高职高专"十一五"公共基础课教学改革规划教材
高职高专数学立体化教材

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

吴巧兰◎主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

附赠光盘

高职高专“十一五”公共基础课教学改革规划教材
高职高专数学立体化教材

高 等 数 学

主　编　吴巧兰
参　编　王兰兰　刘跃武
主　审　李维东

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据高职高专院校数学课程的大纲编写而成的。它具有两大特点：一是结合数学建模体现了以应用为目的、以必须够用为度的原则；二是通过与专业知识结合，培养学生的实践能力。

主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分与定积分，空间解析几何与向量代数，多元函数微分法及其应用，常微分方程。

本书可作为高职高专类院校、成人高等院校及本科二级院校等各专业的教材，也可供经济管理类各专业选用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/吴巧兰主编. —北京：机械工业出版社，2010.8

高职高专“十一五”公共基础课教学改革规划教材

高职高专数学立体化教材

ISBN 978-7-111-30994-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 150328 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：王玉鑫 责任编辑：李大国 责任校对：常天培

封面设计：王伟光 责任印制：乔 宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2010 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 15 印张 · 370 千字

0001—4000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-30994-9

ISBN 978-7-89451-635-0(光盘)

定价：29.00 元(含 1CD)

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销 售 一 部：(010)68326294

销 售 二 部：(010)88379649

读者服务部：(010)68993821

网络服务

门户网：http://www.cmpbook.com

教材网：http://www.cmpedu.com

序

高职高专教育是我国一种新的教育类型，它所培养的人才是高素质的技能型专门人才，因而它的人才培养模式、教学体系必然与本科院校有着本质的区别，与之相应的教材建设与改革也就必然要突出高职高专的特色，绝不可能是本科院校的“压缩版”。

数学学科一直被称为“科学的皇后”，它以系统性、逻辑性、严谨性和抽象性而著称。在高职高专的数学教学过程中如何体现职业院校所要求的实践性、开放性和职业性，数学理论与专业实践结合，深度和广度以“够用为度”等一系列矛盾均有待研究与解决。

迄今为止，虽有一些高职高专版的数学教材面世，但与本科院校的同类教材相比数量毕竟太少，而且大部分教材经历教学实践检验的时间尚短。

本着“百花齐放，百家争鸣”的原则，广州现代信息工程职业技术学院等高职高专院校的部分数学教师根据这些年来的高职教学实践和学习教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》(教高【2006】16号)文件的精神编写了本书。在本书的编写过程中，力求做到培养学生用数学思维分析解决实际问题的能力、把实际问题转化为数学模型的能力、求解数学模型的能力，以及用数学知识解决所学专业上的一些问题的能力。尤为可贵的是作者结合现代教学的要求制作了多媒体光盘，其中包括多媒体教案、习题讲解、综合实训等模块，有助于在教学过程中实现“教、学、做一体化”。

值本书即将出版之际，谨希望以此书贡献给同行们研讨交流，并希望在高职高专的数学教学领域中有更多的精品教材面世。

司徒忠

2010年4月20日于广州

前　言

为落实高职高专学校培养高素质技能型人才的需要，更好地贯彻教高【2006】16号文件，在总结全国高职高专学校数学课程教学改革经验的基础上，我们编写了本套教材。

一、编写原则

1. 本书是依据教育部高职高专《基本要求》编写的，内容覆盖高职高专学校各专业对高等数学的需求。基本内容按72学时编写，36学时课堂理论教学，36学时实例实训现场教学。

2. 注重贯彻“轻理论、重应用”的教学原则。“轻理论”是对概念、原理以基本了解为要求，不重论证；“重应用”则强调学生能方便地用所学数学方法求解数学模型，并根据专业不同配有相关实例。

3. 对难度较大的基础理论不追求严格的论证，只作简单的几何说明，以够用为度。

4. 注意数学自身的系统性与逻辑性。

5. 特别注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不追求过分复杂的计算和变换。

6. 在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力的培养。

二、编写特色

高职高专院校的数学教育需培养如下四方面的能力：一是用数学思维分析解决实际问题的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力；四是用数学知识解决所学专业上的一些问题的能力。本书充分体现了上述教学思想，并具有以下特点：

