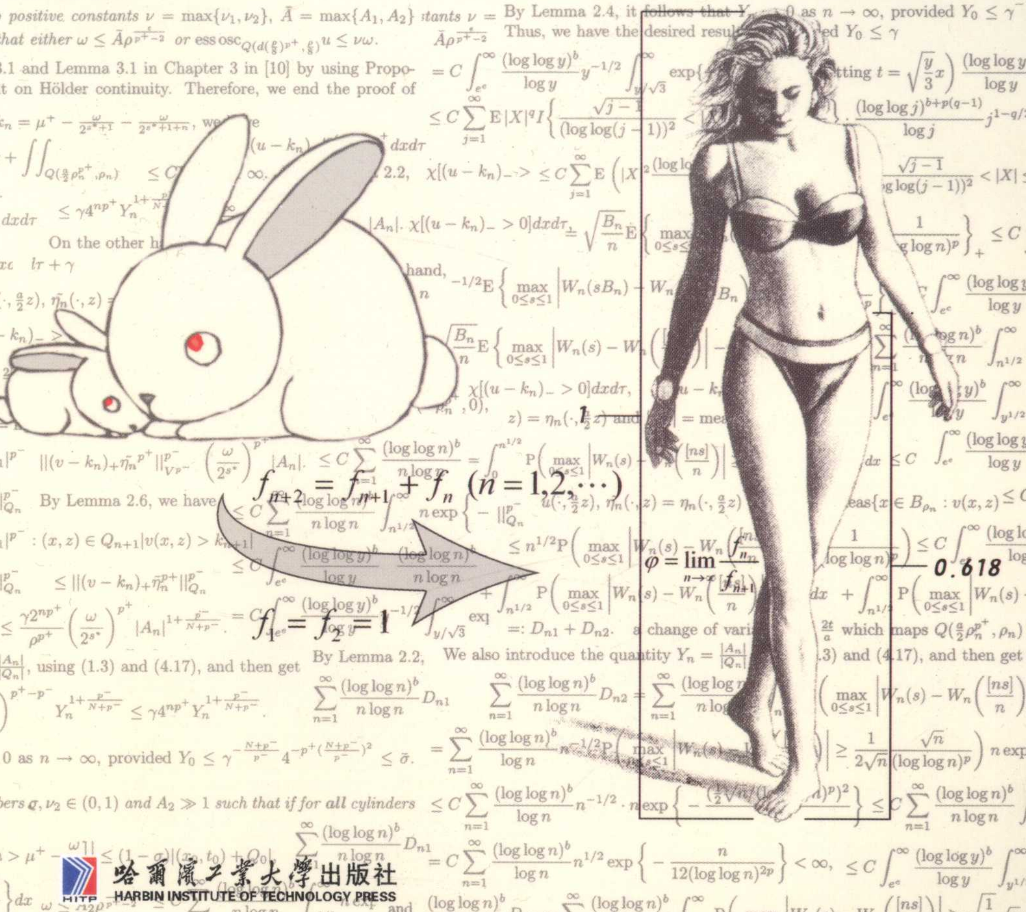
数学拼盘和斐波那契魔方

MATHEMATICAL ASSORTMENT AND FIBONACCI MAGIC

● 冯贝叶 编著

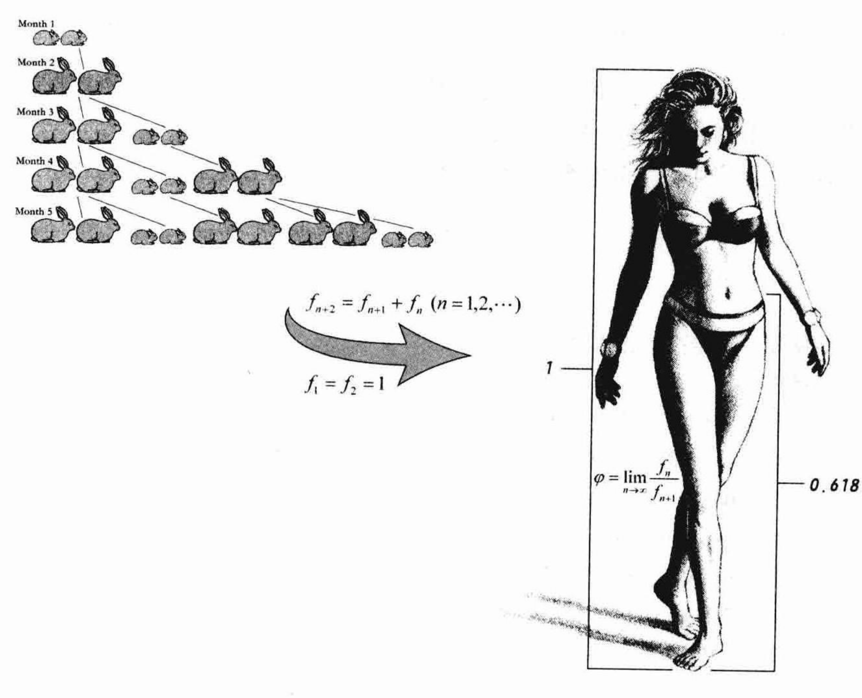


哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学拼盘和斐波那契魔方

MATHEMATICAL ASSORTMENT AND FIBONACCI MAGIC

冯贝叶 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书内容共分两部分，第一部分带有丰富的插图和问题，题材较具趣味性，属于科普性质，目的是让读者提高学习数学的兴趣和开阔眼界，拓展深度，但是其中也安排了一定量较有难度和深度的课题和问题，可供读者日后提高之用.具有初中至大学低年级水平的读者都可在其中找到适合自己的内容.本书第二部分虽然也包括了一些趣味性的内容，但专题性较强，集中介绍了和斐波那契数有关的内容和问题，其中大部分内容具有高中程度即可理解，但最后两节需要读者具有初等数论的知识，包括二次剩余的理论才能理解.

本书适合具有初中至大学低年级数学程度的学生、数学爱好者、中学和大学教师及有关的科研工作者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学拼盘和斐波那契魔方/冯贝叶编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.5

ISBN 978-7-5603-3029-7

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①冯…　Ⅲ.①数学-普及读物②斐波那契序列-普及读物　Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 085558 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　唐　蕾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 20.75　字数 381 千字
