

权威 实用 经典



2011

考研数学 经典讲义 (理工类)

主编 / 黄先开 曹显兵

一线名师授课底本 经典讲解全新奉上

全面解析大纲考试内容与考试要求，清晰明确，一目了然
总结重要公式与结论，帮助考生常记不忘
归纳典型题型讲解内容，例题分析、详解、评注环环相扣
每章配精编习题，有针对性地演练、温习

赠：全套习题详解



中国人民大学出版社

55

考研数学经典讲义 (理工类)

► 主 编 黄先开 曹显兵
副主编 胡立清 刘喜波

正版查询及服务程序

- 刮 开 涂 层
- 获取 20 位 数字 编 码
- 上 www.1kao.com.cn 注册
- 登录增值服务进免费课堂

2011

013
H903.105
2

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

考研数学经典讲义. 理工类/黄先开,曹显兵主编. 5 版

北京:中国人民大学出版社,2010

ISBN 978-7-300-07506-8

I. ①考…

II. ①黄…②曹…

III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 017272 号

考研数学经典讲义(理工类)

主 编 黄先开 曹显兵

副主编 胡立清 刘喜波

Kaoyan Shuxue Jingdian Jiangyi(Ligonglei)

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室)

010-62511398(质管部)

010-82501766(邮购部)

010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司)

010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.1kao.com.cn> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫霸印务有限公司

规 格 185 mm×260 mm 16 开本

版 次 2006 年 7 月第 1 版

2010 年 2 月第 5 版

印 张 54.25

印 次 2010 年 2 月第 1 次印刷

字 数 1 240 000

定 价 59.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

郑重声明

黄先开、曹显兵教授主编的《考研数学经典讲义》系列图书，因其名师的底蕴、全面的内容、权威的解析，名副其实地成为全面、权威、实用的数学考研辅导书。

当前考研图书市场盗印盗销行为猖獗。盗版行为在侵害作者和出版者权益的同时，也因其印装粗劣、错漏百出，使考生蒙受金钱损失、精力损失，甚至误导考生，毁掉考生考研前程。

多年来，我们一直与盗版行为作着艰苦的斗争，并让一些盗版者受到了应有的处罚。今年，我们将进一步加大打击盗版的力度，并利用包括法律手段在内的一切手段，让盗版者受到严惩。

请广大考生认准以下防盗版特征：(1) 封面防伪标带 20 位密码网上注册查真伪。(2) 封面压有带人大出版社社标的压纹。

在以上措施的基础上，我们奉行以服务打击盗版，让买人大版图书的考生享受到实实在在的服务。今年我们将继续为购书考生提供网上增值服务，详情请及时登录中国 1 考网 (www.1kao.com.cn) 查询。

为保障您和您尊敬的老师的合法权益，请将您掌握的盗版者信息及时提供给我们。

举报电话：010-62515275

编辑电话：010-62511915

咨询电话：010-62511349

电子邮箱：1kao2005@163.com

中国人民大学出版社授权律师

北京市洪范广住律师事务所

徐 波

2010 年 1 月

全面提高 获取高分

数学在研究生入学考试中分值之高，使其对于考研的成功与否起着至关重要的作用。对于考生而言，不仅要突破数学关，而且必须获取高分，而要获取高分，就必须下大工夫，全面提高。

黄先开、曹显兵等教授是在考生中广受赞誉的考研辅导名师，他们积丰富经验所主编的这套《考研数学经典讲义》，分析考试大纲的内容与要求，总结重要公式与结论，归纳典型题型进行例题精讲，帮助考生理思路、抓重点、得高分。

