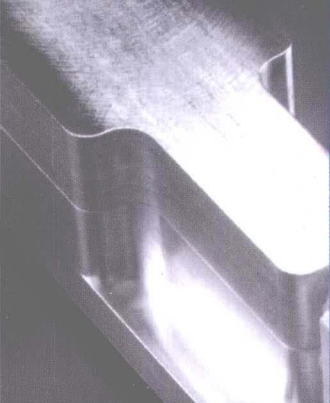
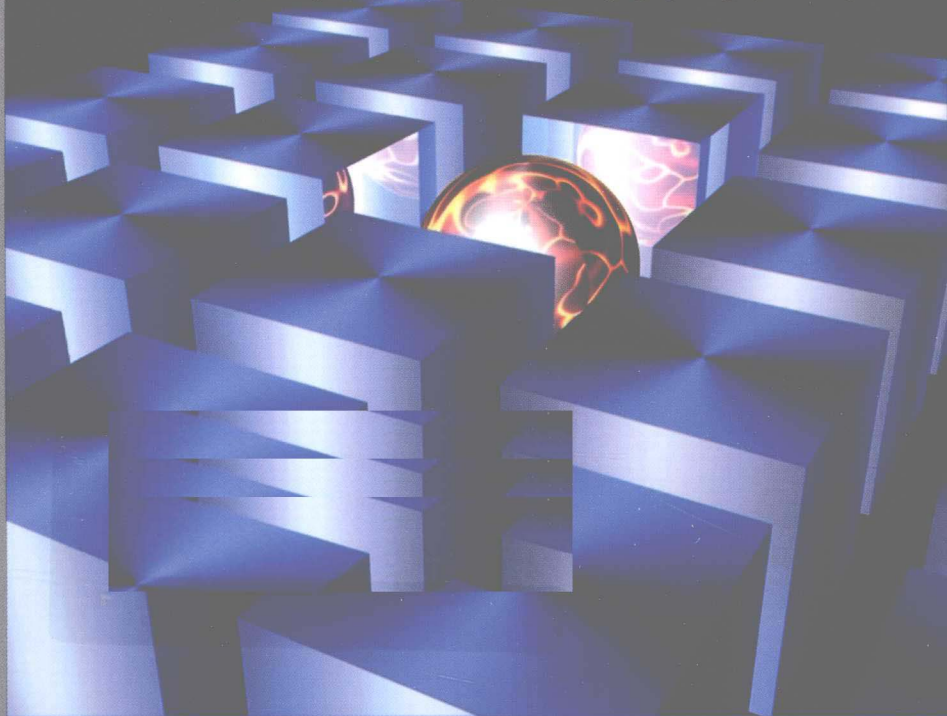




尹武良 著

低频电磁传感检测技术

——设计、分析、计算与应用



科学出版社

www.sciencep.com

低频电磁传感检测技术

——设计、分析、计算与应用

尹武良 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是作者十余年来在电磁检测和成像领域的研究成果。作为一部学术型著作,本书将电磁理论分析和实际课题结合,涵盖了电磁传感检测和成像系统的设计、分析、计算与应用。尤其是后面应用章节(第4~13章)涉及了电磁检测技术在不同领域如钢铁、航空、生物医学、流程工业等的诸多应用,每个应用实例在设计、分析和计算方面各有侧重,对电磁检测和成像领域的研究人员有参考价值。

本书可供高校研究生和企业界的工程人员参考,可作为解决实际工程问题的借鉴,提高在电磁检测方面的理论水平。

图书在版编目(CIP)数据

低频电磁传感检测技术:设计、分析、计算与应用 / 尹武良著. —北京:科学出版社,2010

ISBN 978-7-03-028498-3

I. ①低… II. ①尹… III. ①低频-传感器-电磁测量 IV. ①TP212.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 150293 号

责任编辑:张海娜 / 责任校对:朱光兰

责任印制:赵 博 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2010年8月第一次印刷 印张:10 1/4

