx}$之符號記之.

此定義中假定$\frac{\Delta y}{\Delta x}$有一極限.

導來式 微分係數有時稱爲導來式或導來函數.

例題一 求x^2對於x之微分係數.

設$y=x^2$，Δx，Δy，爲x及y之相當增長，則$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$.

由減法 $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$.

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

故至極限時(即Δx爲無限小)

$$\frac{dy}{dx}=2x.$$

例題二　若$y=x^5$,求$\dfrac{dy}{dx}$之值.

設$\triangle x$及$\triangle y$為x及y之相當增長,則

$$y+\triangle y=(x+\triangle x)^5.$$

又　$y=x^5$.

∴由減法　$\triangle y=(x+\triangle x)^5-x^5$

$$=x^5+5x^4\triangle x+\frac{5.4}{1.2}x^3(\triangle x)^2$$

$+$含$\triangle x$高次乘方之各項$-x^5$

(二項式定理)

∴$\dfrac{dy}{dx}=5x^4+10x^3\triangle x+$含$\triangle x$乘方之各項.

∴至極限時$\dfrac{dy}{dx}=5x^4$.

例題三　若$y=3x^2+5x-4$,求$\dfrac{dy}{dx}$之值.

設$\triangle x$及$\triangle y$為x及y之相當增長,則

$$y+\triangle y=3(x+\triangle x)^2+5(x+\triangle x)-4.$$

又　$y=3x^2+5x-4$.

∴由減法　$\triangle y=6x\triangle x+3(\triangle x)^2+5\triangle x$

$$\therefore\frac{\triangle y}{\triangle x}=6x+5+3\triangle x.$$

∴至極限時即當$\triangle x=0$時$\dfrac{dy}{dx}=6x+5$.

例題四　若$y=\dfrac{1}{3t-4}$,求$\dfrac{dy}{dt}$之值.

設$\triangle t$及$\triangle y$為t及y之相當增長,

則　$y=\dfrac{1}{3t-4}$,　$y+\triangle y=\dfrac{1}{3(t+\triangle t)-4}$.

∴由減法　$\triangle y=\dfrac{1}{3(t+\triangle t)-4}-\dfrac{1}{3t-4}$

$$=\frac{-3\triangle t}{[3(t+\triangle t)-4](3t-4)}.$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle y}{\triangle t}=\frac{-3}{[3(t+\triangle t)-4](3t-4)}.$$

∴ 至極限時卽當 $\triangle t=0$ 時, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-3}{(3t-4)^2}$.

[註] $\dfrac{dy}{dt}$ 爲 y 對於 t 之微分係數.

常數之微分係數爲零.

設 $y=a$ 式中 a 爲任何常數.

a 不能變動,故 y 不能變動.

$$\therefore \triangle y=0.$$

故無論 $\triangle x$ 爲何值 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=0$.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=0.$$

若讀者已知微分係數爲速度量數,而 $\dfrac{dy}{dx}$ 所代表者爲 $y=f(x)$ 圖解上切線之斜率,此點或較易於了解.

習題一a

求以下之極限值.

1. $\dfrac{x^2-3ax+2a^2}{x-a}$ 當 $x=a$ 時. 2. $\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$ 當 $x=1$ 時.

3. $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$ 當 $x=1$ 時. 4. $\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2-4}$ 當 $x=2$ 時.

就下列各題求其對於變數之微分係數.

5. ax^2. 6. x^3. 7. ax^2+bx+c.

8. x^7. 9. $6x^9$. 10. ax^3+bx^2.

11. $8t-14t^2$. 12. $ut+\frac{1}{2}ft^2$,式中 u 及 f 爲常數.

13. $\dfrac{1}{x}$. 14. $\dfrac{1}{x^2}$. 15. $(x+1)(x+4)$.

16. $\frac{1}{x+2}$. 17. $\frac{4}{x-2}$. 18. $\frac{1}{1-x}$.