数学复习是一项系统工程，在全面复习的同时，考生还需要根据不同阶段的不同需求有针对性地选用辅导书。可供选择的辅导图书有：

- 《考研历届数学真题题型解析（数学一）》
- 《考研历届数学真题题型解析（数学二）》
- 《考研历届数学真题题型解析（数学三）》
- 《考研数学最新精选 600 题（理工类）》
- 《考研数学最新精选 600 题（经济类）》
- 《考研数学经典冲刺 5 套卷（数学一）》
- 《考研数学经典冲刺 5 套卷（数学二）》
- 《考研数学经典冲刺 5 套卷（数学三）》

以上图书均由黄先开、曹显兵教授主编。经过认真复习，我们相信您定可以轻松上阵，考取高分，圆考研名校梦。

前言

本书是作者根据最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编著的一本系统复习考研数学的参考书。它是以作者多年考研辅导讲稿为基础，结合作者对历年考题、命题趋势的研究以及数学的内在规律倾心编写而成的，目的是帮助广大考生在较短时间内系统复习好考研数学内容，取得优异成绩，并为今后研究生学习阶段打下坚实的数学基础，让数学伴随同学们走向人生的辉煌。

本书编写特点如下：

一、考试内容提要——对照最直接

明确考试内容与要求，才能有的放矢。本书在每章的第一节对最新考研大纲要求的基本概念、基本原理和基本方法都做了详尽的讲解，并指出注意事项。作者认为这对于考前进行全面、系统的复习是非常必要的。

二、重要公式与结论（补充注释与重要结论）——总结最完善

针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论，特别是对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结。目的在于希望考生通过系统复习后，一见到此类问题，就能立刻联想到考题实际期望考查的是哪一方面的知识点，从而使考生站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题，达到认识和理解的新境界。考生是否具备了这种能力，对考研能否取得成功和获得高分是至关重要的。

三、典型题型与例题分析——题型最丰富

对数学课程来说，题目是无穷的，但题型是有限的。作者通过精心编制和设计许多新题型，使得本书几乎囊括了考研数学所涉及的所有题型，并逐一进行分析，给出了解题方法和规律。另外，借助于许多重要经典例题的评注，本书能够帮助读者更好地把握典型例题的典型处理方法和各种可能的延伸，从而使读者能够举一反三、触类旁通。

四、习题精选与详细解答——选题最典型

要想真正掌握一门课程内容并通过相关考试，做一定数量的习题是必不可少的。为此，作者按照填空题、选择题和解答题的顺序对应各种题型选编了相当数量的习题，供读者模拟练习之用，希望读者尽可能独立地完成习题。

为满足考生需求，本书特别附赠全套习题详解，请考生持正版书到购书书店领取，或登录中国1考试网（www.1kao.com.cn）下载。

五、本书带“*”的内容，数学二考生不作要求

在成书过程中，作者参考了众多著作和教材，由于篇幅所限，不能一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于作者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，敬请广大读者、同行专家批评指正。

作者

2010年1月于北京

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限与连续	3
§ 1 知识要点精讲	3
§ 2 重要公式与结论	17
§ 3 典型题型与例题分析	19
题型一 函数关系的建立	19
题型二 考查函数的特性	21
题型三 求函数极限	22
题型四 求数列极限	31
题型五 求解含参变量的极限	36
题型六 已知极限,求待定参数、函数值、导数及函数	37
题型七 无穷小比较	39
题型八 判断函数的连续性与间断点的类型	40
题型九 确定方程 $f(x) = 0$ 的根	42
题型十 综合题	43
习题精选一	45
习题精选一参考答案	47
第二章 导数与微分	48
§ 1 知识要点精讲	48
§ 2 重要公式与结论	55
§ 3 典型题型与例题分析	56
题型一 利用导数定义解题	56
题型二 求分段函数的导数	60
题型三 导数在几何上的应用	62
题型四 变限积分求导	65
题型五 利用导数公式与运算法则求导	68
题型六 综合题	71
习题精选二	73