1. 本书采用实例引题，让学生带着问题进行有目的的学习，接着是数学理论基础知识，最后是实例解题讨论部分。这样安排内容既突出了“以应用为目的，以必需、够用为度”的教学原则，又加强了对学生应用意识及能力的培养。

2. 书中结合具体教学内容编入了有关数学模型，培养学生求解数学模型的能力，对调动学生学习的积极性具有重要作用。

3. 突出强调数学知识与专业知识的连接，提高学生学习数学的目的性。

4. 对本课程的一些难点(如极限的定义、中值定理等)结合高职高专的特点，做了深入浅出的讲述，强调了直观描述和几何解释，适度淡化了理论证明或推导，强化了几何说明。

5. 将分散于微积分各部分的数值计算集中在一起，并适当扩充后用数值分析的观点结合计算机进行处理。不但优选了微积分在几何、物理方面的应用实例，而且通过经济应用实例挖掘了微积分在经济领域中的应用。

6. 增加了向量微积分的内容，扩展了向量的应用。

7. 本教材配有电子课件，包括基本内容、综合实例分析和习题详解等内容。

8. 在保证《基本要求》的条件下，充分吸收了同类学校的教改成果，对教学有指导意义。

三、适用范围

本书可作为高职高专类院校、成人高等院校及本科二级院校等各专业的教材，也可供经济管理类专业选用。

本书的基本学时为72学时，标有 * 号的内容要另行安排学时。

本书由吴巧兰主编，参加编写的老师还有刘跃武、王兰兰。吴博能、陈伟达参与了部分稿件的录入工作。

李维东教授承担了本书的审稿工作，他认真审阅了全稿，并提出了许多有价值的意见；司徒忠教授为本书写了序。在此，编者对他们表示衷心的感谢。

由于水平有限，加之时间仓促，本书难免存在不妥之处，敬请读者斧正。

编　者

目　　录

第一章　函数、极限与连续

本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步理解函数的概念，为技能训练打下基础．函数是高等数学的主要研究对象，是刻画变量关系的数学模型．极限概念是微积分的理论基础，运用极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将在理解函数概念的基础上，介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

第一节　函数——变量相依关系的数学模型

案例：路程问题．

某人骑车到离家20km的单位上班，上午8点他以12km/h的速度匀速前进，半小时后，他发现未带资料，便以18km/h匀速原路返回，在家停留10min，找到资料后，以15km/h匀速前进，请用尽可能多的方法表示此人离家的距离．

由此我们引出函数的概念．

一、常量与变量

1. 变量的定义

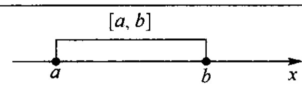
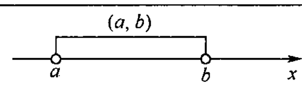
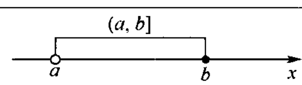
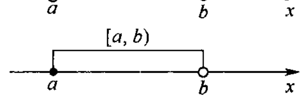
在观察某一现象的过程中，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中是不发生变化的，称为**常量**；有的量在过程中是不断变化的，称为**变量**．

注意：在过程中还有一种量，它虽然是变化的，但是由于它的变化相对于所研究的对象来说是极其微小的，所以也把它看做常量．

2. 变量的表示

如果变量的变化是连续的，则常用**区间**来表示其变化范围．在数轴上来说，区间是指介于某两点之间的线段上点的全体．见表1-1．

表　1-1

区间的名称	区间的满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开区间	$a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$	$(a,b]$ 或 $[a,b)$	

以上我们所述的都是有限区间，除此之外，还有无限区间：

$[a,+\infty)$：表示不小于 a 的实数的全体；

$(-\infty,b)$：表示小于 b 的实数的全体；

$(-\infty,+\infty)$：表示全体实数.

注意： $-\infty$ 和 $+\infty$，分别读作"负无穷大"和"正无穷大"，它们不是数，仅仅是记号.

