“十二五”国家示范性高等职业教育规划教材

高等数学

（上 册）

◆主 编 刘祥生 喻 璟 ◆副主编 吴雪琴 陈银香 孙 [illegible]

GAODENG SHUXUE

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

“十二五”国家示范性高等职业教育规划教材

高等数学

（上册）

主　编　刘祥生　喻　璟

副主编　吴雪琴　陈银香　孙　健

编　委　（按姓氏笔画排序）

刘祥生　孙　健　吴雪琴　吴琴蕾　李　智

陈银香　段祥宇　彭婷婷　喻　璟

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本教材依照教育部颁布的《高职高专教育数学课程教学基本要求》，由工作在教学一线的教师结合多年的教学实践编写而成。全书共分十四章，主要内容包括一元函数微积分、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、线性代数概论、概率论与数理统计初步、数学实验等。各章节配有一定量的习题，书末附有初等数学常用公式、部分习题的答案或提示。

本书说理浅显，例题详尽，既可以作为高职高专的教材，又可以选作数学爱好者的参考书目。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/刘祥生，喻璟主编．—北京：北京理工大学出版社，2010.6

ISBN 978－7－5640－3197－8

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①刘…　②喻…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第087273号

出版发行 /北京理工大学出版社
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 /100081
电　　话 /(010)68914775(总编室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 /http://www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /北京燕旭开拓印务有限公司
开　　本 /710毫米×1000毫米　1/16
印　　张 /28.75
字　　数 /540千字
版　　次 /2010年6月第1版　2010年6月第1次印刷
印　　数 /1～4500册　　　　责任校对 /王　丹
定　　价 /50.00元（上下册）　　　　责任印制 /边心超

前　言

为了适应高职高专教育的需要，依照教育部最新制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》，本着以提高高职高专教育教学质量，培养高素质应用型人才为目标的宗旨，我们编写了本教材。

本教材在编写过程中，充分吸收了编委们多年来在高职高专教学实践中的经验，本着教材内容“必需、易学、够用”的指导思想。注重教材自身的系统性、逻辑性，注意培养学生对知识的运用能力，力求体现基础性、实用性和发展性的和谐统一。

本教材的特点是：

1. 充分考虑了高职高专学生的特点，突出了初等数学与高等数学的紧密衔接。为了使学生能实现从初等数学到高等数学的顺利过渡，对传统高等数学中需要的初等数学内容进行了适当回顾，较好地处理了学生在初学高等数学过程中承上启下的问题。

2. 针对高职高专学生的接受能力和理解程度，适当淡化深奥的数学理论，注重从实际问题引入基本概念，突出基础知识和基本技能的培养，力求使教学内容通俗易懂，便于学生理解和掌握。

3. 结合高职高专人才的培养目标，注重内容的实用性，在计算方面降低难度，但在数学知识的应用和使用现代信息技术手段方面进行了补充。编写了数学实验，不仅可以提高学生学习数学的兴趣，还能达到“学以致用”的目的。

4. 强调对学生的数学思想和方法的培养，注意体现启发式教学和直观性教学的原则，教材内容力争基本要求与拓宽知识面相结合，以有利于不同层次的学生对知识的掌握。

参与本书编写的均为江西交通职业技术学院长年从事高职高专“高等数学”教学的经验丰富的老师，他们不仅深知高职高专教学现状，又了解本学科教与学的基本要求。陈银香编写第一章；刘祥生编写第二、第三章；喻璟编写第四、第五章；吴雪琴编写第六、第七章；孙健编写第八章；吴琴蕾编写第九、第十章；彭婷婷编写第

十一、第十四章;段祥宇编写第十二章;李智编写第十三章。

为了提高编写质量,在本书的编写过程中编委们查阅和借鉴了许多优秀的数学教材和数学文献,在此向各位前辈与同仁们致以崇高的敬意与诚挚的谢意。由于成书仓促,编写人员水平有限,书中难免存在缺陷和错误,恳请广大师生、读者批评指正。

编　　者

目　录

第一章　函数与极限

函数是描述变量之间依赖关系的数学模型，是高等数学中重要的基本概念之一. 极限是高等数学的一个重要概念，也是学习高等数学的一个重要工具，高等数学的后续概念如连续、导数、定积分等都是用极限来描述的. 连续则是很多函数的一个重要形态，连续函数是高等数学的主要研究对象. 本章首先介绍函数的一些概念，再介绍极限的概念，极限的运算方法，最后研究函数的连续性以及闭区间上连续函数的性质.

第一节　函　数

在客观世界中，变量的变化并不是孤立的，一些变量之间按照一定的规律相互依赖，函数关系就是变量之间依赖关系的一种反映.

一、函数的概念

1. 函数的定义

首先通过两个实例来说明变量之间的依赖关系.