印数:1—3 500 字数:195 000

定价:40.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

电磁传感检测技术涵盖的范围很广。广义而言,任何利用电磁现象、电磁原理对物理量进行测量的技术均称为电磁传感技术。本书是一本专门针对利用低频电磁现象尤其是法拉第电磁感应原理进行传感和测量的专著。常见的在低频范围($<100\text{MHz}$)内工作的传感器有电阻式、电容式、电感式等。本书主要讲述感应式电磁传感器、电磁层析成像技术的基本理论、分析计算和设计方法及典型应用。

第1~3章讲述低频电磁基本理论,低频电磁分析计算技术,电磁传感器基本原理、构造与分类,为后续章节打下基础。第4~14章是本书的核心内容,在每章中针对一个实际的应用领域,阐明一种电磁传感器的设计、分析及应用。这些章节涉及不同领域的诸多应用,在计算、分析和设计方面各有侧重,读者可根据兴趣与需要单独阅读。同时,各章又有内在的联系,即它们均围绕低频电磁传感检测技术进行阐述,根据各章内容的相关性和难易程度排列其顺序。

本书内容可按照电磁理论层、系统实现层和应用领域层进行分解。在最上层的是应用领域层,它主要涵盖了电磁检测技术的潜在和典型应用:①钢铁生产和多相流过程工业中的过程检测;②对航空复合材料(如碳纤维增强复合塑料、大型金属结构(如桥梁、码头、钢轨、发电设备等))的无损评估检测;③生物医学和工业过程计算机层析成像等。支撑应用领域层的实现技术属于中间层——系统实现层,它包括传感器和测量系统的设计与实现。最下层是电磁理论层,它为系统实现层和应用领域层提供基本理论、方法与技术,包括电磁场的分析与仿真技术、传感器的计算与仿真技术、电磁计算方法(如积分方程法、微分方程法、解析方法、有限元法、有限差分法等)。

感谢 A. J. Peyton 教授、X. J. Hao 博士和 B. Dekdouk 博士的合作研究,感谢研究生康学福、王奔、陈广、姜剑、郝建娜、赵倩、陈立晶、徐凯、王寒凝、宋浩、张凌峰、马世文、陈锋协助整理技术资料。

感谢国家自然科学基金重大国际合作研究计划(60910001)、教育部新世纪人才、教育部博士点基金、上海市东方学者特聘教授计划的支持。

目 录

前言

第 1 章 低频电磁基本理论	1
1.1 麦克斯韦方程组	1
1.2 扩散方程	3
参考文献	4
第 2 章 低频电磁分析计算技术	5
2.1 体积分方程法	5
2.1.1 标量扩散方程	5
2.1.2 向量扩散方程	6
2.1.3 积分方程的矩阵表达与求解	7
2.2 有限元法	8
2.3 解析法	10
参考文献	13
第 3 章 电磁传感器基本原理、构造与分类	14
参考文献	16
第 4 章 轧钢过程在线相变检测	17
4.1 应用与研究背景	17
4.2 测量原理与传感器构造	19
4.3 采集系统设计	21
4.4 传感器特性的理论、数值分析与实验室测试结果	22
4.4.1 双空气芯线圈在导电平面上的电感变化	22
4.4.2 U 形铁磁芯线圈在导电平面附近的电感变化	25
4.4.3 实验室测试结果	27
4.5 小结	29
参考文献	29
第 5 章 电磁法对导电平板厚度的测量	31
5.1 应用与研究背景	31
5.2 测量原理与传感器构造、设计	31
5.3 虚部峰值特征测厚法	32
5.4 相位特征测厚法	38

参考文献	43
第6章 电磁法对多层导电平板结构的测量	45
6.1 应用与研究背景	45
6.2 正问题	45
6.3 逆问题	46
6.4 仿真与实验结果	48
6.4.1 基于仿真数据的电导率分布重建	50
6.4.2 基于测量数据的电导率分布重建	52
6.5 小结	56
参考文献	56
第7章 钢材脱碳厚度的估计	57
7.1 应用与研究背景	57
7.2 测量原理与传感器构造、设计	57
7.3 理论分析与实验结果	59
7.3.1 传感器的解析模型	59
7.3.2 金相测试	60
7.3.3 电磁传感器的测量结果	62
参考文献	64
第8章 工业电磁层析成像	66
8.1 电磁层析成像原理与特点	66
8.2 电磁层析成像系统构成	69
8.3 电磁层析成像的正问题电磁分析	77
8.4 灵敏度矩阵	82
8.4.1 测量扰动法	83
8.4.2 模型扰动法	83
8.4.3 场量提取法	85
8.5 重建算法	86
8.5.1 非迭代式算法	86
8.5.2 迭代式算法	90
8.6 系统软件与人机界面	92
8.7 EMT 的工业应用	94
参考文献	96
第9章 医学电磁层析成像	97
9.1 弱耦合场假设理论	98
9.2 弱耦合场假设下的 EMT 正问题简化计算方法——阻抗法	102