二、邻域

设 a，$\delta\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，数集 $\{x \mid |x-a|<\delta, x\in\mathbf{R}\}$，即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体，称为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，点 a 与数 δ 分别称为该邻域的中心和半径. 有时用 $U(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域. 数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta, x\in\mathbf{R}\}$，称为点 a 的空心 δ 邻域，记作 $\overset{0}{U}(a,\delta)$.

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),\ \overset{0}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

三、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**. 变量 x 的变化范围叫做这个函数的**定义域**. 通常 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**.

注：(1) 为了表明 y 是 x 的函数，我们用记号 $y=f(x)$、$y=F(x)$ 等来表示. 这里的字母"f"、"F"表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系，它们是可以任意采用不同的字母来表示的.

(2) 如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 这里我们只讨论单值函数.

四、函数的常用表示法

(1) 表格法　将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法.

例如，在实际应用中，经常会用到的平方表，三角函数表等都是用表格法表示的函数.

(2) 图示法　用坐标平面上曲线来表示函数的方法即是图示法. 一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量.

例如，在直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆用图示法表示为(图 1-1)：

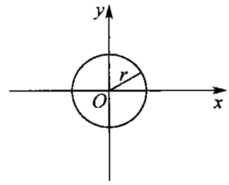


图　1-1

(3) 解析法(公式法)　用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法.

例如，直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是：$x^2+y^2=r^2$.

根据函数的解析表达式的形式不同，函数也可以分为显函数、隐函数和分段函数三种：

(1) 显函数　函数 y 由 x 的解析表达式直接表示. 例如：$y=x^2+1$.

(2) 隐函数　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定. 例如：$\ln y=\sin(x+y)$.

(3) 分段函数　函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式.

例 1　设 $y=f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，求 $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

解　$y\Big|_{x=\frac{2}{\pi}}=f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

例 2　设 $f(x+1)=x^2-3x$，求 $f(x)$.

解　令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，所以

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4,$$

即

$$f(x)=x^2-5x+4.$$

五、函数特性

1. 函数的有界性

如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那么就称 $f(x)$ 在区间 I 有界，否则便称无界.

注意：一个函数，如果在其整个定义域内有界，则称为有界函数.

例如，函数 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

2. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而增大，即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加**的.

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而减小，即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减小**的.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减小的，在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 叫做偶函数.

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 叫做奇函数.

注意：偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$，若存在一个不为零的数 l，使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内任何 x 值都成立，则 $f(x)$ 叫做**周期函数**，l 叫做 $f(x)$ 的周期.

注意：我们说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

习题 1-1

1. 求函数 $y=\frac{1}{x}\ln(x+1)$ 的定义域.

2. 设函数$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求$f(0)$，$f(-x)$，$f(x)+1$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$和$\frac{1}{f(x)}$.

3. 若$f(x+1)=x^2+2x-3$，求$f(x)$.

4. 设$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$，求$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$和$f(3)$.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；　(2) $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$；

(3) $f(x)=x^2-3x+1$；　(4) $f(x)=|\sin x|$；

(5) $f(x)=x+\sin x$；　(6) $f(x)=x(x-1)(x+1)$.

6. 旅客乘坐飞机可免费携带不超过20kg的行李，若超过20kg，每千克交运费a元，试建立运费y与行李重量x的函数关系.

第二节　初 等 函 数

一、反函数

1. 反函数的定义

设有函数$y=f(x)$，若变量y在函数的值域内任取一值y_0时，变量x在函数的定义域内必有一值x_0与之对应，即$f(x_0)=y_0$，那么变量x是变量y的函数. 这个函数用$x=\varphi(y)$来表示，称为函数$y=f(x)$的反函数.

注意：由此定义可知，函数$y=f(x)$也是函数$x=\varphi(y)$的反函数.

2. 反函数的存在定理

若$y=f(x)$在(a,b)上严格增(减)，其值域为**R**，则它的反函数必然在**R**上确定，且严格增(减).

注意：严格增(减)即是单调增(减).