例 1.1　球的表面积 S 与半径 r 之间的关系用 $S=4\pi r^2$ 表示，半径 r 可取大于 0 的实数，当球的半径 r 变化时，表面积 S 也会发生相应的变化，这说明表面积 S 依赖于半径 r 变化.

例 1.2　自由落体运动规律为 $h=\frac{1}{2}gt^2$，式中 h 为下降距离，g 为重力加速度，t 为降落的时间，这个公式描述了物体在自由降落的过程中，下降的距离 h 与时间 t 之间的依赖关系.

在以上两个例子中，各个变量的实际意义和解析式虽然不相同，但它们都具有以下特点：所描述的变化过程有两个变量，变量之间有一个确定的依赖关系，或称为对应法则，虽然对应法则的表达式不同，但当其中一个变量在一定范围内取定一个数值时，按照对应法则，另一个变量有唯一确定的数值与之对应. 数学上将变量之间对应关系的实质进行了总结，就得到函数的概念.

定义 1.1　设 x 与 y 是某一变化过程中的两个变量，D 是一个非空数集，如果对于任意的 $x\in D$，按照某个对应关系 f，变量 y 总有唯一确定的值与其对应，则称 f 是定义在数集 D 上的 x 的**函数**，或简称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x), x\in D$$

数集 D 称为函数的**定义域**,x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**.

当自变量 x 取某一个确定的数值 x_0 时,因变量 y 所得到的确定值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的函数值,表示为 $f(x_0)$.

当自变量 x 在定义域内取遍每个数值时,对应函数值的集合称为函数的**值域**,记作 $M=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$,如图 1.1 所示.

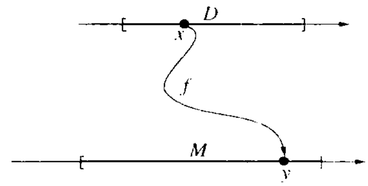

图 1.1

2. 确定函数的两个要素

确定函数的两个要素有函数的定义域 D 和对应法则 f. 只有当两个函数的定义域和对应法则都相同时,才认为两个函数是相同的,而与自变量或因变量用什么字母表示无关. 因此,在研究函数时,除了确定的对应法则之外,还要明确函数的定义域.

如 $y=x^2, x\in(0,+\infty)$ 与 $g=t^2, t\in(0,+\infty)$ 表示同一函数,它们的定义域均为全体正数,对应法则都是将自变量的取值进行平方运算.

在通常情况下,函数的定义域并不明确标出,此时函数的定义域是使相应的数学表达式有意义的自变量取值的集合.

求函数的定义域时应遵守以下规则:

(1)代数式中的分母不能为零;

(2)偶次根式内表达式非负;

(3)对数运算中真数的表达式大于零;

(4)反正弦函数和反余弦函数符号后的表达式要在$[-1,1]$之间取值;

(5)表示实际问题的解析式应该符合实际意义.

例 1.3 求 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)+\arcsin(2x-3)$的定义域.

解 该函数由 3 部分相加得到,先分别求出每一部分的取值范围,然后求其公共部分即可.

要使$\sqrt{4-x^2}$有意义,应满足 $4-x^2\geqslant 0$,即$-2\leqslant x\leqslant 2$;

要使 $\ln(x^2-1)$有意义,应满足 $x^2-1>0$,即 $x<-1$ 或 $x>1$;

要使 $\arcsin(2x-3)$有意义,应满足$-1\leqslant 2x-3\leqslant 1$,即 $1\leqslant x\leqslant 2$.

取上述 3 个范围的公共部分,于是所求函数的定义域为$(1,2]$.

例 1.4 下列各对函数是否相同? 为什么?

(1)$f(x)=x, g(x)=\dfrac{x^2}{x}$;

(2)$f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

(3)$f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$.

解 (1)不相同,因为 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$g(x)$的定义域为

$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它们的定义域不同，所以不是同一个函数.

(2)相同，因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，且有 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，即对应法则相同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一个函数.

(3)不相同，虽然两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但对应法则不同. 例如当 $x=-1$ 时，$f(-1)=-1$，$g(-1)=1$，不相等.

3. 邻域

在研究变量的变化趋向时，有些概念要涉及自变量的微小变化范围，我们经常使用邻域来描述.

定义 1.2 设 δ 是任一(很小的)正数，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为 x_0 点的 δ **邻域**，x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 记作 $N(x_0,\delta)$，即

$$N(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta,\delta>0\}.$$

在有些情况下，考虑函数在 x_0 点附近的变化情况时，并不要求函数在 x_0 点必须有定义，此时研究的范围可以将领域的中心 x_0 去掉，所形成的区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的**去心邻域**，记为 $N(\hat{x}_0,\delta)$.

