



读考研书 找人大社

2009年考研 数学 经典冲刺5套卷(数学一)

主编 黄先开 曹显兵

● 权威名师精选精编

● 最后模拟冲刺必备

紧扣大纲要求 设计科学合理

难易程度适当 题目全部精解



中国人民大学出版社

2009 年考研数学 经典冲刺 5 套卷 (数学一)

► 主 编 黄先开 曹显兵

正版
查询及
服务
程序



← 刮 开 涂 层



← 获 取 20 位 数 字 编 码



← 上 www.1kao.net 注 册



← 登 录 增 值 服 务 进 免 费 课 堂

20

9

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

2009 年考研数学经典冲刺 5 套卷·数学一/黄先开, 曹显兵主编. 2 版
北京: 中国人民大学出版社, 2008. 10
ISBN 978-7-300-08706-1

I. 2...

II. ①黄...②曹...

III. 高等数学-研究生-入学考试-习题

IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 165570 号

2009 年考研数学经典冲刺 5 套卷 (数学一)

主编 黄先开 曹显兵

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

电 话 010-62511242 (总编室)

010-82501766 (邮购部)

010-62515195 (发行公司)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.net> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 中煤制图印刷有限公司

规 格 185 mm×260 mm 16 开本

印 张 5.25

字 数 114 000

邮政编码 100080

010-62511398 (质管部)

010-62514148 (门市部)

010-62515275 (盗版举报)

版 次 2007 年 11 月第 1 版

2008 年 11 月第 2 版

印 次 2008 年 11 月第 1 次印刷

定 价 10.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前 言

考研数学复习一般可分为三个阶段：基础复习——全面、系统复习——综合提高复习。在临考前的一段时间，是综合提高的冲刺阶段，通过对几套设计科学合理、紧扣大纲要求、难易程度适当、知识覆盖面广且能够切中命题趋势的全真模拟试题进行全面演练，达到查漏补缺、反思问题和总结规律的目的，是有效实现综合提高的重要途径。

能否做到这一点，关键是看模拟试题的质量。如果大都是陈题、旧题，或已考过、已做过的类似问题，往往会造成一种错觉，模拟成绩很理想，但实际状态并不是这么回事，并不能真实反映自己的水平，因为存在的问题并没有通过演练帮助自己发现，规律性的东西也没有通过演练进行总结。考研数学要取得理想的成绩，在复习的最后阶段做题是必要的。试题不在多而在于精，在于是否严格按照考试大纲的命题原则要求以及最新的命题趋势优选、设计题型，在于难度、信度是否完全符合考试规范要求。

本书作者在多年教学和考研辅导的基础上，通过对考研数学的命题原则和命题趋势的反复研究与分析，查阅了大量的相关教材、教学辅导资料，包括全国各级各类数学竞赛和众多高等院校数学竞赛试卷，再通过逐题推敲、优中选优和精心设计，命制了五套高质量的全真模拟冲刺试卷。“题型新颖、突出仿真、注重实效”是本书的特点。选择的试题尽量是平时练习时较少见到或没有做过的，部分试题是作者根据最新命题趋势自己设计的，重在基本概念掌握情况的考查和计算能力、综合分析问题与解决问题能力的培养。相信通过使用本套冲刺试卷，考生可最大限度地实现梳理知识、查找漏洞、提高应试能力的愿望。

温馨提示：建议考生按如下要求使用本套冲刺试卷：

1. 在规定的3个小时内连续做完一套试题；
2. 一定要避免边做题边翻看答案；
3. 做完一套试题后，约上几个同学一起对答案，共同分析出现差错的原因，比如说，是计算问题、概念问题、方法问题、隐含条件问题还是做题技巧问题等等，并注意下次做题时逐步改进或避免；
4. 将错题全部汇总起来，在五套模拟测试完成后重新做一遍；
5. 最后再进行一次总结。

好的模拟冲刺试卷将助您在硝烟弥漫、强手如云的考研战场上大显身手。衷心祝愿考生朋友在2009年研究生入学考试中取得优异成绩！

编者

2008年11月

目 录

全国硕士研究生入学统一考试数学一	考前经典冲刺试卷一	(1)
全国硕士研究生入学统一考试数学一	考前经典冲刺试卷二	(7)
全国硕士研究生入学统一考试数学一	考前经典冲刺试卷三	(12)
全国硕士研究生入学统一考试数学一	考前经典冲刺试卷四	(17)
全国硕士研究生入学统一考试数学一	考前经典冲刺试卷五	(22)
全国硕士研究生入学统一考试数学一	考前经典冲刺试卷一参考答案	(28)
全国硕士研究生入学统一考试数学一	考前经典冲刺试卷二参考答案	(37)
全国硕士研究生入学统一考试数学一	考前经典冲刺试卷三参考答案	(48)
全国硕士研究生入学统一考试数学一	考前经典冲刺试卷四参考答案	(57)
全国硕士研究生入学统一考试数学一	考前经典冲刺试卷五参考答案	(66)

绝密 ★ 启用前

全国硕士研究生入学统一考试

数学一 考前经典冲刺试卷一

考生注意: (1) 本试卷共 23 道题, 满分 150 分.

