教育部高等农林院校理科基础课程

教学指导委员会推荐示范教材

线性代数

S

梁保松 苏金梅 主编

Linear Algebra

Linear Algebra

Linear Algebra

中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

推荐示范教材
教育部高等农林院校理科教学指导委员会

教育部高等农林院校理科基础课程

教学指导委员会推荐示范教材

线性代数

S

梁保松　苏金梅　主编

Linear Algebra

Linear Algebra
Linear Algebra

中国农业大学出版社
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/梁保松,苏金梅主编. —北京:中国农业大学出版社,2009. 12
ISBN 978-7-81117-932-3

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①梁…②苏…　Ⅲ. 线性代数　Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 224502 号

书　　名　线性代数
作　　者　梁保松　苏金梅　主编

策划编辑　张秀环　董夫才　　**责任编辑**　冯雪梅
封面设计　郑　川　　**责任校对**　王晓凤　陈　莹
出版发行　中国农业大学出版社
社　　址　北京市海淀区圆明园西路 2 号　　**邮政编码**　100193
电　　话　发行部 010-62731190,2620　　读者服务部 010-62732336
编辑部 010-62732617,2618　　出　版　部 010-62733440
网　　址　http://www.cau.edu.cn/caup　　**e-mail** cbsszs@cau.edu.cn
经　　销　新华书店
印　　刷　北京时代华都印刷有限公司
版　　次　2009 年 12 月第 1 版　　2009 年 12 月第 1 次印刷
规　　格　787×1 092　16 开本　13. 25 印张　294 千字
定　　价　21. 00 元

主　编　梁保松　苏金梅

副主编　毕守东　蔡淑云　王小春

丰　雪　郑国萍　唐　彦

编　者　(按姓氏拼音排序)

毕守东(安徽农业大学)

蔡淑云(北华大学)

陈玉珍(河南科技学院)

丰　雪(沈阳农业大学)

郭卫平(河北科技师范学院)

梁保松(河南农业大学)

石仁淑(延边大学)

苏金梅(内蒙古农业大学)

唐　彦(东北林业大学)

王国胜(河北科技师范学院)

王小春(北京林业大学)

张　冰(沈阳农业大学)

赵营峰(河南科技学院)

郑国萍(河北科技师范学院)

教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
推荐示范教材编审指导委员会

主　任　江树人

副主任　杜忠复　程备久

委　员（以姓氏笔画为序）

王来生　王国栋　方炎明　李宝华　张文杰　张良云
杨婉身　吴　坚　陈长水　林家栋　周训芳　周志强
高孟宁　戚大伟　梁保松　曹　阳　焦群英　傅承新

教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
推荐数学类示范教材编审指导委员会

主　任　高孟宁

委　员（以姓氏笔画为序）

王来生　石　峰　卢恩双　吴　坚　杜忠复　张良云
杜晓林　孟　军　房少梅　梁保松　惠淑荣

出版说明

在教育部高教司农林医药处的关怀指导下，由教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会（以下简称“基础课教指委”）推荐的本科农林类专业数学、物理、化学基础课程系列示范性教材现在与广大师生见面了。这是近些年全国高等农林院校为贯彻落实“质量工程”有关精神，广大一线教师深化改革，积极探索加强基础、注重应用、提高能力、培养高素质本科人才的立项研究成果，是具体体现“基础课教指委”组织编制的相关课程教学基本要求的物化成果。其目的在于引导深化高等农林教育教学改革，推动各农林院校紧密联系教学实际和培养人才需求，创建具有特色的数理化精品课程和精品教材，大力提高教学质量。

课程教学基本要求是高等学校制定相应课程教学计划和教学大纲的基本依据，也是规范教学和检查教学质量的依据，同时还是编写课程教材的依据。“基础课教指委”在教育部高教司农林医药处的统一部署下，经过批准立项，于 2007 年底开始组织农林院校有关数学、物理、化学基础课程专家成立专题研究组，研究编制农林类专业相关基础课程的教学基本要求，经过多次研讨和广泛征求全国农林院校一线教师意见，于 2009 年 4 月完成教学基本要求的编制工作，由“基础课教指委”审定并报教育部农林医药处审批。

为了配合农林类专业数理化基础课程教学基本要求的试行，“基础课教指委”统一规划了名为“教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材”（以下简称“推荐示范教材”）的项目。“推荐示范教材”由“基础课教指委”统一组织编写出版，不仅确保教材的高质量，同时也使其具有比较鲜明的特色。