习题精选二参考答案	75
-----------------	----

第三章 微分中值定理与导数的应用 76

§1 知识要点精讲	76
§2 典型题型与例题分析	86
题型一 证明存在 ξ , 使 $f(\xi) = 0$	86
题型二 证明存在 ξ , 使 $f^{(n)}(\xi) = 0 (n = 1, 2, \dots)$	88
题型三 证明存在 ξ , 使 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi), \dots) = 0$	90
题型四 直接用拉格朗日中值定理或柯西中值定理证明	93
题型五 双介值问题, 要证存在 ξ, η 使 $G(f'(\xi), f'(\eta), \dots) = 0$	95
题型六 证明存在 ξ , 使得 $f^{(n)}(\xi) = k (k \neq 0)$	97
题型七 有关介值的不等式证明	99
题型八 隐含介值问题	100
题型九 不等式的证明	102
题型十 利用导数证明函数恒等式	113
题型十一 利用导数判别函数的单调性	114
题型十二 利用导数研究函数的极值与最值	115
题型十三 曲线的凹凸性与拐点	116
题型十四 求曲线的渐近线	117
题型十五 函数作图	118
题型十六 求曲率与曲率半径	120
题型十七 综合题	121
习题精选三	123
习题精选三参考答案	125

第四章 一元函数积分学 126

§1 知识要点精讲	126
§2 重要公式与结论	147
§3 典型题型与例题分析	148
题型一 计算不定积分	148
题型二 不定积分综合题	152
题型三 有关定积分的概念与性质的问题	157
题型四 利用基本方法(牛顿-莱布尼茨公式, 换元积分法, 分部积分法) 计算定积分	159
题型五 对称区间上的积分	163
题型六 涉及变限积分的问题	164
题型七 定积分循环计算法	168

题型八 几类特殊积分问题	169
题型九 反常(广义)积分的计算	172
题型十 定积分等式的证明	176
题型十一 定积分不等式的证明	178
题型十二 定积分的几何(物理)应用	181
题型十三 综合题	186
习题精选四	192
习题精选四参考答案	193
* 第五章 向量代数与空间解析几何	195
§1 知识要点精讲及主要公式与结论	195
§2 典型题型与例题分析	201
题型一 与向量代数有关的计算问题	201
题型二 求平面与直线方程	201
题型三 讨论平面与直线的位置关系	204
题型四 求对称点、投影点及投影曲线	205
题型五 综合题	206
习题精选五	207
习题精选五参考答案	207
第六章 多元函数微分学	209
§1 知识要点精讲及主要公式与结论	209
§2 典型题型与例题分析	218
题型一 基本概念题	218
题型二 求复合函数的偏导数或全微分	220
题型三 求隐函数的偏导数或全微分	222
题型四 已知偏导数,反求函数关系	225
题型五 多元函数的极值和最值问题	226
* 题型六 求多元函数的梯度或方向导数	231
* 题型七 多元函数微分学的几何应用	231
题型八 综合题	233
习题精选六	235
习题精选六参考答案	236
第七章 重积分	238
§1 知识要点精讲	238
§2 重要公式与结论	245

§ 3 典型题型与例题分析	246
题型一 考查二重积分的基本概念与性质	246
题型二 二重积分的基本计算方法	247
题型三 利用重积分的对称性简化计算	249
题型四 交换积分次序	251
题型五 分区域函数的二重积分	252
题型六 反常(广义)二重积分	254
* 题型七 直角坐标系下计算三重积分(适用于方形区域)	255
* 题型八 利用“先二后一”法(适用于旋转体类型的区域)	255
* 题型九 利用柱面坐标(适用于区域含柱形体的情形)	256
* 题型十 利用球面坐标(适用于区域含球形的情形)	256
题型十一 综合题	257
习题精选七	261
习题精选七参考答案	262
* 第八章 曲线、曲面积分	264
§ 1 知识要点精讲	264
§ 2 重要公式与结论	272
§ 3 典型题型与例题分析	273
题型一 对弧长的曲线积分的计算方法	273
题型二 对坐标的曲线积分的计算方法	274
题型三 对面积的曲面积分的计算方法	279
题型四 对坐标的曲面积分的计算方法	281
题型五 求曲面的面积	285
题型六 求向量场的散度及旋度	287
题型七 综合题	287
习题精选八	290
习题精选八参考答案	292
* 第九章 无穷级数	294
§ 1 知识要点精讲	294
§ 2 重要公式与结论	302
§ 3 典型题型与例题分析	303
题型一 判定常数项级数的收敛性	303
题型二 求函数项级数的收敛域、幂级数的收敛半径和收敛区间	306
题型三 求常数项级数的和及函数项级数的和函数	307
题型四 幂级数的展开	309
题型五 傅里叶级数的展开	310