版　　次　2010 年 7 月第 1 版　2010 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3029-7
印　　数　1~3 000 册
定　　价　38.00 元

序言

本书由两编组成,第一编是拼盘性质,收集了一些编著者认为有兴趣的数学故事、传说和问题.同时,附有大量生动的插图以增加阅读的直观性和兴趣.第二编从头开始介绍与斐波那契数有关的一些问题.

内容的组织则是将轻松的享受与需要克服一些困难的思考紧密交织起来,基本在每一小节之后都安排了思考问题,这些问题大多与前面的内容有较密切的关系,其中有一些可以说是具有一定难度的,这是编著者刻意安排的一些制高点和暗堡,目的是使读者的思考有质量,同时也为使读者最后可以得到实在的收获,因此所有的问题最后都提供了解答.

具有初三至高中的数学基础即可理解本书第一章和第三章前七节的内容,而理解第三章最后两节,则需要包括二次剩余在内的系统的初等数论知识,这些知识可在书后的参考文献中找到.

本书对有关问题的处理采用了最新的资料.例如,关于斐波那契数的平方因子问题,一开始是一个猜想,到了 1964 年 J. H. E. Cohn 在 *The Fibonacci Quarterly* 杂志上发表了一篇文章,题为

Square Fibonacci numbers，终于解决了这一问题，其大部分证明都是比较初等的，但其核心引理仍需用到二次剩余的理论．同时文章的长度也有5页之多．30年后，这一问题已成为熟知的结果，以至有人又在 *The American Mathematical Monthly* 杂志每期末尾的问题与解答栏目中以问题的形式重提此题，解答仅需1页（见 *The American Mathematical Monthly* 问题10844）．其核心结果是证明了除了 $n=1$ 之外，其他奇数项的斐波那契数都不可能是一个完全平方数，以此为基础，利用"好的因子"这一概念就使其余的证明十分简单了，本书则用此方法解决了一大批类似问题．目前国内一些研究者还不知此结果，因而证明这些问题时所用的方法显得十分繁琐．不过问题10844的解答中所用的方法虽然简单，但是如何想出来却仍很难揣摩，属于那种可看懂却自己想不出类型的结果．

本书也包括了编著者自己所获得的最新结果和研究问题时得到的一些副产品，例如，第一章第1.16节中的一个巧妙公式，这一结果现已在《数学研究与评论》杂志2010年第2期上发表．