一、“推荐示范教材”与教学基本要求并行　教育部专门立项研究制定农林类专业理科基础课程教学基本要求，旨在总结农林类专业理科基础课程教育教学改革经验，规范农林类专业理科基础课程教学工作，全面提高教育教学质量。此次农林类专业数理化基础课程教学基本要求的研制，是迄今为止参与院校和教师最多、研讨最为深入、时间最长的一次教学研讨过程，使教学基本要求的制定具有扎实的基础，使其具有很强的针对性和指导性。通过“推荐示范教材”的使用推动教学基本要求的试行，既体现了“基础课教指委”对推行教学基本要求

的决心，又体现了对“推荐示范教材”的重视。

二、规范课程教学与突出农林特色兼备 长期以来各高等农林院校数理化基础课程在教学计划安排和教学内容上存在着较大的趋同性和盲目性，课程定位不准，教学不够规范，必须科学地制定课程教学基本要求。同时由于农林学科的特点和专业培养目标、培养规格的不同，对相关数理化基础课程要求必须突出农林类专业特色。这次编制的相关课程教学基本要求最大限度地体现了各校在此方面的探索成果，“推荐示范教材”比较地充分反映了农林类专业教学改革的新成果。

三、教材内容拓展与考研统一要求接轨 2008 年教育部实行了农学门类硕士研究生统一入学考试制度。这一制度的实行，促使农林类专业理科基础课程教学要求作必要的调整。“推荐示范教材”充分考虑了这一点，各门相关课程教材在内容上和深度上都密切配合这一考试制度的实行。

四、多种辅助教材与课程基本教材相配 为便于导教导学导考，我们以提供整体解决方案的模式，不仅提供课程主教材，还将逐步提供教学辅导书和教学课件等辅助教材，以丰富的教学资源充分满足教师和学生的需求，提高教学效果。

乘着即将编制国家级“十二五”规划教材建设项目之机，“基础课教指委”计划将“推荐示范教材”整体运行，以教材的高质量和新型高效的运行模式，力推本套教材列入“十二五”国家级规划教材项目。

“推荐示范教材”的编写和出版是一种尝试，赢得了许多院校和老师的参与和支持。在此，我们衷心地感谢积极参与的广大教师，同时真诚地希望有更多的读者参与到“推荐示范教材”的进一步建设中，为推进农林类专业理科基础课程教学改革，培养适应经济社会发展需要的基础扎实、能力强、素质高的专门人才做出更大贡献。

中国农业大学出版社

2009 年 8 月

内容提要

本书为教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会组织编写的理科基础课程示范教材，主要内容有行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型等。本书取材广泛，内容丰富，突出了数学能力的培养，体现了数学建模思想，有一定的广度和深度。

本书每章后配有适量习题及综合练习题，以巩固所学内容。书后附有习题和综合练习题的参考答案。

全书结构严谨，叙述详细，通俗易学，可作为高等农林院校的生物、工科、经济、管理类专业的教科书，也可以作为研究生入学考试的参考书。

前言

本书为教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会组织编写的理科基础课程示范教材。

线性代数是高等农林院校本科生的一门重要的基础课，也是自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具。在计算机日益普及的今天，线性代数在理论和应用上的重要性更显突出，因此各专业对线性代数内容从深度和广度上都提出了更高的要求。

本教材按照教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会对数学课程的基本要求，结合作者多年来教学研究和科学研究等方面的成果编写而成。编写过程中注意渗透现代数学思想，注重体现素质教育和创新能力的培养，以适应现代化农林科学对农林人才数学素质的要求。

本教材适用于高等农林院校生物、工科、经济、管理类专业本科生教学，讲完本书课程需40～48学时。

本教材以行列式和矩阵为工具，以线性方程组为主线，阐明了线性代数的基本概念、理论和方法。

本教材在内容的安排上具有以下特点：

1. 保持体系完整。全书结构严谨，内容由浅入深，循序渐进，通俗易学，努力突出线性代数的基本思想和方法。一方面，使学生能够较好地了解各部分的内在联系，从总体上把握线性代数的思想方法；另一方面，培养学生严密的逻辑思维能力。

2. 追求简明实用。考虑到线性代数概念多、定理多、内容抽象、逻辑性强的特点，尽量以提出问题或简单实例引入概念，力求深入浅出、通俗简单、难点分散；删去了一些烦琐的理论证明，直接从客观世界所提供的模型和原理中导出线性代数的基本概念和公式，使表达更加简明；引导学生理解概念的内涵和背景，培养学生用线性代数的思想和方法分析与解决实际问题的能力。