例如，$y=x^2$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$. 对于y取定的非负值，可求得$x=\pm\sqrt{y}$. 若我们不加条件，由y的值就不能唯一确定x的值，也就是在区间$(-\infty,+\infty)$上，函数不是严格增(减)，故其没有反函数. 如果我们加上条件，要求$x\geqslant 0$，则对$y\geqslant 0$、$x=\sqrt{y}$就是$y=x^2$在要求$x\geqslant 0$时的反函数，即函数在此要求下严格增(减).

3. 反函数的性质

在同一坐标平面内，$y=f(x)$与$x=\varphi(y)$的图形是关于直线$y=x$对称的.

例如，函数$y=2^x$与函数$y=\log_2 x$互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线$y=x$对称的，如图1-2所示.

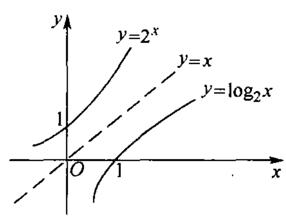


图　1-2

二、基本初等函数

微积分的研究对象，主要为初等函数，而初等函数是由基本初等函数组成的.

我们最常用的基本初等函数有：

常数函数　$y=C$(C为常数)；

幂函数　$y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$；

指数函数　$y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq1)$；

对数函数　$y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq1)$；

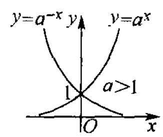
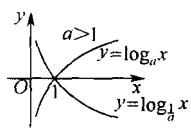
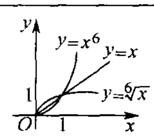
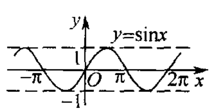
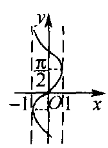
三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

以上函数统称为**基本初等函数**. 很多时候也把多项式函数 $y=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{1}x+a_{0}$ 看做基本初等函数.

下面用表格来把它们总结一下，见表 1-2：

表　1-2

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^{x}(a>0,a\neq1)$		a）不论 x 为何值，y 总为正数 b）当 $x=0$ 时，$y=1$
对数函数	$y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$		a）其图形总位于 y 轴右侧，并过(1,0)点 b）当 $a>1$ 时，在区间(0,1)的值为负；在区间($-\infty$，$+\infty$)的值为正；在定义域内单调增
幂函数	$y=x^{a}$（a 为任意实数）	这里只画出部分函数图形的一部分	令 $a=\frac{m}{n}$ a）当 m 为偶数 n 为奇数时，y 是偶函数 b）当 m，n 都是奇数时，y 是奇函数 c）当 m 奇 n 偶时，y 在($-\infty$,0)无意义
三角函数	$y=\sin x$（正弦函数） 这里只写出了正弦函数		a）正弦函数是以 2π 为周期的周期函数 b）正弦函数是奇函数且 $\lvert\sin x\rvert\leqslant1$
反三角函数	$y=\arcsin x$（反正弦函数） 这里只写出了反正弦函数		由于此函数为多值函数，因此我们将函数值限制在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，并称其为反正弦函数的主值

三、复合函数

定义 1　若 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称后一个函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫

做中间变量.

注意：并不是任意两个函数就能复合；复合函数还可以由更多函数构成.

例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的. 因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$中的任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于2)，使 $y=\arcsin u$ 都没有定义.

定义2 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$的值域为 R_φ，若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为 x 的复合函数. 其中，x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量.

注意：(1) 把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，这个复合过程实际上是把中间变量依次代入的过程；

(2) 把一个复合函数分解为几个较简单的函数，这些较简单的函数往往是基本初等函数或是基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数.

例1 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$，$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

例2 设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数.

解 $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\dfrac{x}{2}$.

例3 函数 $y=e^{\sin x}$是由哪些简单函数复合而成的?

解 令 $u=\sin x$，则 $y=e^u$，故 $y=e^{\sin x}$是由 $y=e^u$，$u=\sin x$ 复合而成的.

例4 将 $y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$分解成基本初等函数的复合.

解 所给函数是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=w^2$，$w=\sin x$ 四个函数复合而成.