9.2.1 头部模型	103
9.2.2 计算结果与讨论	104
9.3 波传播效应的估计	106
9.4 屏蔽层效应的估计	111
参考文献	115
第 10 章 平面电磁层析成像	117
10.1 应用与研究背景	117
10.2 传感器设计和分析	117
10.3 逆问题求解和成像结果	121
参考文献	123
第 11 章 用于水位和电导率测量的电磁传感器	124
11.1 应用与研究背景	124
11.2 测量原理和传感器构造	124
11.3 理论分析与实验结果	125
11.3.1 理论分析	125
11.3.2 实验验证与结果	126
11.3.3 水位和电导率测量结果	128
11.3.4 测量不确定性分析	130
参考文献	131
第 12 章 碳纤维增强塑料测试	132
12.1 应用与研究背景	132
12.2 测量原理和传感器构造	133
12.3 理论分析、计算与实验结果	134
12.3.1 等效电导率估计	134
12.3.2 方向性的评估	135
12.3.3 受损区域的成像	136
参考文献	137
第 13 章 碳纤维增强塑料和铝的组材料测试	139
13.1 应用与研究背景	139
13.2 测量原理和传感器构造	140
13.3 组合材料的等效电导率估计	141
13.4 方向性的评估	142
参考文献	143
第 14 章 非接触感应式流体层析成像	144
14.1 应用与研究背景	144

14.2	流速场灵敏度的理论推导·····	145
14.3	流速场灵敏度的数值方法·····	149
14.4	传感器设计的优化·····	151
14.5	小结·····	154
	参考文献·····	154

第 1 章 低频电磁基本理论

本书主要研究低频电磁传感检测技术,这项技术的理论基础是电磁基本理论,因此本章的内容是本书后续章节的基础。

1.1 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组由麦克斯韦(Maxwell)于 1873 年建立。在此之前,基于法拉第(Faraday)、安培(Ampere)和高斯(Gauss)等学者的研究成果形成的定理、方程以单独、不完整的形式存在。麦克斯韦将位移电流项加入安培电流定律,形成全电流的概念,从而表明了电磁能可以以波的形式存在。

麦克斯韦方程组描述了所有可能存在的宏观电磁现象,因此在本书所研究的低频电磁传感系统中所遇到的电磁问题同样可由其解答。低频电磁系统一般符合似稳场的假设,此时,低频电磁问题可由麦克斯韦方程组的准静态(quasi static)形式描述。

麦克斯韦方程组的微分形式为^[1]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.4)$$

其中, $\mathbf{E}$ 为电场强度(F/m); $\mathbf{H}$ 为磁场强度(A/m); $\mathbf{B}$ 为磁通量密度(Wb/m²); $\mathbf{D}$ 为电通量密度(C/m²); $\mathbf{J}$ 为电流密度(A/m²); ρ 为电荷密度(C/m³)。算子 $\nabla \times$ 是场量旋度的表示;算子 $\nabla \cdot$ 是场量散度的表示,即从一点处流出的通量。式(1.1)表示变化的磁场 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 产生旋转的电场,是法拉第定律;式(1.2)表示电流密度($\mathbf{J}$)

或变化的电场 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (位移电流)产生旋转的磁场,是安培定律;式(1.3)表示磁通量密度 $\mathbf{B}$ 的散度为零,即流入一个封闭曲面的磁通必会等量流出,也即磁场为无源场;式(1.4)表示电通量密度 $\mathbf{D}$ 的散度等于该处的电荷密度 ρ ,即电场沿封闭曲面的面积分等于这个封闭曲面内的电荷量,所以电场是有源场。式(1.3)和式(1.4)为高斯定律在磁场和电场中的表达。