(2) 根据国家标准, 试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设 $F(x) = \int_a^b f(y) |x - y| dy$, $a \leq x \leq b$, $f(y)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F''(x)$ 等于

- (A) $f(x)$. (B) $2f(x)$.
(C) $x[f(b) - f(a)]$. (D) $x[f(a) + f(b)]$. 【 】

(2) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 ($a_n \neq 0$), 则下列结论正确的是

(A) 若 $b_n \sim a_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln |a_n| = \infty$.

(D) 若 $b_n \leq a_n$, $n = 1, 2, \dots$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 【 】

(3) 若在 $[0, 1]$ 上有 $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = a > 0$, 且 $f''(x) > 0$, $g''(x) < 0$, 则

$I_1 = \int_0^1 f(x) dx$, $I_2 = \int_0^1 g(x) dx$, $I_3 = \int_0^1 ax dx$ 的大小关系是

(A) $I_1 \geq I_2 \geq I_3$. (B) $I_3 \geq I_2 \geq I_1$.

(C) $I_2 \geq I_3 \geq I_1$. (D) $I_2 \geq I_1 \geq I_3$. 【 】

(4) 设 $f(x, y)$ 在整个 xy 平面连续, $I = \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt{-y}}^{-y} f(x, y) dx$, 则 I 为

(A) $\int_0^1 dx \int_{-x}^x f(x, y) dy$.

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{-x^2} f(x, y) dy$.

(C) $\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{-x} f(x, y) dy$.

(D) $\int_0^1 dx \int_{-1}^{-x} f(x, y) dy$. 【 】

(5) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则方程组 $Bx = 0$ 与 $ABx = 0$ 同解的充分条件是

(A) $r(A) = n$.

(B) $r(A) = m$.

(C) $r(\mathbf{B}) = n$.

(D) $r(\mathbf{B}) = s$.

【 】

- (6) 设 $\mathbf{A}$ 是 4 阶矩阵, 若 $\alpha_1 = (1, 0, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, -1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 0, 1)^T$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的三个解, $\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, 则下列各命题中不正确的是

(A) $|\mathbf{A} + \mathbf{A}^*| = 0$.

(B) $r(\mathbf{A}^*) = 0$.

(C) $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系所含解向量的个数相等.

(D) 任一非零向量均为 $\mathbf{A}^*$ 的特征向量.

【 】

- (7) 将一枚均匀的硬币接连抛 2 次, 以 A 表示事件“正面最多出现一次”, 以 B 表示事件“正面和反面各至少出现一次”, 则

(A) $A \subset B$.

(B) A 与 B 互不相容.

(C) A 与 B 相互独立.

(D) A 与 B 不独立.

【 】

- (8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从下列分布: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $0 < p < 1$, 则下列随机变量中服从二项分布的是

(A) $X + Y$.

(B) $X - Y$.

(C) $\frac{X+Y}{2} + 1$.

(D) $\frac{X-Y}{2} - 1$.

【 】

得分	评卷人

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.

- (9) 设函数 $y = f(x)$ 为微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 满足 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 的解, 则

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (10) 由拉格朗日中值定理有 $e^x - 1 = xe^{\theta(x)}$, 其中 $0 < \theta(x) < 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (11) 已知 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某个邻域内可展成泰勒级数, 且 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $f''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (12) 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的正向, 则 $\oint_L \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (13) 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{bmatrix}$, 且 $|\mathbf{A}| = -2$, 则

$$\mathbf{B}^* \mathbf{A} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (14) 设随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, 则随机变量 $Y = n - X$ 所服从的分布为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15) (本题满分 10 分)

设 a_1, b_1 是任意取定的实数, 令

$$\begin{cases} a_n = \int_0^1 \max(b_{n-1}, x) dx, \\ b_n = \int_0^1 \min(a_{n-1}, x) dx. \end{cases} \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

证明 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均有界.

得分	评卷人

(16) (本题满分 10 分)

在曲面 $(x^2y + y^2z + z^2x)^2 + (x - y + z) = 0$ 上点 $(0, 0, 0)$ 处的切平面 Π 内求一点 P , 使点 P 到点 $A(2, 1, 2)$ 和点 $B(-3, 1, -2)$ 的距离的平方和为最小.

