西安交大考研

2011版 数学考研

考点精讲 方法精练

数学一和数学二

主 编 龚冬保

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

内容提要

本书是专门针对考研复习编写的教材，内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点，本书建立了与普通教材不同的体系；针对考研的特点，突出基本功和综合运用、应试能力的训练，对于数学知识，着重于分析问题和解决问题的能力，全面而有重点地覆盖了所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材，也可用于考生自学，同时也可供就读本科的各专业的大学生参考。

作者在网上为本书读者免费答疑，时间：2010 年 7 月下旬至 2011 年 1 月考试前；答疑信箱：glsdy@126. com

图书在版编目(CIP)数据

2011 版. 数学考研考点精讲方法精练 数学一和数学二/龚冬保主编.
—5 版. —西安：西安交通大学出版社，2010. 5
ISBN 978 - 7 - 5605 - 3534 - 0

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①龚… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 070145 号

书　　名 2011 版数学考研考点精讲方法精练(数学一和数学二)
主　　编 龚冬保
责任编辑 叶涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址 http://www. xjtupress. com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 西安市新城区兴庆印刷厂

开　　本 787mm×1 092mm　1/16　**印张** 28. 25　**字数** 868 千字
版次印次 2010 年 5 月第 5 版　2010 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978 - 7 - 5605 - 3534 - 0/O · 332
定　　价 38. 60 元

读者购书、书店添货如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo. cn

2011 版前言

——兼释 2010 年的部分试题

拿到 2010 年考研的三套数学试卷后，像往年一样，与我们所编写的几本辅导书(《数学考研考点精讲方法精练》《数学考研典型题》《数学考研模拟考试试卷》，分别简称：《精讲精练》、《典型题》、《模拟试卷》")作了对比，除了考点、题型的覆盖率很高之外，今年的试题与我们书中一些几乎一样的题更多了一些，而且我们书中介绍的一些特殊的解题方法与技巧，可以使这些题做起来又快捷又不易出错. 以下我们选出一部分今年的试题作为例题，讲述于下.

一、客观题

例 1 设函数 $z=z(x,y)$，由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$. 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $=$

(A) x　　(B) z　　(C) $-x$　　(D) $-z$　　[　　]

解 令 $F(u,v)=u+v$，则由 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 可得 $z=-y$. 于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=-y=z$. 故选(B).

例 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，$r(\boldsymbol{A})=3$ 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

[　　]

解 由于任何矩阵与自身相似，令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$，便知满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，故选(D).

以上是我们介绍的"特殊试验"法，当然只适用于选择题. 平时做题，应将此方法与基本方法结合起来练习.

例 3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)}$　　(B) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x \frac{dy}{(1+x)(1+y)}$

(C) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y)}$　　(D) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)}$　　[　　]

解 此题属"积分和"型的极限，既可视为二重积分，也可用定积分作. 明显可看出(D)是正确选项.

用二重积分解：就是把正方形：$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant y\leqslant 1\}$ 均匀分成 n^2 个面积为 $\dfrac{1}{n^2}$ 的小正方形：

$\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{i-1}{n}\leqslant x\leqslant\dfrac{i}{n};\dfrac{j-1}{n}\leqslant y\leqslant\dfrac{j}{n}\right\}$ 中作积分微元：$\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 作

和的极限即得

$$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)};$$

用定积分解：可由$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)} = \int_0^1\frac{dx}{1+x}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}$.

分别将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $0\leqslant y\leqslant 1$ 各 n 等分即有

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i};$$

$$\int_0^1\frac{dy}{1+y^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{j^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}$$

故$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$.

例 4　函数 $y=\ln(1-2x)=0$，在 $x=0$ 点处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$ ________.

解　此题出在数学二试卷上，根据考试大纲，不能用泰勒级数，故用泰勒公式. 同样比较 x^n 项系数可得

$$\frac{1}{n!}y^{(n)}(0)=-\frac{2^n}{n}\qquad \therefore\ y^{(n)}(0)=-2^n\cdot(n-1)!$$

即填 $-2^n(n-1)!$

例 5　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

解　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}$ 故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}=3$.