我喜欢轻松与享受，例如，倾听优美的音乐与品尝可口的美味，但是许多科学实验已经证明，永远的"轻松与享受"的代价就是寿命的减短，因此生物的本性需要在"轻松与享受"和"劳累和克服"之间来回振荡．我认为，如果一本书能在轻松之间让读者对某种对象产生了兴趣，虽然是一种成功，但如果到此为止，就有些不够．这就像一位人士被你说的胃口大开，正想去实际品尝一下，却不知餐馆在何处一样．所以我的愿望是既让你有了胃口，又要能让你吃到一些真实的菜．即使这道菜以你目前的水平还不能享受，但是经过努力学习后，就随时可以享用了．

最后我想回答一个问题，就是学习数学是需要吃一些苦的，需要克服一些困难的，克服这些困难实际是对自己的一种磨炼，是自己对自己的强制与要求．于是有的人就要问，那你为什么要受这种苦？值得吗？回答是爱是不需要任何理由的，甘愿吃苦的原因和动力来自对数学的喜爱，就因为你就是这种人，你的回报就在于每一次你得知答案时的满足和享受．

你可以不受这些苦，但你也就体会不到那种快乐．最后，我以一首可能很拙劣的小诗作为结束．

美丽的数学女神

你就像一个蒙着神秘面纱的美丽女神，
面纱的后面总是闪着宝石的光芒；
红宝石，蓝宝石，绿宝石，
多姿多彩，吸引我去摘取.

但是当我想揭开这面纱，
摘取这迷人的宝石的时候，
我却发现，
这里有很多机关，
我必须，先回答一些问题，
找出答案后，
才能获得你的微笑.
随着你的微笑，
一颗带着芳香的小宝石，
轻轻落入我的手心.
啊，多么美丽、雅致，
像有一股可口的清泉，把我滋润.
我用一个精致的盒子将这宝石收藏，
作为永久的纪念.

我是这样贪心，
得到一颗宝石后，
还想摘取第二颗，
而你的问题就更加困难.

随着我收藏的宝石的增多，
这困难就成了折磨，
但我甘愿忍受你的折磨，
因为，不让我忍受你的折磨，
本身就是一种更大的折磨.

这宝石,我不时拿出来欣赏,
每当这时,就是我最大的快乐.
不要问我,
这宝石值多少钱?
可能在你看来,它一钱不值,
但是对我来说,
它是无价之宝.

美丽的女神,
经过一生的追求,
我才知道,
你的魅力,
就在于,
蒙在你脸上的面纱,
永远不可能彻底揭开.
但是,你又是那样慷慨,
只要对你追求,
就有无穷的宝石,
会随着你的微笑,
再次落到我的手中.
所以,我要永远追求你,
永远忍受你的折磨.

本书中插图、漫画由冯东东创作、制作,特此致谢.

冯贝叶

2009年年底于北京大学燕园6公寓

⊙目录

第一编 数学拼盘——数学的故事和问题

第二编　斐波那契魔方

附　　录

第一编

数学拼盘
——数学的故事和问题

数学的故事和问题

第一章

1.1 一个计算两位数乘法的小诀窍

我们先来看一个日本推理小说的故事梗概(佐野洋.作弊.啄木鸟,2003(9)).

真木和妻子雅子的孩子良则是个小学生,正在学两位数乘法,成绩一直不好.有一天雅子去做美容,和美容师山形聊起此事,山形就把自己的外甥女高中生百合子介绍给他们当家庭教师,经过百合子一段时间的辅导,良则在一次两位数乘法的考试中得了100分,并受到了班主任尾花老师的表扬.这次考试有50多道题,都是两位数的乘法题,据说良则是第一个交卷的,卷子上有老师的批改笔迹,所有的题都画了红圈(日本习惯,题做对了画红圈).卷子上还有一行红字的批语:“答得很快,而且全都对了.”

但是当丈夫真木从中国出差回来得知此事后却对此产生了怀疑,原因是良则的卷子上没有算草.起初雅子也有些奇怪,问过良则,良则说他用的是所谓“默算法”,母亲雅子出于对儿子的溺爱也就没有追问下去.但是当真木要求良则当面表演所谓“默算法”时却遭到了儿子的拒绝,这就更加引起了真木的怀疑,于是他偷偷把儿子的试卷带到公司,向公司中毕业于数学系的古贺请教,卷子上的头几道题是这样的

$$24\times 26=$$
$$72\times 78=$$
$$93\times 97=$$
$$\vdots$$

经过一段时间的研究，古贺告诉真木，这些试题中的题不是任意的两位数乘法题，而是有规律的，做这种特殊的带有规律的试题确实不需要算草.