四、初等函数

由基本初等函数，经过有限次四则运算及有限次复合而成的，并且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

在工程技术上常用的初等函数有双曲函数，分别为：

双曲正弦函数 $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数 $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，

双曲正切函数 $\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$.

分段函数一般不是初等函数. 今后我们讨论的函数，绝大多数都是初等函数.

例5 分解 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$.

解 令 $u=\sin(1+3x^2)$，得 $y=e^u$；再令 $v=1+3x^2$，得 $u=\sin v$，故 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=1+3x^2$复合而成的.

习题 1-2

1. 设 $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$和 $f\{f[f(x)]\}$.
2. 函数 $y=5^{(2x-1)^2}$是由哪几个函数复合而成.
3. $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$及其定义域.
4. 求下列函数的反函数：

（1）$y=7x-5$；　　（2）$y=1+\lg(x+2)$.

5. 设$f(\sin x)=\cos 2x+1$，求$f(x)$.

6. 设$f(x)=\begin{cases}|\sin x| & x<1\\ 0 & x\geqslant 1\end{cases}$，求$f(1)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

7. 下列函数由哪些简单函数复合而成？

（1）$y=\cos 5x$；　　（2）$y=\sin^3 x$；

（3）$y=e^{\sin 3x}$；　　（4）$y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$.

第三节　极限的概念——从截丈问题谈起

极限的思想是由于求某些实际问题的精确解而产生的. 例如，我国春秋战国时期的哲学家庄子(公元前4世纪)在《庄子 · 天下篇》中对“截丈问题”有一段名言：“一尺之棰，日截其半，万世不竭”.

一、数列的极限

两个数列：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \tag{1}$$

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots \tag{2}$$

在数轴上的表示分别如图1-3、图1-4所示.

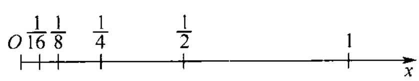


图　1-3

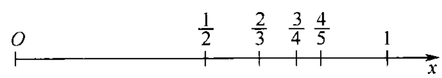


图　1-4

数列(1)中的项无限趋近于0，数列(2)中的项无限趋近于1.

定义1　当数列$\{a_n\}$的项数n无限增大时，如果a_n无限地趋近于一个确定的常数A，那么就称这个数列存在极限A，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，读作“当$n$趋向于无穷大时，$a_n$的极限等于$A$”. 符号“$\to$”表示“趋向于”，“$\infty$”表示“无穷大”，“$n\to\infty$”表示“$n$无限增大”. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$有时也记作

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时，} a_n\to A\text{，或 } a_n\to A\text{，}(n\to\infty).$$

若数列$\{a_n\}$存在极限，也称数列$\{a_n\}$收敛；若数列$\{a_n\}$没有极限，则称数列$\{a_n\}$发散.

注意：（1）判断一个数列有无极限，应该分析随着项数的无限增大，数列中相应的项是否无限趋近于某个确定的常数，如果这样的数存在，那么这个数就是数列的极限，否则数列的极限就不存在.

（2）常数数列的极限都是这个常数本身.

二、函数的极限

自变量x的变化过程：

（1）x的绝对值$|x|$无限增大(记作$x\to\infty$)；

（2）x 无限接近于某一值 x_0，或者说 x 趋向于 x_0（记作 $x\to x_0$）.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

$x\to\infty$ 包含以下两种情况：

（1）x 取正值，无限增大，记作 $x\to+\infty$；

（2）x 取负值，它的绝对值无限增大（即 x 无限减小），记作 $x\to-\infty$.

若 x 不指定正负，只是 $|x|$ 无限增大，则写成 $x\to\infty$.

例 1 讨论函数 $y=\dfrac{1}{x}+1$ 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的变化趋势.

解 作出函数 $y=\dfrac{1}{x}+1$ 的图像，如图 1-5 所示.

当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{x}+1\to1$，因此当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{x}+1\to1$.