此题与《精讲精练》(数学一和数学二）中例 10.8 和(数学三）中例 7.8 基本一样. 例题要难些.

今年唯一出乎意料的是下面一道“超纲”的题：

例 6　设 m、n 是正整数，则反常积分$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性.

(A) 仅与 m 的取值有关　　　(B) 仅与 n 的取值有关

(C) 与 m、n 的取值都有关　　　(D) 与 m、n 的取值都无关　　　[　　]

解　首先，$x=0$ 和 $x=1$ 都是暇点. 在 $x=0$ 点有：$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$，而$\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$，故反常积分总是收敛的；在 $x=1$ 点，由 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)^{\varepsilon}\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=0$. $\varepsilon>0$ 可任意小，故收敛也与 m、n 无关. 故选(D).

由于《考试大纲》中从未提及反常积分收敛判别法，所以本题应属“超纲”题. 希望今后试卷中不要出现这样的题！

二、计算题

例 7　求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

解　我们在《典型题》的附录中讲到不套公式，只用微积分运算的技巧解微分方程的方法. 下面这样来解此题：方程两边同乘 e^{-2x} 得

$$e^{-2x}(y'-y)'-2e^{-2x}(y'-y)=2xe^{-x}$$

即　$$[e^{-2x}(y'-y)]'=2xe^{-x}$$

两边积分得　$$e^{-2x}(y'-y)=-2xe^{-x}-2e^{-x}+C_1$$

再用 e^x 乘上方程两边，得　$$[e^{-x}y]'=-2x-2+C_1e^x$$

积分得　$$e^{-x}y=-x^2-2x+C_1e^x+C_2.$$

即得解　$$y=-(x^2+2x)e^x+C_1e^{2x}+C_2e^x$$

例 8 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定，$\psi(t)$ 二次可导，且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$. 已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求 $\psi(t)$.

解 由 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\ddot{\psi}\dot{x}-\dot{\psi}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$ 得关于 $\psi(t)$ 的微分方程：$(1+t)\ddot{\psi}-\dot{\psi}=3(t+1)^2$. 由于系数是 t 的多项式，因此，我们可以预知 $\psi(t)$ 是 t 的三次多项式. 故设 $\psi(t)=at^3+bt^2+ct+d$

由 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$ 得 $a+b+c+d=\dfrac{5}{2}$ (1)

$\psi'(1)=6$ 得 $3a+2b+c=6$ (2)

及将 $\psi(t)$ 代入方程得：$3at^2+6at+(2b-c)=3t^2+6t+3$.

得 $a=1,2b-c=3$. 代入(1)、(2) 得 $b=\dfrac{3}{2}$，$c=d=0$.

从而解得 $\psi(t)=t^3=\dfrac{3}{2}t^2$.

例 9 求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件：$x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

解 与此题几乎同样的题在我们所编的三种书上均有，而且我们都介绍了用"线性代数"相结合的方法求解这样的题：

设 $L(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2-z^2-10)$.

令 $L_x=y+2\lambda x=0$ (1)

$L_y=x+2z+2\lambda y=0$ (2)

$L_z=2y+2\lambda y=0$ (3)

(1)·x+(2)·y+(3)·z 得 $2(xy+2yz)+2\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$.

由 $x^2+y^2+z^2=10$，知 $xy+2yz\Big|_{极值}=-10\lambda$.

所以求出 λ 便可求得最值. 回到方程组(1)、(2)、(3) 是关于 x、y、z 的一次齐次方程组. 而 $x^2+y^2+z^2=10$ 说明此方程组有非零解. 故系数行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2\lambda & 2\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 2\lambda & 2\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(4\lambda^2-5)=0$$

而 $\lambda\neq0$，故得 $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，故最大值为 $5\sqrt{5}$，最小值为 $-5\sqrt{5}$.

这里用到连续函数 $xy+2yz$ 在闭域 $x^2+y^2+z^2=10$ 上必能达到最大值和最小值. 且最值即极值，这时 λ 只有两个值故对应大的 $5\sqrt{5}$ 最大，$-5\sqrt{5}$ 最小.