19. $\frac{10}{v^2}$. 20. $\frac{8}{v-2}$. 21. $\frac{1}{3x-4}$.

22. $(1-x)(1-3x)$. 23. x^2+3x+1. 24. $(1+x)(1-2x)$.

§5. 求證在 n 為任何值時 $\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$.

設 $y=x^n$, $\triangle x$, $\triangle y$, 為 x 及 y 之相當增長,則 $y+\triangle y=(x+\triangle x)^n$.

由減法 $\triangle y=(x+\triangle x)^n-x^n$

$$=x^n\left[\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)^n-1\right]$$

$$=x^n\left[\frac{n\triangle x}{x}+\frac{n\overline{n-1}}{\lfloor 2}\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^2+\text{含}\triangle x\text{高次乘方之各項}\right]$$

(二項式定理,參看本節註)

$$\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x}=x^n\left[\frac{n}{x}+\frac{n\overline{n-1}}{\lfloor 2}\frac{\triangle x}{x^2}+\text{含}\triangle x\text{乘方之各項}\right].$$

故至極限時 $\frac{dy}{dx}=\frac{nx^n}{x}=nx^{n-1}$.

故可知 $\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$. n 可為任何數,整數分數正數或負數均可.

〔註〕由二項式定理所得 $(1+x)^n$ 之展開式,只當 n 為負數或分數時始成聚性;即只當 x 小於壹時,含算術之意義.在此情形,可使 $\triangle x$ 為任意微數,或竟為零.故可使 $\frac{\triangle x}{x}$ 小於壹.

例題 $\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,

$$\frac{d(x^{-7})}{dx}=-7x^{-8}.$$

求 x 任何乘方之微分係數,可乘以指數而將指數減壹.

若 a 爲常數, u 爲 x 之函數,則 au 對於 x 之微分係數爲 $a\frac{du}{dx}$.

設 $y=au$ 而 $\triangle y, \triangle u, \triangle x$, 爲 y, u,及 x 之相當增長,則 $y+\triangle y=a(u+\triangle u)$.

由減法　$\triangle y=a\triangle u$,　$\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x}=a\frac{\triangle u}{\triangle x}$.

$\therefore$ 至極限時 $\frac{dy}{dx}=a\frac{du}{dx}$.

例題　$\frac{d}{dx}(ax^2)=2ax$.　$\frac{d}{dx}(c^2x^n)=nc^2x^{n-1}$.

各項之和之微分係數等於各項微分係數之和.

設 $y=u+v-w\cdots\cdots$, 式中 $u, v, w,\cdots\cdots$ 皆爲 x 之函數, 又設 $\triangle y, \triangle u, \triangle v, \triangle w,\cdots\cdots$ 爲 $y, u, v, w,\cdots\cdots$ 之相當增長,則 $y+\triangle y=u+\triangle u+v+\triangle v-w-\triangle w\cdots\cdots$.

由減法　$\triangle y=\triangle u+\triangle v-\triangle w\cdots\cdots$,

$$\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\triangle u}{\triangle x}+\frac{\triangle v}{\triangle x}-\frac{\triangle w}{\triangle x}\cdots\cdots,$$

故至極限時　$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}\cdots\cdots$.

例題

(1)　$$\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)=\frac{d}{dx}(ax^2)+\frac{d}{dx}(bx)+\frac{d}{dx}(c)$$
$$=2ax+b.$$

(2)　$$\frac{d}{dx}(x^3+x^{-3})=3x^2-3x^{-4}.$$

(3) 若 $y=\frac{1}{(x-3)^6}$, 求$\frac{dy}{dx}$.

