国内外
数学竞赛题解

（中）

陕西师范大学图书馆
《国内外数学竞赛题解》编辑组 编

目　录

（国内部分）

1977年

一、1977年安徽省中学数学竞赛试题和解答…………（275）

1978年

一、1978年 全 国 中学数学竞赛试题及解答…………（283）
二、1978年北京市中学数学竞赛试题及解答…………（297）
三、1978年上海市中学数学竞赛试题及解答…………（306）
四、1978年天津市中学数学竞赛试题及解答…………（317）
五、1978年辽宁省中学数学竞赛试题及解答…………（326）
六、1978年安徽省中学数学竞赛试题及解答…………（346）
七、1978年广东省中学数学竞赛试题及解答…………（358）
八、1978年四川省中学数学竞赛试题及解答…………（370）
九、1978年陕西省中学数学竞赛试题及解答…………（402）
十、1978年西安市中学数学竞赛试题及解答…………（414）
十一、1978年兰州市中学数学竞赛试题及解答………（425）
十二、1978年西宁市中学数学竞赛试题及解答………（431）
十三、1978年银川市中学数学竞赛试题及解答………（438）
十四、1978年河南省中学数学竞赛试题及解答………（444）
十五、1978年武汉市中学数学竞赛试题及解答………（457）
十六、1978年江苏省中学数学竞赛试题及解答………（487）
十七、1978年南京市中学数学竞赛试题及解答………（503）

十八、1978年福建省中学数学竞赛试题及解答………(510)
十九、1978年福州市中学数学竞赛试题及解答………(527)
二十、1978年石家庄市中学数学竞赛试题及解答……(539)
二十一、1978年山西省中学数学竞赛试题及解答……(549)
二十二、1978年沈阳市中学数学竞赛试题及解答……(561)

1979年

一、1979年全国中学数学竞赛试题及解答……………(569)
二、1979年天津市中学数学竞赛试题及解答…………(582)
三、1979年陕西省中学数学竞赛试题及解答…………(598)
四、1979年西安市中学数学竞赛试题及解答…………(619)
五、1979年云南省中学数学竞赛试题及解答…………(637)
六、1979年贵州省中学数学竞赛试题及解答…………(651)
七、1979年安徽省中学数学竞赛试题及解答…………(668)
八、1979年河北省中学数学竞赛试题及解答…………(684)
九、1979年山西省中学数学竞赛试题及解答…………(697)
十、1979年太原市中学数学竞赛试题及解答…………(709)
十一、1979年黑龙江省中学数学竞赛试题及解答……(721)

一、1977年安徽省中学数学竞赛试题和解答

1．求：$\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots\cdots+\frac{1}{1001\times1002}$的值。

解：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore$原式$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{1001}-\frac{1}{1002}$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{1002}=\frac{333}{1002}=\frac{111}{334}$。

2．当$x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$

时，

求x^3+ax+b的值。

解：$x^3+ax+b=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$

$+3\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}\right)$

$\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}\right)\cdot x+ax+b$

$$= 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\ x+ax$$

$$= 3\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)x+ax=0.$$

3．当x为一切实数时，求$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$的数值范围．

解：∵ x^2+x+1的判别式$\triangle<0$、而二次项系数$a=1>0$

∴ 恒大于零．

x^2-x+1的判别式$\triangle<0$、而二次 项系数$a=1>0$．

∴ 也恒大于零．

∴ $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}>0$；$x^2(y-1)+x(y+1)+(y-1)$

$=0$

$\triangle=(y+1)^2-4(y-1)^2=(3y-1)(3-y)\geqslant 0$

∴ $\dfrac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$．

4．分解因式：$2x^2-7xy+6y^2-x+y-1$

解：原式$=(2x-3y)(x-2y)-(x-y)-1$

$=(2x-3y)(x-2y)-(2x-3y)+(x-2y)-1$

$=(2x-3y)(x-2y-1)+(x-2y-1)$

$=(2x-3y+1)(x-2y-1)$

5．解方程：$(x+5)^{\frac{2}{3}}+4(x-5)^{\frac{2}{3}}=5(x^2-25)^{\frac{1}{3}}$

解：设$(x+5)^{\frac{1}{3}}=a$．　$(x-5)^{\frac{1}{3}}=b$．

则 $a^2+4b^2=5ab$．解得 $a=4b$．$a=b$(无解)