后来百合子在旅馆被人谋杀，警方破案后发现是尾花的丈夫在无意中将百合子致死的.而尾花早就知道其丈夫和百合子的关系.为使丈夫少在家，与丈夫关系一直不好的尾花想出了通过山形把百合子介绍给真木家的计策，这使得百合子有借口和时间不回家而与其丈夫幽会.为延长百合子在真木家当家庭教师的时间，尾花故意暗示百合子有一种特殊的两位数乘法的简便算法可以教给良则，这样可以提高他的成绩.当得知良则已掌握了这种算法后，尾花在考试中故意出了一张 50 多道全是由这种特殊题组成的试卷，使良则的成绩有了显著的提高，并造成了这是百合子辅导结果的假象.

请问，你能看出尾花出的题有什么规律吗?

数学中有许多小技巧，表面上看起来，这些数学花样只不过是并不严格的巧合，但是实际上，它们是很好的初等代数的习题.找出尾花出题的秘密也不需要大学数学系的水平，任何一个初中生都可以理解和证明.我们看出尾花出的题目有一个特点，那就是两个乘数十位以上的数字都相同，个位上的数之和都是 10.我们再来算几个具有同样特点的题目如下

$$\begin{array}{r}38\\ \times 32\\ \hline 1\,216\end{array}\qquad\begin{array}{r}13\\ \times 17\\ \hline 221\end{array}\qquad\begin{array}{r}79\\ \times 71\\ \hline 5\,609\end{array}\qquad\begin{array}{r}25\\ \times 25\\ \hline 625\end{array}\qquad\begin{array}{r}118\\ \times 112\\ \hline 13\,216\end{array}$$

由此我们可总结出这种乘法的法则如下：

(1) 用十位以上的数字乘以比它大一的数(即在自然数中这个数字的后面一个数字)，把结果记为 A.

(2) 把两个乘数的个位数相乘，所得结果记为 B.

(3) 在 A 后面写上 B，然后把写出来的数看成一个单独的数.

现在，你已得出这两个乘数的乘积.

例如，想用心算得出 32 乘以 38 是多少，算法就是，3 后面的数是 4，因此 $A=3\times 4=12$，而 $B=2\times 8=16$，因此所要的结果就是 $AB=1\,216$.

那么这种乘法法则的原理是什么呢?你自己能证明吗?

问题 1　给出上述乘法法则的证明.

1.2　另一种计算乘法的小诀窍

在古代印度，能计算乘法就被认为很有学问.文化不多的印度(一说是俄罗斯农奴)农民曾流传一种以连续倍乘一个数和连续取半一个数(显然这两种算法是比较简单的)为基础的乘法算法.这种算法有如下两种格式.

要计算两个正整数 a,b 的乘积，可令 $a_1=a,b_1=b$，然后在这两个数下面

写下一连串数,即

$$\begin{array}{lll} a_1 & b_1 & \\ a_2 & b_2 & \\ \vdots & \vdots & \\ a_{i_1} & b_{i_1} & * \\ \vdots & \vdots & \\ a_{i_2} & b_{i_2} & * \\ \vdots & \vdots & \\ a_n & b_n = 1 & * \end{array}$$

其中 $a_n = 2a_{n-1}$, $b_n = \frac{b_{n-1}}{2}$,在 b_{n-1} 不能被 2 除净时,就把余数弃掉,并在 b_{n-1} 的旁边记上一个"$*$",在最后得到的 $b_n = 1$ 的旁边也记上一个"$*$",那么要算的乘积就等于把"$*$"所在的行中的各个 a_{i_k} 加起来所得的和数,也即

$$ab = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}$$

另一种格式是把没画"$*$"的行划掉.

例如,$53 \times 65 = 3\ 445$.

$$\begin{array}{rrl} \multicolumn{3}{c}{53 \times 65 = 3\ 445} \\ 53 & 65 & * \\ 106 & 32 & \\ 212 & 16 & \\ 424 & 8 & \\ 848 & 4 & \\ 1\ 696 & 2 & \\ 3\ 392 & 1 & * \\ \hline 3\ 445 & & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \multicolumn{2}{c}{53 \times 65 = 3\ 445} \\ 53 & 65 \\ \cancel{106} & \cancel{32} \\ \cancel{212} & \cancel{16} \\ \cancel{424} & \cancel{8} \\ \cancel{848} & \cancel{4} \\ \cancel{1\ 696} & \cancel{2} \\ 3\ 392 & 1 \\ \hline 3\ 445 & \end{array}$$

