微分几何讲义

周建伟 编著

科学出版社
www.sciencep.com

苏州大学研究生优秀教材建设资助项目

微分几何讲义

周建伟　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以主丛与矢丛上的联络为主线介绍现代微分几何，全书分两部分，各5章. 前3章给出微分流形的基本概念，把欧氏空间的微积分推广到微分流形上. 第4, 5章分别讨论Riemann流形与李群及李代数. 第6, 7章分别介绍纤维丛理论与复流形，其中7.6节证明球面S^6上没有可积的等距复结构. 第8章介绍示性类，其中8.7节用示性类讨论Milnor的7维怪球. 第9章介绍Clifford代数与旋量群. 第10章介绍Atiyah-Singer指标定理、规范场论与Seiberg-Witten方程. 本书内容丰富，纲目清楚，论证严谨，易于学习.

第1~5章可以作为高年级本科生或研究生一学期的微分流形课程教材，第6~10章可以作为微分几何研究生教材，也可作为数学工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微分几何讲义/周建伟编著. —北京：科学出版社，2010

ISBN 978-7-03-028107-4

Ⅰ. 微…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 微分几何-教材　Ⅳ. O186.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010) 第118122号

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2010年7月第 一 版　开本：B5 (720 × 1000)
2010年7月第一次印刷　印张：39 1/4
印数：1—2 500　字数：776 000

定价：98.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

这是一本微分几何的入门书, 介绍如何把欧氏空间的微积分等理论推广到微分流形上, 以主丛与矢丛上的联络为主线介绍现代微分几何.

粗略地说, 几何学的发展史就是空间的发展史. 例如, 非欧几何的发现是否定欧氏几何的平行公理而得到一种新的几何空间, 从而产生的新的几何学. 它说明欧氏几何的平行公理不是空间所固有的性质, 而是加在空间上的先验性假定, 这使得空间的概念有了革命性的突破. 而笛卡儿坐标的引进, 使得代数方法进入几何学, 产生了解析几何, 为用微积分研究几何与拓扑铺平了道路. 欧氏空间的曲线与曲面本身也是一种空间, 把它们抽象推广就得到不依赖于外围空间的微分流形. 微分几何研究微分流形的几何与拓扑性质.

微分几何内容丰富, 与许多其他数学分支如拓扑、方程、大范围分析、数论, 以及与理论物理等互相影响, 有许多运用, 近几十年来一直处于数学研究的中心. 微分流形已成为数学的基本概念与许多研究的基础, 它本身就集几何、代数、分析于一体. 本书在介绍新概念与定理证明时注意与已有知识的衔接与联系, 努力做到条理清楚, 论证严谨, 易于学习, 也注意介绍与其他数学分支的联系及运用. 书中有许多例题及习题, 并给出一些研究微分几何常用及典型的方法, 有助于理解消化理论知识, 扩大知识面.

本书分两部分, 第一部分包括: 第 1 章微分流形, 第 2 章外微分形式, 第 3 章联络, 第 4 章 Riemann 流形, 第 5 章李群. 第二部分包括: 第 6 章纤维丛理论, 第 7 章复流形, 第 8 章示性类, 第 9 章 Clifford 代数与旋量群, 第 10 章 Atiyah-Singer 指标定理. 第一部分可以作为高年级本科生或研究生的微分流形课程教材, 第二部分可以作为微分几何方向研究生的教材, 也可作为数学工作者的参考书.

前 3 章定义微分流形, 给出微分流形上的一些基本概念, 如切空间、微分形式、联络等, 并把欧氏空间的微分与积分推广到微分流形上. 第 4 章讨论微分流形的度量性质, Riemann 流形是在微分流形上每一点的切空间定义度量使之成为欧氏空间. 第 5 章介绍李群与李代数, 它们是研究微分流形几何与拓扑性质的重要工具, 本身也是数学的重要内容. 第 6 章介绍纤维丛理论, 重点介绍主丛及主丛上的联络理论. 第 7 章介绍复流形的一些基础知识, 其中 7.6 节讨论球面 S^{2n} 上的复结构, 证明在 S^6 上没有可积的等距复结构. 第 8 章介绍示性类的知识, 在 8.5 节讨论几种示性类之间的关系, 证明陈类与 Pontrjagin 类都可以用 Euler 类定义; 在 8.7 节用示性类讨论 Milnor 的 7 维怪球. 第 9 章介绍 Clifford 代数与旋量群, 给