对于这道平凡的题，用微积分与线性代数综合的方法来解，过程显得快捷简便；而对于下面的这道综合性的例题，我们却要用平凡的方法去解.

解 10 设 P 为椭球面 S：$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})\,|\,y-2z\,|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

解 设 P 点坐标为(x,y,z)，则切平面法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2x,2y-z,2z-x\}$，与 z 轴垂直，得 $2z-x=0$.

故 P 点轨迹为 C：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=0\\ 2z-x=0\end{cases}$ 或 C：$\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1\\ 2z-y=0\end{cases}$. 所以 Σ 在 xOy 上投影是 $x^2+\dfrac{3}{4}y^2\leqslant1$.

而 $dS=\sqrt{1+\left(\dfrac{-2x}{2z-y}\right)^2+\left(\dfrac{2y-z}{2z-y}\right)^2}dxdy=\dfrac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-4yz}}{|\,2z-y\,|}dxdy$

$= \dfrac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|2z-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. （结果是看着被积函数化来的！）

$\therefore I = \iint\limits_{x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi$.（其中$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$）.

基本功好，并能灵活运用，像以上计算题是不用"草稿"就能做出的！所以平时一定要反复练习基本题，方能作到"熟能生巧"，解题时定能游刃有余.

例 11 （这是唯一非今年的考题，是我们《模拟试卷》第 2 套中的(21)题）：已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $f = 2y_1 - y_2^2 - y_3^2$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$，求 $f(x_1,x_2,x_3)$.

解 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 及 $|\boldsymbol{A}| = 2$ 知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于特征值 2 的特征向量，故 $\boldsymbol{Q}$ 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 由于其它两个特征值都是 -1，故 $\boldsymbol{Q}$ 的第二、三列可以取与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交又彼此正交的任意两个单位向量如 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{\alpha}_3 = (\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$. 于是 $\boldsymbol{Q} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，它的逆变换是

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{即} \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1+x_2-x_3) \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+x_3) \\ y_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1-x_2+x_3) \end{aligned}$$

故 $f = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = \frac{2}{3}(x_1+x_2+x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2+x_3)^2 - \frac{1}{6}(2x_1-x_2+x_3)^2$

$= 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

举这个例子是说我们这道模拟题与今年一道考题几乎一样，考题稍容易些：

例 12 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 此题比上题容易处在直接告之 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$ 是对应特征值为 0 的特征向量，记为 $\boldsymbol{\alpha}_3$，如上例可取 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$. 于是逆变换为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \quad \text{即} \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_3) \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

$$f = y_1^2+y_2^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_3. \text{故 } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

三、证明题

例 13 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内二阶可导，且 $2f(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = f(2)+f(3)$. 证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi) = 0$.

证 这里我们略去了问题(Ⅰ)，使问题略难一点. 将已知条件 $f(0) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(2)+f(3)}{2}$.

由连续函数的平均值定理，知存在 $\eta_1 \in [0,2]$，$\eta_2 \in [2,3]$，使 $f(0)=f(\eta_1)=f(\eta_2)$. 要往下走必须有 $\eta_1 \in (0,2)$. 所以积分中值定理得用微分中值定理来证明. 即设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(F(2)-F(0)) = F'(\eta_1) = f(\eta_1)$. 故 $\eta_1 \in (0,2)$. 因此在$[0,\eta_1]$，$[\eta_1,\eta_2]$上对 $f(x)$ 用罗尔定理知，存在 $\xi_1 \in (0,\eta_1)$，$\xi_2 \in (\eta_1,\eta_2)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. 再在$[\xi_1,\xi_2]$上对 $f'(x)$ 用罗尔定理得存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (0,3)$. 使 $f''(\xi)=0$

与这道类似的题近年来数学三考得很多，可参看《典型题》的附录.