注:根据乘法交换律,$53 \times 65 = 65 \times 53 = 3\ 445$,因此上述算式也可写成

$$\begin{array}{rrl} 53 & 65 & * \\ 26 & 130 & \\ 13 & 260 & * \\ 6 & 520 & \\ 3 & 1\ 040 & * \\ 1 & 2\ 080 & * \\ \hline & 3\ 445 & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 53 & 65 \\ \cancel{26} & \cancel{130} \\ 13 & 260 \\ \cancel{6} & \cancel{520} \\ 3 & 1\ 040 \\ 1 & 2\ 080 \\ \hline & 3\ 445 \end{array}$$

问题 2 给出上述计算两个数相乘的法则的证明.

现在,再看另一道迷题:

问题3 已知6位数 N 使得组成 $2N,3N,4N,5N$ 和 $6N$ 的数字恰与组成 N 的数字完全相同,但是次序不同,求 $7N$(这是一个你很熟悉的数).

这个问题的答案包含在1.3的历史小故事中.

或者你如果能破解下面这个迷中之谜,也可知道答案.

问题4 谜中之谜:破解下面这个密文.

UBLF UIF GJSTU TJY EJHJUT UIF EFDJNBM QPJOU JO UIF EFDJNBM FYQBOTJPO PG POF TFWFOUI

虽然通过这两种途径之一,你可以知道答案,但是都无法知道这个答案是如何得出的,在后面的问题解答中将给出一种解法.

1.3 白痴天才的故事

从古到今,无论中外,都曾出现过这样一些人,他们在某一方面,例如,绘画、音乐、计算等一个单一的方面表现出超人的才能,但在其他方面却与此极不相称,甚至像一个白痴.这些人自己无法解释他们为什么会在某一方面才能如此出众,他们天生如此.后来人们就称这种人是白痴专家.1988年,演员达斯汀·霍夫曼由于在电影《雨人》中出色地扮演了一个有自闭症的白痴专家而获得了奥斯卡最佳男演员奖.历史上最出名的白痴专家之一是一个叫 George Parker Bidder 的人.1816年当他十岁时,有人问他:“一个周长为5 ft(英尺)10 in(英寸)的车轮在车子走了800 000 000 mi(英里)后共转动了多少圈?”在不到50 s(秒)内,Bidder 给出了正确答案:724 114 825 714 圈剩余20 in.

据吉尼斯世界纪录记载,1980年6月18日,印度的 Shakuntala Devi 女士仅用了28 s就正确地算出了两个随机选出的13位数字的乘积.

1981年4月7日,Willem Klein 在日本筑波国家高能物理实验室只用了1 min(分)28.8 s就求出了一个100位数字的13次方根.面对如此不可思议的能力,与其说他是白痴专家,倒不如称他为计算天才更合适.

1.4 神奇的生日预测卡片

有一种生日预测卡片,共有如下5张.

第0号卡片

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

第1号卡片

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

第2号卡片

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

第3号卡片				第4号卡片			
8	9	10	11	16	17	18	19
12	13	14	15	20	21	22	23
24	25	26	27	24	25	26	27
28	29	30	31	28	29	30	31

利用这套卡片,你便可以在你的朋友面前表演预测生日的神奇魔术.预测的方法是,让你的朋友指出在哪张卡片上有他的生日,然后把这些卡片左上角的数字相加就是你的朋友的生日.

例如,假设朋友告诉你他的生日在第二张卡片和第三张卡片上,那么他的生日就是 $4+8=12$.

问题5　为什么用上面所说的生日卡片和方法能得知朋友的生日?

生日卡片的秘密将在问题解答中给出.

1.5　整数中的魔术"等式"

等式是我们非常熟悉的数学符号.从上小学起,我们就不断的和等式打交道.但是还有另一种与等式十分相像的数学符号,对大部分人来说,即使到了大学,课本中也不会讲.然而其实只要有初中的文化知识,就可以理解这个符号,而且它具有许多神奇的魔力.

这种符号是德国大数学家高斯提出的.给了一个称为"模"的整数 m,你会发现有许多整数被 m 去除,会得到同样的余数.由此,高斯提出了一个称为同余的概念.按照我们刚才的说明,两个整数 a 和 b 相对于模 m(或说成是在模 m 下)同余的意思就是说 a 和 b 被 m 去除,会得到同样的余数.