$\sqrt[3]{x+5}=4\sqrt[3]{x-5}$　∴ $x=\dfrac{325}{63}$．

6．解方程组：$\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{cases}$

解：$\begin{cases} \lg y \cdot \lg x = \lg 4 \\ \lg x + \lg y = \lg 4 + 1 \end{cases}$

设$\lg x$、$\lg y$为方程$m^2 - (\lg 4 + 1)m + \lg 4 = 0$的二根

$(m - \lg 4)(m - 1) = 0$、$m_1 = \lg 4$、$m_2 = 1$

$\begin{cases} \lg x = \lg 4 \\ \lg y = 1 \end{cases}$　　　　$\begin{cases} \lg y = \lg 4 \\ \lg x = 1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 10 \end{cases}$　　　　$\begin{cases} x_2 = 10 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

7．解方程：$x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$

解：右式$= x$。

则　$\lg x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = \lg x$

$(\lg^2 x + \lg x^3 + 3)\lg x = \lg x$

$\lg^2 x + \lg x^3 + 3 = 1$

设　$\lg x = y$，则　$y^2 + 3y + 3 = 1$

解得：$y_1 = -1$，$y_2 = -2$

$\lg x = -1$　$\lg x = -2$　$x_1 = \dfrac{1}{10}$　　$x_2 = \dfrac{1}{100}$

$\therefore$　原方程的解为$x_1 = \dfrac{1}{10}$，　$x_2 = \dfrac{1}{100}$。

8．将3160分成两份，使其中一份为13的倍数，一份为15的倍数。

解：$13x + 15y = 3160$

要使3160减13x的差能被15整除，即能被3和5整除这个差数的尾数必为5或0，那么x必为0或5的倍数，当x取0或5时，它们的差数不能被3整除，当x取10时$3160-130=3030$，能被3整除。3160可分成130和3030两份。

$\because 13\times 15=195$。即195是13和15的最小公倍数。所以第一份可每次加上195，而第二份可每次减去195，其和不变。所以3160可分成130和3030，$130+195=325$和$3030-195=2835$；520和2640；715和2445；910和2250；1105和2055；1300和1860；……共有16种分法。

9．证明：当n为自然数时，$n(n+1)(n+2)$为6整除。

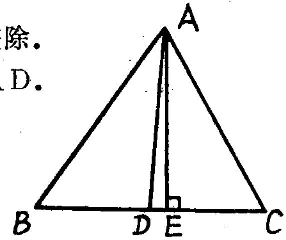
证：当n是奇数时，$(n+1)$就为偶数，当n为偶数时。n和$(n+2)$为偶数。所以$n(n+1)(n+2)$能被2整除。

又$\because$ $n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$

$\therefore$ 又能被3整除

$\therefore$ $n(n+1)(n+2)$能被6整除。

10．在△ABC中、$\angle BAD=\angle CAD$。



求证：$BD:CD=\sin C:\sin B$

证：$\because$ $\angle BAD=\angle CAD$

$\therefore$ $BD:CD=AB:AC$

自A作BC的高.垂足为E.

$$AB=\frac{AE}{\sin B}.\qquad AC=\frac{AE}{\sin C}.$$

$AB:AC=\sin C:\sin B$。 $\therefore BD:CD=\sin C:\sin B$。

11．设a为正n边形之边长，求其外接园及内切园之半径．

$$R(\text{外园})=\frac{a}{2}\div\sin\frac{180^{\circ}}{n}=\frac{a}{2\cdot\sin\frac{180^{\circ}}{n}}$$

γ(内园)$=\frac{a}{2}\cdot ctg\frac{180^{0}}{n}$.