在线性各向同性媒质中,有下述媒质特性方程:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases}$$

其中, ϵ 为媒质的介电常数; σ 为媒质的电导率; μ 为媒质的磁导率。真空的磁导率为 $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, 其介电常数 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

麦克斯韦方程式(1.1)的积分形式为

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.5)$$

根据斯托克斯定律,可将式(1.5)左边的面积分转化为线积分

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

其中, l 是环绕面 S 的周线。这个转换可由图 1.1 来表示和解释。

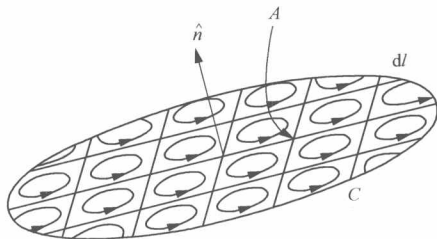


图 1.1 斯托克斯定律示意图

S 面上 $\mathbf{E}$ 的旋度之和等于环绕其周线 l 上的旋度。更一般而言,平面上一个向量的旋度面积分等于其在边界上的线积分,这是由于中间相邻元素的旋度互相抵消。式(1.5)的物理含义是通过截面的磁通变化率等于沿截面边界的环路电动势。

同理,式(1.2)的积分形式为

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.6)$$

同样, $\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ 的物理含义是通过截面的电通量的变化率和电流等于磁场强度沿截面边界的环路积分(即环路磁动势)。

式(1.3)的积分形式为

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (1.7)$$

根据高斯定律 (Gauss's law), 将式(1.7)左边的体积积分转化为表面积分,

$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, 这个转换可由图 1.2

表示和解释。

在体积上对一个向量的散度的积分等于在其边界上的法向面积分, 这是由于中间相邻元素的流入、流出通量互相抵消所致。

同理式(1.4)的积分形式为

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \oint_V \rho dV = q \quad (1.8)$$

即 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 。其中, q 为体积 V 内的电荷量。式(1.7)表示在封闭曲面内磁通量守恒, 式(1.8)表示从封闭曲面 S 穿出的净电通量等于 S 内的电荷量。

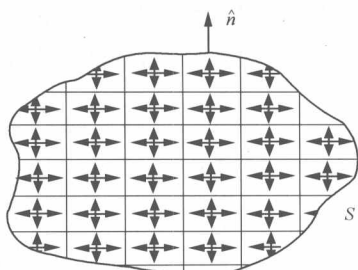


图 1.2 高斯定律示意图

1.2 扩散方程

在本节中引入势能的概念和表达。

根据向量的性质, 一个向量的旋度的散度总为零, 得到如下两个表达式:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0 \quad (1.9)$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0 \quad (1.10)$$

考虑麦克斯韦方程组, 电势 ϕ 和磁势 $\mathbf{A}$ 可以和电场及磁场强度通过下列式子联系起来:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.12)$$

考虑到磁场的基本方程式(1.2), 忽略位移电流项 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (似稳场假设), 则

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (1.13)$$

那么可以得到如下等式:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (1.14)$$

进一步得到

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (1.15)$$

考虑到欧姆定律 (Ohm's law) $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 和一种特殊情形 $\nabla \phi = 0$, 那么式(1.15)变为

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.16)$$

采用库仑规范 (Coulomb gauge) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 式(1.16)变为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \quad (1.17)$$

这就是以向量磁位表达的扩散方程(diffusion equation)。

同样,对式(1.1)的两边取旋度

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.18)$$

考虑到 $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$ 和, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$ 在 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 的前提下,式(1.18)变为

$$\nabla^2 \mathbf{J} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \quad (1.19)$$

这就是以电流向量表达的扩散方程。

同样通过前述的公式可导出

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.20)$$

这是以磁场通量表达的扩散方程。

在给定的边界下,求解式(1.17)、式(1.19)和式(1.20),都可以直接或间接地得到电流密度 $\mathbf{J}$ [2]。在导电物体中的由感应引起的电流为涡流,式(1.19)可以直接得到涡流分布,求解式(1.17)后由 $\mathbf{A}$ 可以通过表达式 $\mathbf{J} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 求得 $\mathbf{J}$, 求解式(1.20)后,由 $\mathbf{B}$ 可以通过表达式 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$ 求得 $\mathbf{J}$ 。