得分	评卷人

(17) (本题满分 10 分)

求均匀半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 对 z 轴的转动惯量 I , 其中面密度 $\rho = 1$.

得分	评卷人

(18) (本题满分 10 分)

设 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$.

(I) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$;(II) 证明 $I_n + I_{n-1} = \frac{1}{n}$;(III) 求和 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

得分	评卷人

(19) (本题满分 10 分)

设 $P(x, y) = (2xf'(x) + g(x))y^2 - 2yg(x)\tan 2x$,

$Q(x, y) = (f'(x) + 4xf(x))y + g(x)$,

其中 $f'(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 2, g(0) = 2$, 求函数 $f(x), g(x)$, 使沿平面中任一闭曲线 C , 有 $\oint_C Pdx + Qdy = 0$.

得分	评卷人

(20) (本题满分 11 分)

已知 4×3 矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 4 维列向量, 若非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $(1, 2, -1)^T + k(1, -2, 3)^T$, 令 $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_3]$, 试求 $By = \alpha_1 - \alpha_2$ 的通解.

得分	评卷人

(21) (本题满分 11 分)

已知 $\lambda = 2$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & a \\ 2 & a & a+2 \end{bmatrix}$ 的二重特征值, 求 a 的值, 并求正交矩阵 Q 使

$Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

得分	评卷人

(22) (本题满分 11 分)

设 (U, V) 在以点 $(-2, 0), (2, 0), (0, 1), (0, -1)$ 为顶点的四边形上服从均匀分布, 令

$$X = \begin{cases} -1, & U \leq -1, \\ 1, & U > -1; \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & V \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & V > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- (I) 求 U 与 V 的边缘密度;
- (II) 求 X 与 Y 的联合分布律;
- (III) 求 X 与 Y 的协方差.

得分	评卷人

(23) (本题满分 11 分)

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ 是来自总体 X 的一个样本, 且 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $(S^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 试求统计量 $\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S^*} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 的分布.

绝密 ★ 启用前

全国硕士研究生入学统一考试

数学一 考前经典冲刺试卷二

考生注意: (1) 本试卷共 23 道题, 满分 150 分.

(2) 根据国家标准, 试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 及其附近二阶可导, 在 $x=0$ 三阶可导, $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1$,

$\beta(x) = \int_0^x \ln(1 + \arctan t) dt$, 则在 $x \rightarrow 0$ 时,

(A) $f(x) = o(\beta(x))$.

(B) $\beta(x) = o(f(x))$.

(C) $f(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶非等价无穷小.

(D) $f(x) \sim \beta(x)$.

【 】

(2) 记 $I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} |xy| dx dy, I_2 = \iint_{|x|+|y| \leq 1} |xy| dx dy, I_3 = \iint_{x+y \leq 1} |xy| dx dy$, 则下列关系式成立的是

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.

(B) $I_1 < I_3 < I_2$.

(C) $I_2 < I_1 < I_3$.

(D) $I_2 < I_3 < I_1$.

【 】

(3) 设 $f'(x)$ 在 $x=0$ 及其附近连续, $f(0)=0, f'(0)>0$, 则下列结论正确的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 条件收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[1 + f\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛.

【 】

(4) 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充分条件为

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(h) - f(-h)]$ 存在.

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f[\ln(1+h)]$ 存在.

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(\sinh^2 h)$ 存在.

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(e^{h^2} - 1)$ 存在.

【 】

(5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $m \geq n, r(A)=n, b$ 为 m 维非零列向量, 则非齐次线性方程组 $Ax=b$

(A) 必有唯一解.

(B) 必定没有解.

(C) 必定没有无穷多解.

(D) (A), (B), (C) 均不正确.

【 】

(6) 设 α, β 为两个 3 维非零列向量, 记 $A = \alpha\beta^T$, 则 $\lambda=0$

(A) 必是 A 的 1 重特征值.

(B) 必是 A 的 2 重特征值.

(C) 至少是 A 的 2 重特征值.(D) 至多是 A 的 2 重特征值.

【 】

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为严格单调增加的连续函数, Y 在区间 $[0, 1]$ 上服从均匀分布, $F^{-1}(y)$ 表示 $F(x)$ 的反函数, 则随机变量 $Z = F^{-1}(Y)$ 的分布函数

(A) 有一个间断点.

(B) 有两个间断点.

(C) 连续但不同于 X 的分布函数.(D) 连续且与 X 同分布.

【 】

(8) 设 $f(x) = ke^{-x^2+2x}$ 为概率密度, 则 k 的值为

(A) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-1}$.(B) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.(C) $\frac{1}{2}$.(D) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

【 】

得分	评卷人

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.

(9) 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{e^{f(x)} - 1} = 1$, 则 $f'(0) =$ _____.

(10) 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x} = -1$ 的特解为 _____.