话说到这,你可能会觉得,这不过是数学家闲的没事干,非要弄一个什么新概念自得其乐而已.可是后来的历史表明,事情绝对不是这样,同余这个概念成了初等数论中最重要的工具之一.而且表明,一种合适的形式和符号,可以更清楚的显示事物的本质.这句话又是什么意思呢?原来几乎就在高斯提出同余这个概念的同时,他又创造了一种新的符号来表示两个整数的同余.这个符号和等号十分相像,你要不仔细看,一不小心,就很容易弄混.那这是一个什么样子的符号呢?我们知道,等号是两条短的横线,而这个同余号只不过比等号多了一条横线,是三条横线,样子如下

$$\equiv$$

用这个符号,说两个整数 a 和 b 相对于模 m(或说成是在模 m 下)同余就可以表示成

$$a\equiv b(\bmod m)$$

上面式子中的 mod 就念成"模",而整个式子就念成"a 同余于 b 模 m".

刚才说等号和同余号很像,很容易弄混.一般数学家要使用一种新符号,总不愿意和老的符号混淆,所以总要在形式上不一样,可高斯为什么不怕同余号和等号混淆呢?原来高斯是特意这样做的,下面我们就会看见,这个同余号在很多地方真的和等号很相像,这是一开头好多人没有想到的,等发现这一点后,就会觉得这个符号很奇妙了.

不过在说明同余式的性质之前,我们还要再说两个和同余等价(也就是本质上和同余相同)的表达方式,这在显示和证明同余式的性质时,比原始的说法更加方便.

说 $a \equiv b \pmod m$ 就等价于说 m 能够整除 $(a-b)$(通常记为 $m \mid (a-b)$).
也等价于说 $a-b=qm$,其中 q 是一个整数.

现在我们就来列举同余式的性质.

以后在模是什么非常明确而不至于引起误会和混淆的情况下,我们经常把 $a \equiv b \pmod m$ 简记为 $a \equiv b$.

设同余式的模是 m,那么关于模 m 的同余式有以下性质.

(1) 自反性:$a \equiv a$.

(2) 对称性:如果 $a \equiv b$,那么 $b \equiv a$.

(3) 传递性:如果 $a \equiv b$, $b \equiv c$ 那么 $a \equiv c$.

(4) 如果 $a \equiv b$, k 是一个整数,那么 $ka \equiv kb$.

(5) 如果 $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$,那么 $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2$.

(6) 如果 $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$,那么 $a_1 - b_1 \equiv a_2 - b_2$.

(7) 如果 $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$,那么 $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2$.

(8) 消去法则:如果 $ac \equiv bc$,且 $(c, m) = 1$,那么 $a \equiv b$.

(9) 如果 $a \equiv b \pmod{m_1}$, $a \equiv b \pmod{m_2}$, $(m_1, m_2) = 1$,那么 $a \equiv b \pmod{m_1 m_2}$.

(10) 如果 $x \equiv a$,而 $f(x)$ 是一个整系数多项式,那么 $f(x) \equiv f(a)$.

(11) 如果 $a \equiv b \pmod m$, k 是一个正整数,则 $ka \equiv kb \pmod{km}$.

(12) 如果 $a \equiv b \pmod m$, d 是 a, b, m 的公因数,则 $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(\bmod \frac{m}{d}\right)$.

证明 我们只证明(8),(9),(12),其余性质请读者自己证明.

(8) 如果 $ac \equiv bc$,那么由同余的等价性质可知 $m \mid (ac - bc) = c(a-b)$,但是由于 $(c, m) = 1$,故 $m \mid (a-b)$,因此再由同余的等价性质可知 $a \equiv b$.

(9) 如果 $a \equiv b \pmod{m_1}$, $a \equiv b \pmod{m_2}$,那么由同余的等价性质可知 $m_1 \mid (a-b)$, $m_2 \mid (a-b)$.但是由于 $(m_1, m_2) = 1$,故 $m_1 m_2 \mid (a-b)$,因此再由同余的等价性质可知 $a \equiv b \pmod{m_1 m_2}$.

(12) 由 $a \equiv b \pmod m$ 和同余式的等价性质知 $a = b + qm$,在此式两边同除以 d 得 $\frac{a}{d} = \frac{b}{d} + q\frac{m}{d}$,再由同余式的等价性质即知这就是 $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(\bmod \frac{m}{d}\right)$.