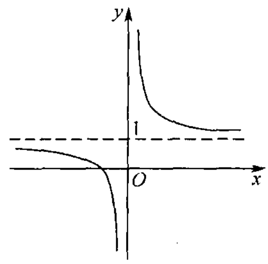


图 1-5

定义 2 如果当 $|x|$ 无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时存在极限 A，称数 A 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

类似地，如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时存在极限 A，称数 A 为当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\left(\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\right).$$

例 2 作出函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图像，并判断下列极限：

（1）$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$；　　（2）$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x$.

解 函数的图像如图 1-6 所示，从图像可以看出：

（1）$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$；

（2）$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x=0$.

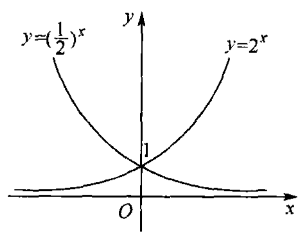


图 1-6

例 3 讨论下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限：

（1）$y=1+\dfrac{1}{x^2}$；　　（2）$y=2^x$.

解 函数 $y=1+\dfrac{1}{x^2}$ 的图像如图 1-7 所示，可见

（1）当 $x\to+\infty$ 时，$y=1+\dfrac{1}{x^2}\to1$；

当 $x\to-\infty$ 时，$y=1+\dfrac{1}{x^2}\to1$.

因此，当$|x|$无限增大时，函数$y=1+\dfrac{1}{x^2}$无限地接近于常数1，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1.$$

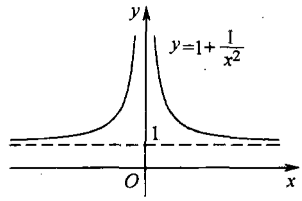


图 1-7

（2）当$x\to+\infty$时，$y=2^x\to+\infty$；当$x\to-\infty$时，$y=2^x\to0$.

因此，当$|x|$无限增大时，函数$y=2^x$不可能无限地趋近某一个常数，即$\lim\limits_{x\to\infty}2^x$不存在.

结论：当且仅当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在并且相等为$A$时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在为$A$，即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

2. 当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限

$x\to x_0$包含以下两种情况：

（1）$x\to x_0^+$ 表示x从大于x_0的方向趋近于x_0；

（2）$x\to x_0^-$ 表示x从小于x_0的方向趋近于x_0.

记号$x\to x_0$表示x无限趋近于x_0，对从哪个方向趋近没有限制.

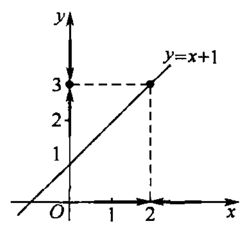


图 1-8

例4 讨论当$x\to2$时，函数$y=x+1$的变化趋势.

解 作出函数$y=x+1$的图像，如图1-8所示. 不论x从小于2的方向趋近于2，或者从大于2的方向趋近于2，函数$y=x+1$的值总是随着自变量x的变化从两个不同的方向越来越接近于3，所以说

当$x\to2$时，$y=x+1\to3$.

例5 讨论当$x\to1$时，函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势.

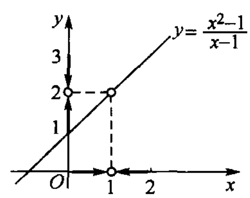


图 1-9

解 作出函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的图像，如图1-9所示. 函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,\infty)$，在$x=1$处函数没有定义，$x$不论从大于1或从小于1两个方向趋近于1时，函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的值是从两个不同方向越来越接近于2的. 我们研究当x趋近于1函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势时，并不计较函数在$x=1$处是否有定义，而仅关心函数在$x=1$的邻近$(x\in\overset{0}{U}(1,\delta))$的函数值的变化趋势，也即我们认为在$x\to1$时隐含一个要求：$x\neq1$. 因此，当$x\to1$时，$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}\to2$.

定义3 如果当$x\neq x_0$，$x\to x_0$时，函数$f(x)$无限地趋近于一个确定的常数A，那么就称当$x\to x_0$时$f(x)$存在极限A；数A就称为当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例6 求下列极限：

（1）$f(x)=x$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$；（2）$f(x)=C$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，（$C$为常数）.

解 （1）因为当$x\to x_0$时，$f(x)=x$的值无限趋近于x_0，所以有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.