出一些几何中的运用; Clifford 代数结合欧氏空间的线性结构与度量结构, 适合于微分几何的研究; 9.7 节用 Clifford 代数研究校准, 它们的积分子流形在这些子流形所在的同调类中体积最小, 也是极小子流形. 第 10 章介绍 Atiyah-Singer 指标定理, 这一定理揭示了流形上的几何、微分方程、拓扑、大范围分析等数学分支间的深刻联系; 利用第 9 章给出的旋量群的不可约表示空间证明四种经典椭圆算子都可以用 Atiyah-Singer 算子表示并建立 Seiberg-Witten 方程; 还介绍了规范场论与 Yang-Mills 方程的基础知识.

古典几何用公理法讨论, 不用坐标; 近代的解析几何采用仿射坐标或直角坐标, 这时坐标变换是仿射变换或正交变换; 而微分流形是利用拓扑空间与欧氏空间中开集的同胚映射定义流形上的坐标, 要求这样定义的坐标之间的坐标变换是微分同胚. 因此, 在微分流形上每一点的邻域上有无数多的坐标, 相应的坐标变换不再是线性的. 在微分几何中概念的定义一般不用坐标, 这使得这些概念显得抽象, 而这些概念的讨论与表示常要用坐标或局部标架. 微分几何的概念多, 计算也多, 这些都是学习微分几何的难点. 因此, 应该在基本概念上多下功夫, 多读数学论文与文献, 特别是一些著名几何学家的原始论文.

作者感谢苏州大学数学科学学院和研究生部对本书的写作与使用给予的支持, 感谢苏州大学研究生部给予的出版资助. 本书的编写参考了国内外许多文献, 借鉴了其中一些好的写法, 向这些文献的作者表示感谢.

由于作者学识有限, 有许多重要内容本书没有涉及, 也有许多内容只是介绍了一些但是没有深入讨论, 有兴趣的读者可以进一步学习研究. 限于本人的水平和经验, 书中不当之处在所难免, 恳请读者指正.

周建伟

2009 年 10 月于苏州

目　　录

第 1 章 微分流形

流形是欧氏空间中曲线、曲面的自然推广. 粗略地说, 流形是一个拓扑空间, 它的每一点有邻域与欧氏空间中的开集同胚. 因此, 流形可以看成由欧氏空间的一些开集利用同胚映射粘起来的, 由于粘贴的方法不同, 可以得到各种不同的流形. 研究流形的方法很多, 可以用分析、代数拓扑、微分拓扑、纤维丛理论等方法. 本书作为微分流形与 Riemann 几何的入门书, 介绍如何把欧氏空间的微积分理论推广到微分流形上, 以主丛与矢丛上的联络为主线介绍现代微分几何.

这一章介绍微分流形的一些基本概念, 1.1 节给出微分流形的定义, 介绍一些微分流形的例子. 1.2 节和 1.3 节讨论微分流形上的线性结构, 定义切空间、余切空间、向量场等重要概念. 1.4 节和 1.5 节讨论子流形及 Frobenius 定理.

1.1 微分流形的定义及例子

微分流形上许多概念的定义都源于欧氏空间的结构与性质, 在定义微分流形之前, 首先简单回顾欧氏空间的性质.

1.1.1 欧氏空间

以 $\mathbb{R}$ 表示实数的集合, $\mathbb{R}^n = \{x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \mid x^i \in \mathbb{R}\}$ 是实数域上的 n 维线性空间. 对任意 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \cdots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$x + \lambda y = (x^1 + \lambda y^1, x^2 + \lambda y^2, \cdots, x^n + \lambda y^n)$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性运算.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

定义了欧氏内积, $\mathbb{R}^n$ 称为一个欧氏空间. $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ 可以作为向量, 也可以看作欧氏空间中点. $|x| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中向量的长度,

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2}$$

是点 x, y 的距离. 如果对 $\mathbb{R}^n$ 的子集 U 上每一点 x_0 有 $\varepsilon > 0$, 使得

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x_0, x) < \varepsilon\} \subset U,$$

称 U 是开集, 这使得 $\mathbb{R}^n$ 成为一个拓扑空间, 定义的拓扑叫做欧氏拓扑, 这一拓扑具有很好的性质. $\mathbb{R}^n$ 中所有的开球体 $\{B(x,\varepsilon)\}$ 构成欧氏空间的一个拓扑基, $\mathbb{R}^n$ 中任一开集可以由这样的开球生成.