例 14 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$，证明存在 $\xi \in (0,\frac{1}{2})$，$\eta \in (\frac{1}{2},1)$. 使 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

证 将结论改成 $f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0$. 便很容想到作辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$. 问题变成 $F'(\xi)+F'(\eta)=0$. 下面证明方法再自然不过了.

$$0=F(1)-F(0)=[F(1)-F(\frac{1}{2})]+[F(\frac{1}{2})-F(0)]=\frac{1}{2}[F'(\eta)+F'(\xi)]$$

不必我们往下写了，结论已得证明！

2010 年证明题比较容易，但估计得分率不高，原因是在平时数学中推理能力的训练很少. 所以读者仍要重视做证明题的思路和方法. 做题最好能一题多变和坚持一题多解. 如本题可变为：

例 15 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{1+m}$，证明存在 $\xi_i \in (\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$ $(i=1,2,\cdots,n)$，使 $\sum\limits_{i=1}^{n} f'(\xi_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^m$

证 令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{m+1}x^{m+1}$，则有

$0=F(1)-F(0)=[F(1)-F(\frac{n-1}{n})]+[F(\frac{n-1}{n})-F(\frac{n-2}{n})]+\cdots+[F(\frac{1}{n})-F(0)]$，用拉氏公式得，存在 $\xi_i \in (\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$，使 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}F'(\xi_i)=0$，即可得本题的证明.

总之，分析每一次的考试题，都会给我们带来一些启发，对准备今后的考试有利. 我们分析了 2010 年的部分试题，并就大多数题提出了一些快捷解题方法. 但仍要强调每位考生对您未来的考试要坚持做到"凡是考试的基本题都会作，凡是会作的题一定不错". 我们以上分析也是抛砖引玉，希望考生在复习迎考时要像这样去分析近年的所有考题，对今后的考试肯定会有帮助.

和往年一样，我们将于 2010 年 7 月下旬至 2011 年元月考试前，在网上回答阅读我们书的读者提出的问题. 答疑信箱：glsdy@126.com.

编　者

2010 春于西安交大

第 1 版前言

目前考研的数学辅导书很多，却没有一本专门指导考研复习使用的教材，广大考生很希望有这样的教材。为此，我们尝试编写了本教材，以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的《数学考试大纲》，全面系统地、有重点地、高效率地复习数学知识，取得好成绩。

复习是重复学习，不是重新学习。考研教材应与普通教材不同。首先，普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写，而考研教材不必受此拘束，可以从读者最熟悉的内容入手。比如高等数学部分，本书采取从微分法开始，以微分带积分，以积分促微分，使微积分紧密结合，深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次，普通教材着重一个一个地讲解知识单元，而考研教材则侧重于内容间的联系。如本书线性代数部分将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三，创立了一种新的体系，在逻辑顺序上更加符合考生的认识层次，更加适合于高效的复习。如概率论部分，先讲离散型随机变量的有关概率问题，再讲连续型随机变量的问题，再讲它们间的联系。第四，本书针对考研主要是考核解题能力的特点，安排了大量的例题，采用一题多解，一题多变的方式，侧重讲解题的思路、方法和技巧，培养读者灵活的分析能力和解决数学问题的能力。第五，根据编者多年辅导考研数学的经验，本书严格按《数学考试大纲》，从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点，又突出了重点，从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法，又突出了主要方法，特别考虑到考研试题中 70%左右的是基本题，本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大，对一些难题讲述，则侧重讲一道难题的思路，以及它与基本内容的联系，如何作到熟能生巧等等。第六，作为一本复习教材，本书还考虑要便于考生自学，因此，在许多题后附了不少注释，还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时，要一边看书一边自己动手推导，在读完一节后，最好将这一节书中的例题当作习题，自己独立做一遍，然后再作本章练习题，这样效果会更好。

本书既然是一本考研的复习教材，因此，书中对一些估计考生很熟悉的内容，一些定理的证明、公式的推导等略去不讲，如果想要知道相关的内容，可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎，更希望广大读者多提意见和建议，以使本书能改得更好，成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2006.3 修改于西安

目 录

第1章　一元函数微积分(一)

1.1　微积分的基本概念

复习与初学不同，作为考研的复习教材，本书体系与一般教材略为不同，目的是总结归纳已学过的知识，提高复习效率．本书是从一元函数微积分的基本概念入手，尔后转向微分和积分的基本运算．