12. 设三角形ABC三条边分别为x^2+x+1，x^2-1，$2x+1$，$(x>1)$求其最大角。

解：显然，三边中x^2+x+1为最大边，根据余弦定理

得：$$\cos A=\frac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}$$

$$=\frac{(x^2+x+1)^2-(x^2-1)^2-(2x+1)^2}{-2(x^2-1)(2x+1)}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$\therefore\quad A=120°$

答最大角是120°。

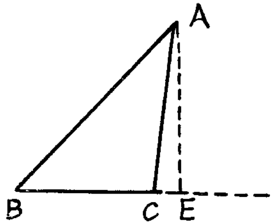
13. 在△ABC中，$\frac{\cos A}{b}=\frac{\cos B}{a}$（其中a、b、表示边．A、B表示角）讨论△ABC为何种三角形？

解：正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，又$\because\frac{\cos A}{b}=\frac{\cos B}{a}$

$\therefore\sin A=\cos B$. $\sin B=\cos A$。$\therefore A+B=90$.

$\therefore\angle C=90°$。$\therefore$△ABC是直角三角形。

14. 已知：△ABC中。$\angle B:\angle A:\angle C=1:2:7$.



求证：$AB:AC=(\sqrt{5}+1):(\sqrt{5}-1)$

证明：自A作BC的垂线，与BC的延长线交于E点。

设$\angle B=\alpha$。则$\alpha+2\alpha+7\alpha=180°$。$\alpha=18°$。

$\therefore \angle ABC=18°$。$\angle ACB=7\times18°=126°$，$\angle ACE=54°$。$AB=AE\div\sin18°$。$AC=AE\div\sin54°$

$\therefore AB:AC=(\sqrt{5}+1):(\sqrt{5}-1)$。

15．证三角形两边之积等于三边上高乘以外接园之直径。

证明：联BE。

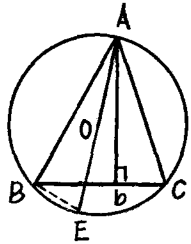
$\because \angle ABE=\angle AbC=90°$　$\angle ACD=\angle AEB$。

$\therefore \triangle AbC\backsim\triangle ABE$。

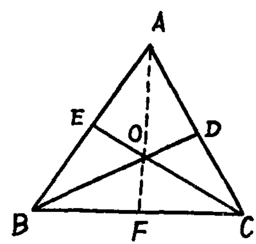
$\therefore AB:Ab=AE:AC$。

即　$AB\cdot AC=Ab\cdot AE$。

16．求证三角形大边上的中线小于小边上的中线。



第15题



第16题

证明：联接AO，延长交BC于F点，在$\triangle ABF$和$\triangle AFC$中：$\because AB>AC$。

$\because BF=FC$。$AF=FA$

$\angle AFC<\angle AFB$

在$\triangle OBF$和$\triangle OFC$中。

$\because OF=OF\cdot BF=FC$。

$\therefore BO > OC$.

根据三角形中线性质$\frac{3}{2} \cdot BO > \frac{3}{2} \cdot OC$　$\therefore BD > EC$.

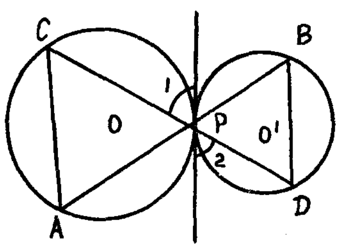
17. 已知⊙O与⊙O′相 切 于 P点，过P点作两条直线AB，CD、分别交⊙O于A、C、交⊙O′于B、D、求证：AC∥BD.

证明：过P作二园的公切线

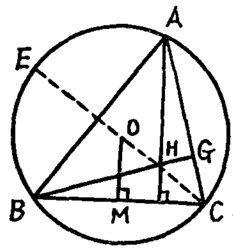
$\because \angle 1 = \angle CAP$。$\angle 2 = \angle DBP$.

$\because \angle 1 = \angle 2$。$\therefore \angle CAP = \angle DBP$.

$\therefore AC \parallel BD$,



第17题



第18题

18. 已知△ABC的 垂 心 为 H，外 心O到BC边 的 距 离为OM，

求证：$AH = 2OM$.

证明：$\because OM \perp BC$.

$\therefore BM = MC$。连接CO并延长交⊙O于E点，联 EB，EA。联BH并延长交AC于G点.

$\because$CE是直径.

$\therefore OM \parallel BE$.

$\therefore OM = \frac{1}{2}BE$。$\because$ H是$\triangle ABC$的垂心。

$\therefore EB \parallel AH$. $EA \parallel BG$.