下面简单回顾 $\mathbb{R}^n$ 上函数的微分与求导运算.

设 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集上一个函数, 如果 f 在 U 上每一点都有直至 r 阶的各种偏导数, 且这些偏导数在 U 上连续, 则称 f 是 r 阶的可微函数, 也简称 f 是 C^r 的, U 上所有这样的函数记为 $C^r(U)$. 特别, $f \in C^0(U)$ 是 U 上的连续函数. 如果 f 有任意阶各种连续的偏导数, 称 f 是 C^∞ 的. 如果 f 在开集 U 上每一点附近可以展开成收敛的 Taylor 级数, 称 f 是 U 上的解析函数. U 上全体解析函数记为 $C^\omega(U)$.

如果 f 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的开集 U 到欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 的映射, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, 表示为 $y = f(x) = (f^1(x), f^2(x), \cdots, f^m(x))$. 同样可以定义 f 的各种可微概念, 如果 f 的每一个分量函数 $f^\alpha(x)\colon U \to \mathbb{R}$ 是 C^r 的, 称 f 是 C^r 的. 如果 $r \geqslant 1$, 存在映射 f 的 Jacobi 矩阵

$$\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

其中每个 $\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}$ 是 U 上的 C^{r-1} 函数, $i = 1, \cdots, n,\ \alpha = 1, \cdots, m$.

如果选用 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 上不同的欧氏坐标, 映射 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ 的表达式不同, 这时 f 的 Jacobi 矩阵也不同. 下面给出可微的另一定义, 这种定义更适合把微分推广到流形之间的映射.

定义 1.1.1　设 $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 连续, 对于开集 U 上点 c, 如果存在线性映射 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 使得

$$\lim_{x \to c} \frac{|f(x) - f(c) - \varphi(x - c)|}{|x - c|} = 0,$$

称映射 f 在 c 处可微, φ 是 f 在 c 处的微分.

定义中欧氏空间之间映射的微分是线性映射, 下面的性质说明这一定义与上面由分量函数可微给出的可微定义的关系.

性质 1.1.1　如果 f 在 c 处可微, 那么微分是唯一的. 在 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 上取定的欧氏坐标下, $y = f(x)$, 线性映射 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 可以表示为 $\left(\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(c)\right)$.

证 设 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ 在 c 处可微. 在 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 上欧氏坐标下, 设线性映射 φ 的矩阵是 $(a_{\alpha i})$, 对任意 $x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i} x^i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi} x^i \end{pmatrix}.$$

因此

$$|f(x) - f(c) - \varphi(x-c)|^2 = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[f^\alpha(x) - f^\alpha(c) - \sum_i a_{\alpha i}(x^i - c^i) \right]^2.$$

不难知道 $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{|f(x) - f(c) - \varphi(x-c)|}{|x-c|} = 0$ 等价于下式对于 $\alpha = 1, \cdots, m$ 成立

$$\lim_{x \to c} \frac{\left| f^\alpha(x) - f^\alpha(c) - \sum\limits_i a_{\alpha i}(x^i - c^i) \right|}{|x - c|} = 0.$$

取 $x = (c^1, \cdots, c^{i-1}, c^i + t, c^{i+1}, \cdots, c^n)$, 由上式可得

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f^\alpha(c^1, \cdots, c^{i-1}, c^i + t, c^{i+1}, \cdots, c^n) - f^\alpha(c) - a_{\alpha i} t|}{|t|} = 0.$$

因此 $a_{\alpha i} = \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(c)$, 线性映射 φ 在取定的欧氏坐标下为 $\left(\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(c)\right)$.

反之, 如果 $\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(c)$ 都存在, 则 f 在 c 处是可微的.

设 U, V 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个开集, 如果映射 $F\colon U \to V$ 与它的逆映射 $F^{-1}\colon V \to U$ 都是连续的, $F\colon U \to V$ 是同胚映射, 称开集 U 与 V 是同胚的. 进一步, 如果 F 与 F^{-1} 都是可微的, $F\colon U \to V$ 是微分同胚.