1.1.1　函数 — 微积分的研究对象

高等数学主要研究函数 $y=f(x)$ 的微积分性质，因此学习时脑子里要多装些具体函数，当作一般抽象函数的模型用．首先，要熟记所有基本初等函数和一些常见的初等函数，以及它们的图象、增减性、奇偶性、周期性等等．以这些函数的性质深入理解一般函数的性质．比如 $y=f(x)$ 在某区间内恒有 $f''(x)>0$，曲线是向上凹还是向下凹?不少学生常常会记反了．而若以 $y=x^2$ 为模型，显然有 $y''=2>0$，曲线是向上凹的，记住这个模型，便永远不会记反了．

下面我们来举几个常用到的典型函数的例子．

例 1.1　函数 $y=|x|$ 的作用．

我们知道这是在 $x=0$ 点连续但不可导的例子．那么产生这样的问题：一个函数在某点不可导，另一个可导，它们的乘积是否可导?我们来考虑函数 x^n(n 为正整数)．

当 $n=1$ 时，函数 $f_1(x)=x|x|=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$

于是 $f'_1(x)=2|x|$，即 $f_1(x)$ 可导，但二阶导数不存在．

一般地，$f_n(x)=x^n|x|$ 有 $f'_n(x)=(n+1)x^{n-1}|x|$．于是由归纳法知 $f_n(x)$ 具有 n 阶导数，且 $f_n^{(n)}(x)=(n+1)!|x|$．$n+1$ 阶导数不存在．

例 1.2　同样典型的一个函数是 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

这是几乎每本教材上都要讲到的在 $x=0$ 点为无限振荡间断点的例题．我们一样来研究此函数乘上 x^n 的性态

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

当 $n=1$ 时，
$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

处处连续，但不可导；

当 $n=2$ 时，
$$\varphi'_2(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

可导，但导数不连续．一般地，当 $n>2$ 时

$$\varphi_n'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$n=3$ 时导数连续但二阶不可导；$n=4$ 时二阶可导但二阶导数不连续，由归纳法知：$\varphi_n(x)$，当 $n=2k$ 时，具有 k 阶导数，但 k 阶导数不连续；$n=2k+1$ 时，k 阶导数连续，但 $k+1$ 阶导数不存在.

例 1.3 狄里克利函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$

这是个处处不连续的函数；它是偶函数；它是以任何有理数 r 为周期的周期函数，却无最小正周期. 但是，复合函数 $D(D(x))=1$. 这给出了一个例子：两个处处不连续函数的复合函数非但可能连续，而且无限次的可导！

此外一些教材上介绍过的许多典型函数，如符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

这个函数表示任意实数 x 的符号. 因为 $|x|$ 表示 x 的大小，故有 $x\equiv\operatorname{sgn}x\cdot|x|$. 我们看到：$\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 点间断，$|x|$ 在此点不可导，但它们的乘积：$|x|\cdot\operatorname{sgn}x=x$ 却具有任何阶导数！

我们通过这几个例子，目的是告诉读者要学会用自己所熟悉的具体函数，去深入学习一般函数的性质.

1.1.2 极限 — 微积分的基本方法

从某种意义上说，高等数学就是用极限的方法研究函数的微分、积分和级数的性质. 因此正确理解极限概念，是十分重要的. 而极限总要与两个无限一起来理解，不要死记每种极限的定义.

比如 $\lim\limits_{x\to x_0}=A$，是说当 x 无限逼近 x_0 时，$f(x)$ 便无限逼近常数 A. 即动点 $f(x)$ 与定点 A 的距离 $|f(x)-A|$ 可无限小，对任意 $\varepsilon>0$，均可使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，而只要 $0<|x-x_0|<\delta$. 这就是函数在 x_0 点处极限的“$\varepsilon-\delta$”定义. 同样，数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，是说只要正整数 n 无限增大，便有 a_n 无限逼近 A. 读者可以凭此自己给出“$\varepsilon-N$”的定义以及所学过的各种极限的定义，而不必死记硬背.

极限与无穷小密不可分，表现在：

定理 $\lim y=A$ *的充要条件是：$y-A$ 是无穷小量.*

因此，极限的方法可归结为无穷小分析方法.

例 1.4 证明极限的唯一性.