設 $\triangle x, \triangle y$ 為 x 及 y 之相當增長,則$y=(x-3)^{-6}$

又 $y+\triangle y=(x+\triangle x-3)^{-6}$.

$$\therefore \triangle y=(x-3+\triangle x)^{-6}-(x-3)^{-6}$$

$$=(x-3)^{-6}\left[\left(1+\frac{\triangle x}{x-3}\right)^{-6}-1\right]$$

〔註因 $\triangle x$ 可為任意微數,故$\frac{\triangle x}{x-3}$可使之小於壹〕

$$=(x-3)^{-6}\left[-\frac{6\triangle x}{x-3}+\frac{6.7}{1.2}\frac{(\triangle x)^2}{(x-3)^2}+\text{含}\triangle x\text{乘方之各項}\right].$$

〔二項式定理〕

$$\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x}=(x-3)^{-6}\left[-\frac{6}{x-3}+\frac{3.7\triangle x}{(x-3)^2}+\text{含}\triangle x\text{乘方之各項}\right]$$

故至極限時 $\frac{dy}{dx}=(x-3)^{-6}\times\frac{-6}{x-3}=-6(x-3)^{-7}$.

(4) 若 $y=x^3+8x^2-7x+5$, 求 $x=2$ 時$\frac{dy}{dx}$之值.

$$\frac{dy}{dx}=3x^2+16x-7.$$

當 $x=2$, $\frac{dy}{dx}=3\times4+16\times2-7=37$.

習題一$_b$

由第一原則求下列各題中$\frac{dy}{dx}$之值.

1. $\sqrt{x}$. **2.** $x^{\frac{5}{2}}$. **3.** x^{-4}. **4.** x^{-n}.

5. $(3x+1)^6$. **6.** $\frac{1}{(1-x)^4}$. **7.** $\frac{1}{(a+x)^5}$.

8. $(x+a)^n$, 式中 n 為任何值.

9. $(ax+b)^n$, n 為任何值.

10. $ax+b+\frac{c}{x}$. **11.** $\frac{1}{1+x^2}$. **12.** $\frac{1}{a+bx^2}$.

13. $\sqrt{3x-5}$. [以 $y=\sqrt{3x-5}$, 則 $y^2=3x-5$].

14. $\sqrt{1+x^2}$. 15. $\sqrt[3]{1+x}$. 16. $\sqrt[3]{2+5x}$.

17. $(5x-7)^{-8}$. 18. $(a-bx)^{-n}$. 19. $(1-x)^{\frac{3}{2}}$.

20. $(2-3x)^{-\frac{1}{3}}$. 21. $\frac{a-x}{x}$. 22. $\frac{a+bx}{\sqrt{x}}$. 23. $\sqrt{1+x}$.

$(x+1)^{\frac{1}{2}}$

求下列微分係數之值.

24. x^2+2x, 當 $x=1$ 時. 25. x^3-3x^2+3x-1, 當 $x=2$ 時.

26. ax^2+bx+c, 當 $x=0$ 時.

27. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$, 當 $x=1$ 時.

28. 若 $x^2+y^2=4$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 之值,以 x 及 y 表之.

29. 若 $y^2=4ax$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 之值,以 x 及 y 表之.

30. 若 $y^2=ax^2+bx+c$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 之值,以 x 及 y 表之.

31. 若 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 之值,以 x 及 y 表之.

習題一$_c$ (口答)

筆答或口答下列各式中對於變數之微分係數.

1. $\frac{1}{x}$. 2. $\frac{1}{x^2}$. 3. x^{-4}. 4. ax^7.

5. x^{-7}. 6. $x^{\frac{5}{2}}$. 7. $x^6+ax^5-bx^4$. 8. ax^{-n}.

9. a^2x^2+bx+c. 10. $\frac{c}{x}$. 11. $\frac{a}{x^3}$.

12. $\frac{x^3+ax^2+b}{x}$. 13. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b}{x}$. 14. $px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}$.

15. $1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}$. 16. $\frac{x^{10}}{\underline{|10}}-\frac{x^9}{\underline{|9}}+\frac{x^8}{\underline{|8}}$.

17. $\frac{x^n}{\underline{|n}}+\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}+\frac{x^{n-2}}{\underline{|n-2}}$. 18. $x^{-3}+x^{-1}$.

19. $(1+x)(1+2x)$. 20. $(x+1)(x+1)$.