$\therefore$四边形EBHA是平行四边形。

$\therefore AH = BE = 2OM$。

一、1978年
全国中学数学竞赛试题和解答

第一试

1．已知$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$，问当$x$为何值时（Ⅰ）$y>0$；（Ⅱ）$y<0$？

解：$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$的定义域为$x+3>0$，即

$$x>-3 \qquad (1)$$

又
$$0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

（Ⅰ）若$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}>0$．则$\frac{1}{x+3}<1$，$x+3>1$，即$x>-2$．结合（1）得$x>-2$．

（Ⅱ）若$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}<0$，则$\frac{1}{x+3}>1$，$x+3<1$，即$x<-2$．结合（1）得$-3<x<-2$．

所以当$x>-2$时$y>0$；当$-3<x<-2$时$y<0$．

2．已知$\operatorname{tg}x=2\sqrt{2}$（$180°<x<270°$），求$\cos 2x$，$\cos\frac{x}{2}$的值。

解： ∵ $180^\circ < x < 270^\circ$，

∴ $\sec x = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = -\sqrt{1+8} = -3$，

∴ $\cos x = -\dfrac{1}{3}$，

∴ $$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1$$

$$= -\frac{7}{9}.$$

由 $180^\circ < x < 270^\circ$，得 $90^\circ < \dfrac{x}{2} < 135^\circ$。

∴ $$\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3．设椭圆的中心为原点，它在x轴上的一个焦点与短轴两端连线互相垂直，且此焦和长轴上较近的端点距离是 $\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求椭圆方程。

解： 如图，设所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，F是它的右焦点。

∵ $FB \perp FB'$，

∴ $\triangle BB'F$ 为等腰直角三角形，

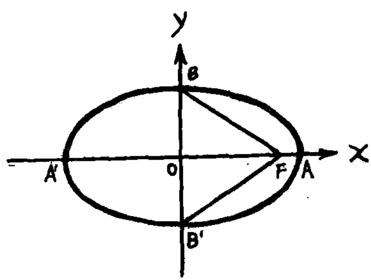
∴ $OB = OF = OB'$，

即 $b=c$，但 $a^2=b^2+c^2$，

∴ $a^2 = 2c^2$，

∴ $a=\sqrt{2}c=\sqrt{2}b$，

即 $a-c=(\sqrt{2}-1)b$。



又 $a-c=\sqrt{10}-\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$，

$\therefore\ (\sqrt{2}-1)b=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$，即$b=\sqrt{5}$，

$\therefore\ a=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$。

故所求椭圆方程是$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$。

4．已知方程$2x^2-9x+8=0$，求作一个二次方程，使它的一个根为原方程两根和的倒数，另一根为原方程两根差的平方。

解：设x_1，x_2为方程$2x^2-9x+8=0$的两个根，

则
$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{9}{2} \\ x_1\cdot x_2=4 \end{cases}$$

设所求方程为$x^2+Px+q=0$，它的两个根为x_1'，x'_2，据题意：

$$x'_1=\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{2}{9},$$

$$x_2'=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{81}{4}-16=\frac{17}{4}.$$

$$P=-(x'_1+x'_2)=-\left(\frac{2}{9}+\frac{17}{4}\right)=-\frac{161}{36}.$$

$$q=x'_1\cdot x'_2=\frac{2}{9}\times\frac{17}{4}=\frac{34}{36}.$$

所以，求作的方程是：$36x^2-161x+34=0$．

5．把半径为1的四个小球叠成两层放在桌面上：下层三个，上层一个，两两相切，求上层小球最高点离桌面的高度。

解：设上层小球的球心为O_1，下层三个小球球心为O_2，

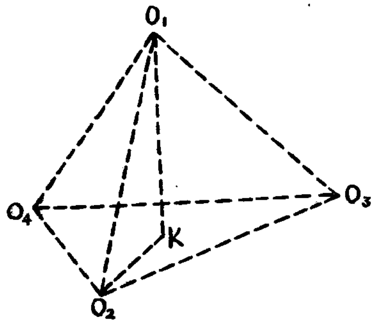
O_3，O_4.连接O_1O_2、O_1O_3、O_1O_4、O_2O_3、O_3O_4、O_2O_4.因为这四个小球两两相切，所以$O_1O_2=O_1O_3=O_1O_4=O_2O_3=O_2O_4=O_3O_4=2$，因此$O_1-O_2O_3O_4$可以看作一个棱长是2的正四面体（如图）.