证 不妨设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在. 用反证法. 若另有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=B\neq A$$

不妨设 $B>A$. 取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$，则存在 $\delta_1>0$，对一切 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 的 x，均有 $-\dfrac{B-A}{2}<f(x)-A<\dfrac{B-A}{2}$，即 $f(x)<\dfrac{B+A}{2}$ 成立. 另一方面，存在 $\delta_2>0$，对一切 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 的 x，均有：$-\dfrac{B-A}{2}<f(x)-B<\dfrac{B-A}{2}$，即 $f(x)>\dfrac{B+A}{2}$ 成立. 取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则对一切 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，既使 $f(x)<\dfrac{B+A}{2}$ 又使 $f(x)>\dfrac{B+A}{2}$. 矛盾. 说明只有 $B=A$.

例 1.5 在同一过程中，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=B$，且 $B>A$，则存在 $M>0$，对一切 $|x|>M$，均有 $g(x)>f(x)$.

证 取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$，则存在 $M_1>0$，对一切 $|x|>M_1$ 均有 $f(x)<\dfrac{B+A}{2}$；又存在 $M_2>0$，对一切 $|x|$

$> M_2$ 有 $g(x) > \frac{B+A}{2}$. 取 $M = \max(M_1, M_2)$，则对一切 $|x| > M$，均有 $f(x) < g(x)$ 成立.（证明过程中略去的步骤与例 1.4 的证明步骤相同）.

与极限概念并列的还有：无穷大量、无界变量、有界变量等概念. 这些变量间的联系和区别，经常会被考到.

例 1.6 设$\{x_n\}$是无界数列，$\{y_n\}$是无穷大量，$\{z_n\}$是无穷小量，则以下结论中正确的是（ ）.

(A) $\{x_n + y_n + z_n\}$ 无界. (B) $\{x_n + \frac{1}{y_n} + z_n\}$ 无界.

(C) $\{x_n + \frac{1}{z_n}\}$ 无界. (D) $\{\frac{1}{x_n + y_n} + z_n\}$ 是无穷小.

解 $\frac{1}{y_n} + z_n$ 是无穷小，x_n 无界，故 $x_n + \frac{1}{y_n} + z_n$ 无界，选(B). 可这样证明：存在 N_1，对一切 $n > N_1$ 有 $\left|\frac{1}{y_n} + z_n\right| < 1$. 而对任意 $M > 0$，存在 N_2，总有某个 $n > N_2$，使 $|x_n| > M+1$，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，总有 $n > N$，使

$$\left|x_n + \frac{1}{y_n} + z_n\right| \geqslant |x_n| - \left|\frac{1}{y_n} + z_n\right| > (M+1) - 1 = M.$$

我们再举例说明(A) 选项不一定成立. 可设 $x_n = -y_n$，则 x_n 也是无穷大也无界. 这时 $x_n + y_n + z_n = z_n$ 是无穷小量；(C) 选项不正确也是一样：若取 $x_n = -\frac{1}{z_n}$，则 $x_n + \frac{1}{z_n} = 0$；(D) 选项可选 $x_n = 1 - y_n$，则 $\frac{1}{x_n + y_n} + z_n = 1 + z_n \to 1$ 不是无穷小. 类似这样的选择题主要考概念：$\{x_n\}$是无界变量则也可以是无穷大量，而两个无穷大之和如 $x_n + y_n$ 与 $x_n + \frac{1}{z_n}$ 不一定是无穷大量，可以是无穷小、有界量或无穷大等等. 知道了这一概念解此题可立即排除(A)、(C)、(D) 三个选项，(B) 的结论可以不会证明，但题却做对了！

1.1.3 函数的连续性

函数 $y = y(x)$ 可以看成变量 y 随 x 的变化而变的量，任意给定 x 的增量 Δx，可得函数增量 $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. 当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y|$ 也很小，说明 y 随 x 变化是较稳定的，当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $\Delta y \to 0$，即若

$$\lim_{\Delta x \to 0} [y(x + \Delta x) - y(x)] = 0$$

就定义此函数 $y(x)$ 在 x 点是连续的. 换一种记法记 $x_0 + \Delta x = x$，则 $x \to x_0$，$y(x_0)$ 是常数. 所以连续的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y(x_0).$$

即：若函数在 x_0 点的极限值与函数值相等时，函数在 x_0 点连续；否则称函数在 x_0 点间断.