(11) 设 $f(x)$ 连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^x (x^2 + 1 - \cos t) f(t) dt$ 是与 x^3 等价的无穷小量, 则 $f(0) =$ _____.

(12) 设 C 是从球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上任一点到球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 上任一点的任一条光滑曲线 ($a > 0, b > 0$), 则 $\int_C r^3 (x dx + y dy + z dz) =$ _____, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(13) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组 $2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_2 - \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$ 的秩为 _____.

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $D(X) = D(Y) = 2, E(X) = E(Y) = 1$, 则 $D(XY) =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \varphi(x)}{x}, & x \neq 0, \\ a & x = 0, \end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $\varphi(0) = 1$,

$\varphi'(0) = 2, \varphi''(0) = 3$.

(I) 确定常数 a 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续;

(II) 对 (I) 中确定的 a , 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的可导性及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

得分	评卷人

(16) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导且 $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$, 证明: 存在 $\xi > 0$, 使 $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

得分	评卷人

(17) (本题满分 10 分)

计算 $\iint_{\Sigma} x^2 dydz + yz dzdx + z^2 dxdy$, 其中 $\Sigma: (x-1)^2 + (y-1)^2 + \frac{z^2}{4} = 1 (y \geq 1)$, 取外侧.

得分	评卷人

(18) (本题满分 10 分)

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^{2n}}$ 的和.

得分	评卷人

(19) (本题满分 10 分)

设 $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$, 求证: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 收敛, 并求其和.

得分	评卷人

(20) (本题满分 11 分)

设 B 是 $m \times n$ 矩阵, BB^T 可逆, $A = E - B^T(BB^T)^{-1}B$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵.

(I) 证明: $A^T = A$.

(II) 证明: $A^2 = A$.

(III) 若 $r(A) = r < n$, 且 A 可对角化, 求行列式 $|A + E|$.

得分	评卷人

(21) (本题满分 11 分)

已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\left| \frac{1}{2} \mathbf{A} - \mathbf{E} \right| = 0$, 且 $\mathbf{A}\mathbf{B} - 3\mathbf{B} = \mathbf{0}$, 其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(I) 用正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 化二次型为标准型, 并写出所用正交变换及所得标准型;

(II) 求出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的具体表达式.

得分	评卷人

(22) (本题满分 11 分)

设 (X, Y) 服从区域 $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$ 上的均匀分布. 试求 $Z = \frac{Y}{3X}$ 的概率密度函数.

得分	评卷人

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta}, & x \geq \mu, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 其中 $\theta > 0, \theta, \mu$ 为未知参数, $X_1,$

$X_2, \dots, X_n$ 为取自 X 的样本. 试求 θ, μ 的最大似然估计量和矩估计量.

绝密 ★ 启用前

全国硕士研究生入学统一考试

数学一 考前经典冲刺试卷三

考生注意:(1) 本试卷共 23 道题,满分 150 分.

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、选择题: 1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号内.

- (1) 已知 $\int_0^2 f'(x)dx = 8$, 且 $f(0) = 0$, 则 $\int_0^2 f(x)dx$ 等于
 (A) 2. (B) ± 2 . (C) 4. (D) ± 4 . 【 】

- (2) 设有无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\cos \alpha}{n^2} + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right]$, 其中 α 为常数, 则此级数
 (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
 (C) 发散. (D) 敛散性与 α 有关. 【 】

- (3) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$ 则在点 $(0, 0)$ 处, $f(x, y)$
 (A) 不连续. (B) 连续, 但偏导数不存在.
 (C) 偏导数存在但不可微. (D) 可微. 【 】

- (4) a_n 与 b_n 符合下列哪一个条件, 可由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散推出 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散
 (A) $a_n \leq b_n$. (B) $a_n \leq |b_n|$.
 (C) $|a_n| \leq |b_n|$. (D) $|a_n| \leq 2b_n$. 【 】

- (5) 设 A 是一个 $n \times n$ 矩阵, 交换 A 的第 i 行、第 j 行, 然后再交换其第 i 列、第 j 列, 所得矩阵为 B , 考虑命题: ① $|A| = |B|$; ② $r(A) = r(B)$; ③ A, B 的行向量组等价; ④ A 与 B 为相似矩阵. 则以上命题成立的个数为
 (A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个. 【 】

- (6) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 考虑以下命题: ① A 与 B 等价; ② A 与 B 相似; ③ A 与 B 合同; ④ A 与 B 为正定矩阵. 用“ $P \Rightarrow Q$ ”表示命题 P 可推出命题 Q , 则
 (A) ① $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ④. (B) ② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ①.
 (C) ④ $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ①. (D) ③ $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ④. 【 】

- (7) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且均服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 则下列随机变量中仍服从