题型六 综合题	312
习题精选九	314
习题精选九参考答案	316
第十章 常微分方程	317
§1 知识要点精讲	317
§2 基本方法	327
§3 典型题型与例题分析	328
题型一 可化为一阶线性微分方程的求解及全微分方程求解	328
题型二 可化为变量可分离微分方程的求解	331
题型三 可降阶的高阶微分方程	332
题型四 高阶线性微分方程和可化为二阶常系数线性微分方程的求解	334
题型五 综合题与应用题	337
习题精选十	342
习题精选十参考答案	344

第二部分 线性代数

第一章 行列式	347
§1 知识要点精讲	347
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	351
§3 典型题型与例题分析	354
题型一 利用行列式的性质与行(列)展开定理计算行列式	354
题型二 按行(列)展开公式求代数余子式	355
题型三 利用多项式分解因式计算行列式	356
题型四 抽象行列式的计算或证明	357
题型五 n 阶行列式的计算	359
题型六 利用特征值计算行列式	364
题型七 综合题	365
习题精选一	368
习题精选一参考答案	369
第二章 矩阵	370
§1 知识要点精讲	370
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	379
§3 典型题型与例题分析	382
题型一 求数值型矩阵的逆矩阵	382
题型二 A 为抽象矩阵, 讨论 A 的可逆性	385

题型三	考查矩阵运算的特殊性	386
题型四	解矩阵方程	388
题型五	求方阵 A 的高次幂 A^n	391
题型六	利用伴随矩阵 A^* 进行计算或证明	392
题型七	有关初等矩阵的问题	394
题型八	求矩阵的秩	395
题型九	综合题	399
习题精选二		400
习题精选二参考答案		402

第三章 向量 404

§1	知识要点精讲	404
§2	难点、疑点解析及重要公式与结论	415
§3	典型题型与例题分析	417
题型一	判定向量组的线性相关性	417
题型二	把一个向量用一组向量线性表示	423
题型三	求向量组的秩	429
题型四	有关矩阵秩的命题	432
* 题型五	有关向量空间的基本概念题	433
题型六	综合题	434
习题精选三		436
习题精选三参考答案		438

第四章 线性方程组 440

§1	知识要点精讲	440
§2	难点、疑点解析及重要公式与结论	445
§3	典型题型与例题分析	447
题型一	基本概念题(解的判定、性质、结构)	447
题型二	含有参数的线性方程组的求解	449
题型三	抽象线性方程组求解	457
题型四	讨论两个方程组的公共解	459
题型五	讨论两个方程组解之间的关系	463
题型六	已知方程组的解,反求系数矩阵或系数矩阵中的参数	465
题型七	有关基础解系的讨论	466
题型八	有关 $AB = 0$ 的应用	470
题型九	综合题	471
习题精选四		478
习题精选四参考答案		480

第五章 特征值与特征向量	482
§1 知识要点精讲	482
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	488
§3 典型题型与例题分析	490
题型一 数值型矩阵特征值、特征向量的计算	490
题型二 计算抽象矩阵的特征值	492
题型三 特征值、特征向量的逆问题	496
题型四 矩形相似与对角化的讨论	500
题型五 有关实对称矩阵的命题	506
题型六 特征值、特征向量与相似矩阵的应用问题	508
题型七 有关特征值、特征向量的证明问题	513
题型八 综合题	515
习题精选五	520
习题精选五参考答案	522