3. 强调矩阵方法的应用。加强了矩阵分块运算，特别是简单实用的矩阵列分块在证明问题中的应用，凸显了矩阵方法的简洁与精巧性。

4. 本书每章后面配有适量的习题。为了巩固基础知识，加强综合能力的培养，进一步提高学习的质量，设置了综合练习题。其题型包括判断题、填空题、计算题、证明题等。书后附有习题参考答案。

河南农业大学、内蒙古农业大学、北华大学、河南科技学院、沈阳农业大学、河北科技师范学院、东北林业大学、北京林业大学、延边大学、安徽农业大学共10所高校参加了本教材的编写工作，编写人员有梁保松、苏金梅、毕守东、蔡淑云、陈玉珍、丰雪、郭卫平、石仁淑、唐彦、王国胜、王小春、张冰、赵营峰、郑国萍，最后由梁保松统一定稿。

最后，对中国农业大学出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动表示衷心的感谢。

错漏之处，敬请专家、同行和读者批评指正。

编　者

2009年10月8日

目录
CONTENTS

Chapter 1 第 1 章 行列式

Determinant

行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的，它是一个重要的数学工具，在讨论很多问题时都要用到它. 本章先介绍二、三阶行列式，并把它推广到 n 阶行列式上，然后讨论行列式的基本性质和计算方法，最后利用 Cramer 法则求解线性方程组. 为了阐明 n 阶行列式展开项的符号规律，首先引入 n 级排列的逆序与奇偶性的概念.

§1.1 排列的逆序与奇偶性

定义 1 由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个没有重复数字的 n 元有序数组，称为一个 n 级排列，简称排列，记为 $i_1i_2\cdots i_n$，$1\ 2\cdots n$ 称为自然排列. n 级排列总共有 $n!$ 个.

例如 2 级排列共有 2 个：12，21；3 级排列共有 6 个：123，132，213，231，312，321.

定义 2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若一个较大的数排在一个较小数的前面，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1)35214；　(2)$n(n-1)\cdots 21$.

解 由逆序数的定义，任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数

$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

(1)$\tau(35214)=2+3+1+0=6$，35214 为偶排列；

(2)$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

而 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性需由 n 而定，讨论如下：

当 $n=4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 是偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 是偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 是奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(4k+3)(2k+1)$ 是奇数.

所以，当 $n=4k$ 和 $n=4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 和 $n=4k+3$ 时，此排列为奇排列.

定义 3　一个排列中的某两个数 i,j 互换位置，其余的数不动，就得到一个新的排列，对于排列所施行的这样的一个变换称为一次对换，用 (i,j) 表示. 相邻两个数的对换称为邻换.

对换有如下性质：

定理 1　一次对换改变排列的奇偶性.

证　首先证明一次邻换改变排列的奇偶性.

设 n 级排列为 $\cdots ij\cdots$，将相邻的两个数 i,j 对换，得到一个新的排列 $\cdots ji\cdots$. 由于除 i,j 两数之外其余的数不动，所以，其余数之间的逆序没有变化.

若 $i>j$，则新排列的逆序数比原排列减少 1；若 $i<j$，则新排列的逆序数比原排列增加 1. 所以一次邻换改变排列的奇偶性.

再证明一般对换的情形：

设 n 级排列为 $\cdots ia_1a_2\cdots a_kj\cdots$，$i,j$ 之间相隔 k 个数. 要实现 i,j 的对换，得到新的排列 $\cdots ja_1a_2\cdots a_ki\cdots$，可先将 i 与 a_1 邻换，再把 i 与 a_2 邻换…这样，经过 $k+1$ 次邻换，就可以将 i 调换到 j 之后，得到排列 $\cdots a_1a_2\cdots a_kji\cdots$；然后再把 j 依次邻换到 a_1 之前，这需要经过 k 次邻换. 这样，共经过 $2k+1$ 次邻换，完成了 i 与 j 的对换. 由一次邻换改变排列的奇偶性，所以原排列与新排列的奇偶性不同.

推论 1　奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

由定理 1，一次对换改变排列的奇偶性. 因为 $12\cdots n$ 是偶排列，所以若排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇(偶)排列，则必须经奇(偶)数次对换才能变成自然排列.