在上述的扩散方程中,如果工作频率极低或为零(直流),则时间项 $-\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 、 $-\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 、 $-\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$ 均变为零,上述的扩散方程变为拉普拉斯方程,即

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{J} = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

这是描述静磁场(magnetostatic)的表达方程。

参 考 文 献

- [1] 冯慈璋. 电磁场. 第二版. 北京:高等教育出版社,1995.
- [2] Tegopoulos J A, et al. Eddy Currents in Linear Conducting Media. New York: Elsevier Science, 1984.

第 2 章 低频电磁分析计算技术

电磁计算方法总体上可分为积分方程法、微分方程法和混合法。其中积分方程法包括体积积分方程法(volume integral equations)、表面积分方程法(surface integral equations, 也称为边界积分方程法, boundary integral equations); 微分方程法包括有限元法、有限差分法和解析法; 混合法的例子有解析法和有限差分的混合法等。在本章中, 我们主要讲述体积积分方程法、有限元法和解析法。

2.1 体积积分方程法

对于低频电磁问题(包括涡流问题), 可以采用体积积分方程法求解。这时, 导电物体内的传导电流可以表达为未知场量(即全场量 total field)的形式。求解以全场量为未知量的积分方程可以得到导电物体内的传导电流分布。体积积分方程提供了对电磁散射(EM scattering)现象的另一种视角, 因而有助于理解对应的内在物理现象^[1]。

下面先从标量扩散方程的求解出发, 进一步讲述向量扩散方程的求解。

2.1.1 标量扩散方程

标量扩散方程为

$$(\nabla^2 + k^2(\mathbf{r}))\phi(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

其中, $k^2(\mathbf{r}) = -j\omega\mu(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r})$, 代表在域 V 上的导电物质; $k_b^2(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_b(\mathbf{r})\sigma_b(\mathbf{r})$, 代表在 V 外的域(图 2-1)。

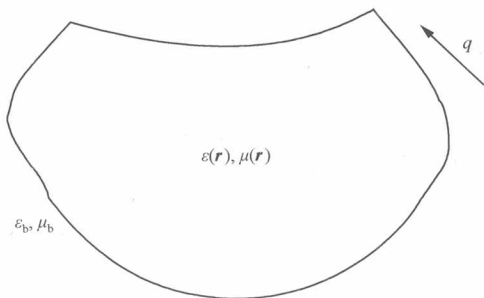


图 2.1 电流源在非均匀介质附近的辐射

定义一个格林函数满足

$$(\nabla^2 + k_b^2)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.2)$$

那么式(2.1)可以改写为

$$(\nabla^2 + k_b^2)\phi(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}) - (k^2(\mathbf{r}) - k_b^2)\phi(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

这时,式(2.3)右侧项可以视为等效源。由于式(2.3)左侧微分算子的格林函数已知,根据线性叠加原理,可以得到

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{V_s} dV' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q(\mathbf{r}') + \int_V dV' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (k^2(\mathbf{r}') - k_b^2) \phi(\mathbf{r}') \quad (2.4)$$

在式(2.4)右边的第一项是原始的人射场,即在无导电物存在时的原场量。因此式(2.4)也可写为

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \int_V dV' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (k^2(\mathbf{r}') - k_b^2) \phi(\mathbf{r}') \quad (2.5)$$

在式(2.5)中,如果在体积 V 中的场 $\phi(\mathbf{r}')$ 可以求得,那么在整个域中的场量 $\phi(\mathbf{r})$ 就可以得到。

为了对 $\phi(\mathbf{r}')$ 进行求解,列出含有 $\phi(\mathbf{r}')$ 的积分方程。如果定义 $\mathbf{r}$ 在 V 中,那么式(2.5)左边和右边的 $\phi(\mathbf{r})$ 就定义在同一体积 V 上。因此式(2.5)变为典型的积分方程形式

$$\phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) - \int_V dV' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (k^2(\mathbf{r}') - k_b^2) \phi(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in V \quad (2.6)$$