1.1.2 微分流形的定义

我们知道, 一个拓扑空间 X 上的拓扑结构是定义了开集、闭集等概念. 它的任意个开集 $U_1, U_2, \cdots$ 的并集 $U_1 \cup U_2 \cup \cdots$ 是开集; 任意有限个开集 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ 的交集 $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ 也是开集; 一个开集 U 的余集 $X - U$ 是闭集. 设 p 是拓扑空间 X 上一点, U 是包含 p 的开集, 称 U 是 p 的开邻域, 简称为 p 的邻域. 对于 X 的子集 A, 如果 $a \in A$ 有邻域 U 使 $U \subset A$, 称 a 是 A 的内点; 而对 X 中点

$b \notin A$, 如果 b 的任意一个邻域都与 A 相交, 称 b 是 A 的一个聚点或极限点, A 与它的所有聚点所成集合称为 A 的闭包, 记为 $\overline{A}$, 它是一个闭集. 如果对拓扑空间 X 中任意两点 p, q, 分别有不相交的邻域 U, V, 称拓扑空间 X 是 Hausdorff 的. 容易知道, 前面由欧氏空间距离定义的欧氏拓扑是 Hausdorff 的.

定义 1.1.2 设 M 是一个 Hausdorff 的拓扑空间, 如果 M 上每一点存在开邻域与 $\mathbb{R}^m$ 中开集同胚, 称 M 是一个流形, m 是流形的维数.

由定义, 欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 以及它的开集都是流形. 圆 S^1 上每一点有邻域同胚于 $\mathbb{R}^1$ 中开集, 因此 S^1 是一个 1 维流形. 同理, 球面 S^2 是一个 2 维流形.

对于拓扑空间 M 的子集 N, 如果 U 是 M 的开子集, 称 $U \cap N$ 是 N 的开集, 这定义了 N 上的拓扑结构, 称为由 M 决定的诱导拓扑.

假设图 1-1-1 中平面上的图形都具有 $\mathbb{R}^2$ 的诱导拓扑. 对照定义, 这些图形都不是流形. 图中 (a), (b) 除去点 p, q, r, 每一点有邻域与 $\mathbb{R}$ 的开区间同胚, 而点 p, q, r 的邻域不能与 $\mathbb{R}$ 的开区间同胚, 因此 (a), (b) 中图形不能是流形. 图中 (c) 不是流形是由于一点与 $\mathbb{R}$ 的开区间的维数不同, 点 s 是 0 维的. (d) 是平面上一个圆及它的内部点构成, 它的边界点 (即圆上的点) 的邻域不能像其他点的邻域那样与欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中开集同胚.

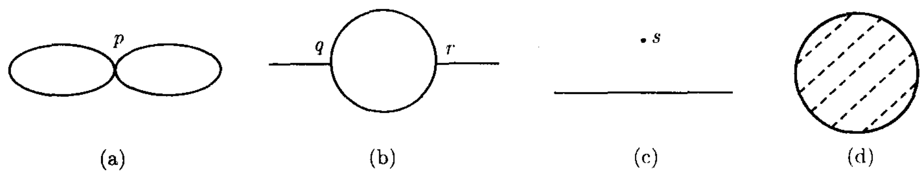

图 1-1-1

定义 1.1.2 要求流形的拓扑是 Hausdorff 的, 见下例.

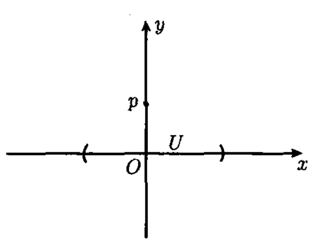

图 1-1-2

例 1.1.1 如图 1-1-2, 设 $M = \{p\} \cup \{x$ 轴上的所有点$\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集, p 是坐标为 $(0, 1)$ 的点. 定义 M 上拓扑如下: x 轴同胚于 $\mathbb{R}$; 如果 U 是 $O(0, 0)$ 在 x 轴上的一个开邻域, $(U - \{O\}) \cup \{p\}$ 也是 p 的开邻域. 这样定义的拓扑使 M 上每一点都有邻域与 $\mathbb{R}$ 中开集同胚. 但由 M 上拓扑的定义, 点 O 与 p 的邻域总有交点, 因此 M 不是 Hausdorff 的, 不能成为流形.

设 M 是一个 m 维的流形, 由定义, 对任意 $p \in M$ 存在邻域 U 及同胚

$$\varphi_U : U \to \varphi_U(U) \subset \mathbb{R}^m.$$