推论 2　$n\geqslant 2$ 时，全体 n 级排列中，奇排列和偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证　设全体 n 级排列中，奇排列的个数为 p，偶排列的个数为 q. 对这 p 个奇排列施行同一个对换 (i,j)，由定理 1，可得到 p 个偶排列. 若对这 p 个偶排列施行对换 (i,j)，又得到原来的 p 个奇排列，所以这 p 个偶排列各不相同. 但一共只有 q 个偶排列，故 $p\leqslant q$. 同样，可得 $q\leqslant p$. 因此，$p=q=\frac{n!}{2}$.

§1.2 二、三阶行列式

1.2.1 二阶行列式

解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_1,x_2 是未知量；$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 代表未知量的系数；b_1,b_2 代表常数项. 为消去 x_2，用 a_{22} 和 a_{12} 分别乘以两个方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2;$$

同理，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

为便于叙述和记忆，引入二阶行列式的概念.

定义 1 2^2 **个数** $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ **排成 2 行 2 列，称记号**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{3}$$

为二阶行列式. 其中数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 叫做行列式的**元素**，横排叫做行，竖排叫做列. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列. 数 a_{ij} 称为行列式 D 的第 i 行第 j 列元素.

二阶行列式的计算可用**对角线法则**来记忆. 从行列式的左上角元素 a_{11} 到右下角元素 a_{22} 作连线，该连线称为行列式的**主对角线**；而行列式的左下角元素 a_{21} 到右上角元素 a_{12} 的连线称为行列式的**副对角线**. 于是二阶行列式是两项的代数和，第一项是主对角线上两元素的乘积，并带正号；第二项是副对角线上两元素的乘积，并带负号.

按照二阶行列式的定义，式(2)中 x_1,x_2 的表达式中的分子则分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

显然，$D_i(i=1,2)$ 即为 D 中的第 i 列换成方程组(1)的常数列所得到的行列式.

于是，当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组(1)的解可唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{4}$$

例 1 用二阶行列式求解线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-2x_2=12,\\2x_1+x_2=1.\end{cases}$$

解 由于 $D=\begin{vmatrix}3 & -2\\2 & 1\end{vmatrix}=7\neq0$，且

$$D_1=\begin{vmatrix}12 & -2\\1 & 1\end{vmatrix}=14,\quad D_2=\begin{vmatrix}3 & 12\\2 & 1\end{vmatrix}=-21,$$

由式(4)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-3.$$

1.2.2 三阶行列式

解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{5}$$

求解此方程组，可由前两个方程消去 x_3，得到一个只含 x_1,x_2 的二元方程；再由后两个方程消去 x_3 得到另一个只含 x_1,x_2 的二元方程，这样得到一个含两个未知量的二元线性方程组. 消去 x_2，得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\&=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32},\end{aligned}$$

即
$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}.$$

同理，得

$$x_2=\frac{b_2a_{11}a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+b_3a_{13}a_{21}-b_2a_{13}a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-b_3a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}},$$

$$x_3=\frac{b_3a_{11}a_{22}+b_2a_{12}a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-b_3a_{12}a_{21}-b_2a_{11}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}.$$

为便于叙述和记忆，引入三阶行列式的概念.

定义 2 3^2 个数 $a_{ij}\,(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 排成 3 行 3 列，称记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \quad (6)$$

为三阶段列式.

式(6)右边有 6 个项,每项是位于 D 中既不同行又不同列的三个元素的乘积,并按照一定的规则,带有正号或负号,三阶行列式的计算也可以用**对角线法则**来记忆.

在对角线计算法中,主对角线上三个元素之积及平行于主对角线的三元素之积的项取正号(图 1-1 中用实线连接);副对角线上三个元素之积及平行于副对角线的三个元素之积的项取负号(图 1-1 中用虚线连接).

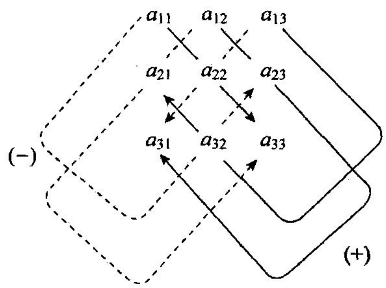

图 1-1

由二阶、三阶行列式的定义可以看出,二阶、三阶行列式的符号规律是:当该项元素的行标按自然数顺序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,奇排列则取负号.

我们称式(6)中的 D 为三元线性方程(5)的系数行列式.根据上面的算法,有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32},$$

则 x_1 可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

同理,得

$$x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

显然,$D_i(i=1,2,3)$是把系数行列式 D 中的第 i 列换成方程组(5)中的右边常数列所得到的行列式.