式(2.6)的算子表达式为

$$\phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \phi(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in V \quad (2.7)$$

其中, $\mathbf{I}$ 是单元算子; $\mathbf{L}$ 是积分算子。式(2.7)称为第二类 Fredholm 积分方程。

2.1.2 向量扩散方程

从麦克斯韦方程组推知,向量扩散方程为

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega\sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) = j\omega \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

其中, μ 和 σ 是导电物体的磁导率和电导率。在式(2.8)两边减去 $\nabla \times \mu_b^{-1} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega\sigma_b \mathbf{E}(\mathbf{r})$,得到

$$\begin{aligned} & \nabla \times (\mu^{-1} - \mu_b^{-1}) \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega(\sigma - \sigma_b) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= j\omega \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \nabla \times \mu_b^{-1} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - j\omega\sigma_b \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

定义一个格林函数满足

$$\nabla \times \mu_b^{-1} \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + j\omega\sigma_b \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mu_b^{-1} \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.10)$$

式(2.9)可表示为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mu_b^{-1} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega\sigma_b \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= j\omega \mathbf{J}(\mathbf{r}) - j\omega(\sigma - \sigma_b) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &\quad - \nabla \times (\mu^{-1} - \mu_b^{-1}) \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

式(2.11)右边可视为源项,因此其积分方程解为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & j\omega\mu_b \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') - j\omega\mu_b \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\sigma - \sigma_b) \mathbf{E}(\mathbf{r}') \\ & - \mu_b \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \times (\mu^{-1} - \mu_b^{-1}) \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (2.12)$$

式中第一项为入射场,因此式(2.12)可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) - j\omega\mu_b \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\sigma - \sigma_b) \mathbf{E}(\mathbf{r}') \\ & - \mu_b \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \times (\mu^{-1} - \mu_b^{-1}) \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (2.13)$$

进一步,如果 $\mu = \mu_b$, 那么式(2.13)可以简化为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot O(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (2.14)$$

其中, $O(\mathbf{r}') = -j\omega\mu(\sigma - \sigma_b)$ 。

在式(2.14)中, $\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r})$ 通常由外加电流源 $\mathbf{J}$ 决定,而 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 未知。其算子表达式为

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \mathbf{E}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in V \quad (2.15)$$

2.1.3 积分方程的矩阵表达与求解

对于积分方程式(2.14),可以使用矩量法(method of moments)来求解。将 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 表达为基函数之和

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_n a_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V \quad (2.16)$$

那么

$$\sum_n a_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_n a_n \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot O(\mathbf{r}') \mathbf{E}_n(\mathbf{r}') \quad (2.17)$$

对式(2.17)两边乘以 $O(\mathbf{r})$ 将使算子对称化

$$\sum_n a_n O(\mathbf{r}) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = O(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_n a_n O(\mathbf{r}) \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot O(\mathbf{r}') \mathbf{E}_n(\mathbf{r}') \quad (2.18)$$

选 $\mathbf{E}_m(\mathbf{r})$ 为试函数(权函数),采取伽辽金(Galerkin)方法

$$\begin{aligned} \sum_n a_n \langle \mathbf{E}_m, O(\mathbf{r}) \mathbf{E}_n \rangle = & \langle \mathbf{E}_m, O(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle \\ & + \sum_n a_n \langle \mathbf{E}_m, O(\mathbf{r}) \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot O(\mathbf{r}') \mathbf{E}_n(\mathbf{r}') \rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

现在式(2.19)变成一个矩阵方程式

$$\sum_n M_{nm} a_n = b_m + \sum_n N_{nm} a_n \quad (2.20)$$

其中

$$M_{nm} = \langle \mathbf{E}_m, O(\mathbf{r}) \mathbf{E}_n \rangle$$

$$N_{nm} = \langle \mathbf{E}_m, O(\mathbf{r}) \int_V d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot O(\mathbf{r}') \mathbf{E}_n(\mathbf{r}') \rangle$$

$$b_m = \langle \mathbf{E}_m, O(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle$$