函数在 x_0 点是否连续，主要先看此点极限是否存在，而左、右极限存在并相等又是此点有极限的充要条件. 所以，间断点的分类也是由此而确定的.

1. **第一类间断点**. 左、右极限均存在的间断点，称为第一类间断点. 第一类间断点又分两种情况：

(1) 左、右极限存在且相等的间断点称为可去间断点. 典型例子是 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$，在 $x = 0$ 这一点. 我们知道

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 无定义. 若加一点的定义，如 $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$，则此函数处处连续.

(2) 左、右极限存在，但不相等的间断点，称为有限跳跃的间断点. 如符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 点是有限跳跃的间断点.

2. **第二类间断点**. 凡不属于第一类的间断点,便称为第二类间断点. 即在 x_0 点 $f(x)$ 的左、右极限至少有一个不存在的间断点. 常见的第二类间断点有

无穷型间断点. 如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,在 $x=0$ 点;

无限振荡型间断点. 如 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. $x=0$ 是无限振荡型的间断点.

1.1.4 导数、微分与不定积分

如果说"连续"是用极限定义的函数一个基本性质,那么,导数与微分是用极限定义的微积分学第一个最重要的概念.

导数. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$ 存在,便说 $f(x)$ 在 x_0 点可导,且称 $A=f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 点处的导数.

这里是函数增量与自变量增量之比的极限. 若当 $\Delta x\to 0$ 时,$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 不趋于 0,则比的极限必不存在,所以可导必连续. 在同一点处函数连续是可导的必要条件.

微分. 若函数 $f(x)$ 的增量可近似用与自变量增量成正比的量来表示,且其差是比 Δx 更高阶的无穷小量 $(\Delta x\to 0)$. 即 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$. 这时称 $f(x)$ 在 x_0 点可微分,且 $A\Delta x$ 称为其微分,记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

导数与微分的关系:函数 $f(x)$ 在 x_0 是可导的充要条件是:$f(x)$ 在 x_0 点可微,且 $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$.

证明. 必要性　由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

得 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$,故 $f(x)$ 可微.

充分性　由 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$,得

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$,故 $f(x)$ 可导,且 $A=f'(x_0)$.

不定积分. 若 $F(x)$ 在某区间 I 上可导,且 $F'(x)=f(x)$,则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 的一个原函数. 而记

$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,其中 C 是待定常数,称之为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分. 不定积分是原函数的一般表示形式.

1.1.5 定积分与反常(广义)积分

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义. 以下三步:

(1) 分割　在 $[a,b]$ 任意插入 $n-1$ 个分点 $x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,记 $\Delta_k=[x_{k-1},x_k]$,$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$. 并取任意 $\xi_k\in\Delta_k$,作 $f(\xi_k)\Delta x_k$.

(2) 求和　$\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$,记 $\lambda=\max\Delta x_k$.

(3) 取极限　$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$.

若此极限存在,且与分割方式和 ξ_k 的取法无关,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,并称此极限为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分. 记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

由上述定义知，$f(x)$ 在$[a,b]$上可积必有界.

可积的充分条件：$f(x)$ 在$[a,b]$上连续或分段连续必可积.

定积分的基本性质和牛顿-莱布尼兹公式.

线性性质. 若 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上可积，则

$$\int_a^b[c_1f(x)+c_2g(x)]\mathrm{d}x=c_1\int_a^bf(x)\mathrm{d}x+c_2\int_a^bg(x)\mathrm{d}x.$$

对区间的可加性质. 设 $f(x)$ 可积，则

$$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x=\int_a^cf(x)\mathrm{d}x+\int_c^bf(x)\mathrm{d}x.$$

其中 c 是任意实数.

比较性质与估值定理. 若在$[a,b]$中恒有 $f(x)\leqslant g(x)$.