过O_1作正四面体的高O_1K，那么K应是正$\triangle O_2O_3O_4$的中心，连O_2K，则$O_2K=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

$$\therefore O_1K=\sqrt{O_1O_2^2-O_2K^2}$$

$$=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$



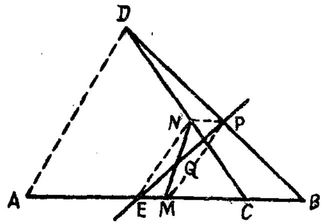
因为O_2、O_3、O_4在桌面的距离都等于1，所以面$O_2O_3O_4$平行于桌面，则球O_1上最高点到桌面的距离应是

$1+\frac{2\sqrt{6}}{3}+1=2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

6．如图，设线段AB的中点为M，从AB上另一点C向直线AB的一侧引线段CD；令CD的中点为N，BD的中点为P，MN的中点为Q.求证：直径PQ平分线段AC。

证：如图，设直线PQ交AC于E，连NP，∵N，P分别是DC、DB的中点，∴NP∥CB.在$\triangle QNP$与$\triangle QME$中，NP∥EM，QN＝QM，∴$\triangle QNP\cong\triangle QME$，∴QP＝QE.连PM、NE，则EMPN为平行四边形，∴EN∥MP连AD，在$\triangle BAD$中，M、P分别为BA、BD的中点，∴MP∥

AD，又∵EN∥MP，∴EN∥AD，∴在△ACD中，E为AC中点．所以直线PQ平分线段AC。



7．证明：当n、k都是给定的正整数，且n＞2，k＞2时，$n(n-1)^{k-1}$可以写成n个连续偶数的和。

证：设n个连续偶数为2a，2a+2，2a+4，……，2a+2(n－1)。

$$\text{则}\quad S_n=\frac{2a+2a+2(n-1)}{2}\cdot n=[2a+(n-1)]\cdot n.$$

$$\text{令}\quad [2a+(n-1)]n=n(n-1)^{k-1},$$

$$\text{则}\quad 2a+(n-1)=(n-1)^{k-1},$$

$$\therefore\quad a=\frac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}.$$

由上式可知，只要n为大于2、k为大于2的整数，那么a一定是正整数。

$\therefore$ a取$\dfrac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{1}$时，$n(n-1)^{k-1}$等于n个连续偶数的和。

8．证明：顶点在单位圆上的锐角三角形的三个角的余弦的和小于该三角形的周长之半．

证：如图，在单位圆O内，任作一锐角三角形ABC，命A、B、C各角所对的边长分别为a、b、c，其和的一半为s。

∵$\triangle ABC$为一锐角三角形，

∴$A+B>90^\circ$，

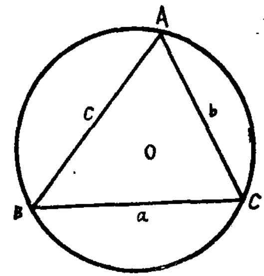
即$A>90^\circ-B$，从而$\cos A<\cos(90^\circ-B)=\sin B$　　（1）

同理　$\cos B<\sin C$　（2）

$\cos C<\sin A$　（3）

（1）+（2）+（3）：

$\cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C$　　（4）



又根据正弦定理有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2$

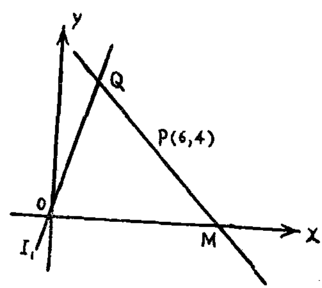
∴ $$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2.$$

即 $$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a+b+c}{2}\qquad(5)$$

由（4）、（5）可得：

$\cos A+\cos B+\cos C<s$.

9．已知直线l_1：$y=4x$和点P（6，4），在直线l_1上求一点Q，使过PQ的直线与直线l_1，以及x轴在第Ⅰ象限内围成的三角形的面积最小。



解：设Q点坐标为(x_1, y_1)，则$y_1=4x_1$，那么直线PQ的方程为：

$$\frac{y-4}{4x_1-4}=\frac{x-6}{x_1-6}.$$