第六章 二次型	525
§1 知识要点精讲	525
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	532
§3 典型题型与例题分析	533
题型一 基本概念题(二次型的矩阵、秩、正负惯性指数)	533
题型二 化二次型为标准形	534
题型三 有关正定二次型(正定矩阵)命题的证明	540
题型四 综合题	544
习题精选六	548
习题精选六参考答案	549

* 第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率	553
§1 知识要点精讲	553
§2 补充注释与重要结论	558
§3 典型题型与例题分析	561
题型一 事件的表示和运算	561
题型二 有关概率基本性质的命题	562
题型三 古典概型与几何概型的概率计算	565
题型四 事件独立性的命题	569
题型五 条件概率与积事件概率的计算	571

题型六	全概率公式和贝叶斯公式概型	575
题型七	伯努利试验	578
题型八	综合题	579
习题精选一		582
习题精选一参考答案		584
第二章	随机变量及其分布	585
§ 1	知识要点精讲	585
§ 2	补充注释与重要结论	588
§ 3	典型题型与例题分析	591
题型一	有关随机变量与分布的基本概念题	591
题型二	求随机变量的分布律与分布函数	595
题型三	已知事件发生的概率,反求事件中的未知参数	601
题型四	利用常见分布求相关事件的概率	603
题型五	求随机变量函数的分布	604
题型六	综合题	609
习题精选二		611
习题精选二参考答案		613
第三章	多维随机变量及其分布	615
§ 1	知识要点精讲	615
§ 2	补充注释与重要结论	620
§ 3	典型题型与例题分析	622
题型一	联合分布、边缘分布与条件分布的计算	622
题型二	已知部分分布律或边缘分布,求联合分布律或相关参数	630
题型三	利用已知分布求相关事件的概率	631
题型四	随机变量函数的分布	633
题型五	随机变量的独立性的讨论	640
题型六	综合题	641
习题精选三		643
习题精选三参考答案		645
第四章	随机变量的数字特征	647
§ 1	知识要点精讲	647
§ 2	补充注释与重要结论	650
§ 3	典型题型与例题分析	651
题型一	期望和方差的计算	651
题型二	随机变量函数的数学期望与方差	655

题型三 有关协方差、相关系数、独立性与相关性的命题	662
题型四 有关数字特征的应用题	667
题型五 综合题	670
习题精选四	672
习题精选四参考答案	674
第五章 大数定律和中心极限定理	675
§1 知识要点精讲	675
§2 典型题型与例题分析	677
题型一 有关切比雪夫不等式的命题	677
题型二 有关大数定律的命题	679
题型三 有关中心极限定理的命题	680
题型四 综合题	684
习题精选五	685
习题精选五参考答案	686
第六章 数理统计的基本概念	688
§1 知识要点精讲	688
§2 补充注释与重要结论	694
§3 典型题型与例题分析	695
题型一 求样本容量 n , 或与样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 有关的概率	695
题型二 求统计量的数字特征	696
题型三 求统计量的分布	699
习题精选六	701
习题精选六参考答案	702
第七章 参数估计	703
§1 知识要点精讲	703
§2 补充注释与重要结论	706
§3 典型题型与例题分析	707
题型一 求矩法估计和最大似然估计	707
题型二 估计量评选标准的讨论	714
题型三 参数的区间估计	718
题型四 综合题	720
习题精选七	721
习题精选七参考答案	723
第八章 假设检验	724
§1 知识要点精讲	724

§ 2 补充注释与重要结论	726
§ 3 典型题型与例题分析	726
题型一 正态总体未知参数的假设检验	726
题型二 有关两类错误的命题	727
习题精选八	729
习题精选八参考答案	730