则
$$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^bg(x)\mathrm{d}x.$$

特别若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，m、M 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值或最大值，则 $m(b-a)\leqslant\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

或
$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

此性质也叫估值定理. 其中$\frac{1}{b-a}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 在$[a,b]$区间的平均值.

定积分中值定理. 由连续函数介值定理知，存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x$.

变上限积分与微积分基本定理.

1° 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界可积，则

$F(x)=\int_a^xf(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上连续.

证 $F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x}-\int_a^x=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$（其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$）.

故当 $\Delta x\to0$ 时，$F(x+\Delta x)-F(x)\to0$，即 $F(x)$ 连续（当 $x=a$ 时，要求 $\Delta x\to0^+$；当 $x=b$ 时，$\Delta x\to0^-$ 是不言而喻的）.

2°（**微积分基本定理**）若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $F(x)=\int_a^xf(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导，且 $F'(x)=f(x)$.

证 由 1° 中所得 $F(x+\Delta x)-F(x)=f(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 及 $f(x)$ 连续性得 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x+\theta\Delta x)=f(x)$.

3°（**牛顿-莱布尼兹公式**）若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 任一原函数，则

$$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x=\varphi(x)\Big|_a^b=\varphi(b)-\varphi(a).$$

证 由 $\varphi'(x)=F'(x)=f(x)$ 知

$\int_a^xf(t)\mathrm{d}t=\varphi(x)+C$. 令 $x=a$ 得 $C=-\varphi(a)$.

再令 $x=b$ 得 $\int_a^bf(t)\mathrm{d}t=\varphi(b)-\varphi(a)$.

无界函数的广义（反常）积分.

设 $f(x)$ 在$[a,c)$和$(c,b]$上连续，而$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，则称积分$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x$ 是无界函数的广义积分，c 是 $f(x)$ 的无穷型间断点，称为暇点. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\int_a^{c+\Delta x}f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\int_{c+\Delta x}^bf(x)\mathrm{d}x$ 均存在，则称广义积分收敛. 否则，即上

述两极限至少有一个不存在，就称广义积分发散.

无穷限的广义积分.

若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，便称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称广义积分发散；若 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，且 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x$ 也存在，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，否则称为发散.

考研大纲只要求知道上述概念并会计算广义积分就行了，不要求用判别法证明广义积分的敛散性.

1.1.6 杂例

例 1.7 设 $f(x)=|\sin x|\,x\mathrm{e}^{\cos x}$，则 $f(x)$ 是（　　）.

(A) 有界函数　(B) 单调函数　(C) 周期函数　(D) 奇函数

解 选(D). 此题一看便知 $f(-x)=-|\sin x|\,x\mathrm{e}^{\cos x}=-f(x)$. 请读者自己想一想如何排除其他三选项.

例 1.8 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g(f(x))=$（　　）.

(A) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.　(B) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$.　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

解 选(B). 复合函数除了注意其定义域和值域外，基本上就是“代入”. 如本题

$$g(f(x))=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ 2+f(x), & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2-(-x), & x\geqslant 0\\ 2+x^2, & x<0\end{cases}.$$

本题既考了分段函数，又考到复合函数，是考试热点.

本题若改为求 $f(g(x))$，则

$$f(g(x))=\begin{cases}g^2(x), & g(x)<0\\ -g(x), & g(x)\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0\\ -x-2, & x>0\end{cases}.$$

例 1.9 设 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$，则 $f(x)$ 的可去间断点的个数为（　　）.

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 无限个

解 (C). 由分母为零的点是 $x=n$（任意整数），均是其间断点；而分子为零的点是 $x=0$ 和 ±1，由洛必达法则

$$\lim_{\substack{x\to0\\ \pm1}}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{x\to0\\ \pm1}}\frac{1-3x^2}{\cos\pi x}=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x=0\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}, & x=\pm1\end{cases}\ \text{存在}.$$

故 $x=0,\pm1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

例 1.10 我们来比较下面两道分别出自 2004 年工学和经济学试卷中的相似试题：

(1) 设 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使（　　）.

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 单增.　(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 单减.

(C) 对 $\forall x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.　(D) $\forall x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(2) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是（　　）.

(A) 至少存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$.