对式(2.20)求解,即可得到 a_n 。

当然权函数(试函数)的选取也可以是 Dirac delta 函数。

相对于 2.2 节讲到的有限元法,体积积分方程法的未知量范围仅在导电物体内部,即背景区域处的量不需求解,因此未知量和方程的个数较少。

2.2 有限元法

有限元法(finite element method)一般在整个场域进行求解,它的特点是适合于对多介质、场域边界形状不规则的问题求解。这是因为有限元法中的基本单元(二维时为三角形,三维时为四面体)非常灵活,容易近似任何边界形状。同时,第二类 and 第三类在不同媒质分界面处的边界条件不需单独处理,自动即可满足。

有限元法的基本原理在许多电磁场教科书中都有所阐述^[2],在此仅作概括。有限元法的公式可由两种方法得到:①变分法;②伽辽金法。

变分有限元法的步骤为:

- (1) 找出与边值问题相应的泛函及其变分问题;
- (2) 将场域剖分,然后将剖分单元中任意点的未知函数用该剖分单元中的形状函数展开,即把连续介质中无限自由度的问题离散化成有限自由度的问题;
- (3) 求泛函的极值,导出联立代数方程组;
- (4) 用直接法或迭代法求解代数方程组。

利用伽辽金法的有限元法步骤为:

- (1) 将场域剖分,将剖分单元中的未知函数在场域上用基函数来表示;
- (2) 将以基函数表示的未知函数代入偏微分方程中;
- (3) 选择原始的基函数或其他函数为试函数(权函数),在定义的内积空间上使偏微分方程成立,得到线性方程组;
- (4) 求解得到的线性方程组。

值得指出的是,如果偏微分方程的定解问题存在相应的变分问题,那么用变分法和伽辽金法得到的线性方程组是相同的。

有限元法可分为两类,即节点有限元(node element)法和棱边有限元(edge element)法。前者属于标量有限元法,后者属于向量有限元法。二者的根本区别在

于,基函数是在节点上或在棱边上定义。节点有限元法在求解涡流问题中的主要困难在于在节点上定义向量磁势,使得其法向分量自然连续,而散度出现跳变。这在两种介质的分界面处及几何奇异处会出现非物理现象。因此在涡流问题的有限元求解中,向量磁势一般以棱边有限元来表示。棱边有限元的形状函数可以自然满足切向连续性和散度为零的要求,因此适合于涡流问题的计算^[3]。

在导电域和非导电域中的电磁方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0, \quad \text{in } \Omega_n \quad (2.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{in } \Omega_n \quad (2.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}, \quad \text{in } \Omega_c \quad (2.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}, \quad \text{in } \Omega_c \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad \text{in } \Omega_c \quad (2.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{in } \Omega_c \quad (2.26)$$

其中, Ω_n 为非导电域; Ω_c 为导电域。

在表达导电区域和非导电区域(一般为空气区域)中的磁和电量时,有许多种选择。

在导电区域最通常的表达为

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - j\omega \nabla V \end{cases} \quad (2.27)$$

在上式第二项中加入时间导数项 ($j\omega$) 可以使得使用伽辽金法时对称性不受破坏。

从式(2.23)和式(2.27)推出

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + j\omega \sigma \mathbf{A} + j\omega \sigma \nabla V = \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega_c \quad (2.28)$$

$$-\nabla \cdot (j\omega \sigma \mathbf{A} + j\omega \sigma \nabla V) = 0, \quad \text{in } \Omega_c \quad (2.29)$$

向量磁势可由棱边有限元基函数表示为

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{A}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n_c} a_k \mathbf{N}_k \quad (2.30)$$

其中, b_k 是沿各棱边对 $\mathbf{A}$ 的线积分。而标量电势由节点有限元基函数表示为

$$V = V^{(k)} = \sum_{k=1}^{n_c} V_k N_k \quad (2.31)$$

其中, V_k 是节点电压值。

进一步利用伽辽金法得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_c} \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \nabla \times \mathbf{A}^{(n)} d\Omega + \int_{\Omega_c} j\omega \sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{A}^{(n)} d\Omega + \int_{\Omega_c} j\omega \sigma \mathbf{N}_i \cdot \nabla V^{(n)} d\Omega \\ &= \int_{\Omega_c} \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{T}_0 d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, n_c \end{aligned} \quad (2.32)$$