二、函数的表示

我们已经知道，根据问题的不同特点，函数可以用表格、图形和解析式等方法来表示. 为了研究方便，不同的表示法还可以组合使用. 在高等数学中，函数还有以下的表示方式.

1. 隐函数

在研究变量的变化规律时，根据问题的实际特点，用方程 $F(x,y)=0$ 的形式来描述变量之间的依赖关系可能更方便. 当 x 在某个数集 D 内取定某一数值时，相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则通过方程 $F(x,y)=0$，在数集 D 上可以确定一个函数，称此函数为**隐函数**. 以前研究的函数，因变量 y 都能用含有 x 的解析式表示，称之为**显函数**. 有些隐函数能方便地化成显函数，而有的隐函数则难以化成显函数的形式. 如隐函数 $e^{xy}-\sin(x+y)-y=0$ 则无法化成显函数. 虽然有些隐函数无法化成显函数的形式，但在有些情况下并不影响函数的某些变化规律.

2. 分段函数

在自变量的不同取值范围内，对应关系用不同的解析式来表示的函数称为**分段函数**.

例 1.5 旅客乘坐火车可免费携带不超过20 kg的物品，超过20 kg而不超过50 kg的部分每 1 kg 交费 a 元，超过 50 kg 的部分每 1 kg 交费 b 元，求运费与携带物品质量的函数关系.

解 设物品质量为 x kg，运费为 y 元，依题意，y 与 x 的函数关系应考虑 3 种情况：

(1)物品质量不超过 20 kg 时,

$$y=0,0\leqslant x\leqslant 20$$

(2)物品质量超过 20 kg 而不超过 50 kg 时,

$$y=a(x-20),20<x\leqslant 50$$

(3)物品质量超过 50 kg 时,

$$y=a(50-20)+b(x-50),x\in(20,50]$$

于是所求函数是一个分段函数,为

$$y=\begin{cases}0, & x\in[0,20],\\ a(x-20), & x\in(20,50],\\ 30a+b(x-50), & x>50\end{cases}$$

分段函数在工程技术及日常生活中都会遇到. 分段函数是定义域内的一个函数,不要理解为是多个函数,在求分段函数的函数值时,应把自变量的值代入到相应取值范围的表达式进行计算.

例 1.6 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, x>0,\\ 2, \quad x=0,\\ 2x, \quad x<0\end{cases}$

作出函数的图形,求 $f(2),f(0),f(-3)$.

解 函数图形如图 1.2 所示.

$f(2)=2^2+1=5,f(0)=2,f(-3)=2\times(-3)=-6$.

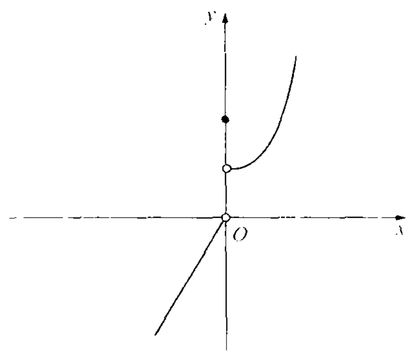

图 1.2

3. 由参数方程确定的函数

用参数方程 $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$,$(t\in D)$的形式来表示 y 与 x 之间依赖关系的函数,称为**由参数方程确定的函数**.

由参数方程表示的函数,有些可以化成显函数的形式. 如 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$,$0\leqslant t\leqslant \pi$,可以确定函数

$$y=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1].$$

三、函数的几种特性

在研究函数的变化规律时,经常需要考虑函数的部分特性,这些特性都与函数的几何图形有关,有时也称为函数的几何特性.

1. 有界性

定义 1.3 若存在正数 M,使得函数 $f(x)$在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上**有界**;否则,若不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$在区间 I 上**无界**.

在定义域内有界的函数称为**有界函数**，如 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 等都是有界函数.

函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界，在图形上表现为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的一段图像必介于两条平行线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间，如图 1.3 所示.

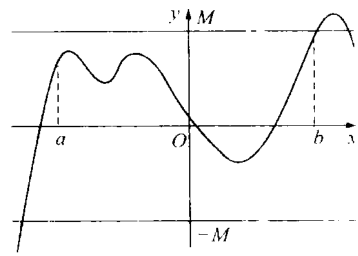

图 1.3

例如，函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为取 $M=1$，对于任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $|\sin x|\leqslant M$，类似地，函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，但函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，因为对任意取定的一个正数 M，不能使得 $|x^2|\leqslant M$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都成立.

注意：函数是否有界与所给的区间有关，例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界，但在区间 $(0,1)$ 内是无界的.

2. 单调性

对于函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，

若有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递增**；

若有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递减**.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的，而在 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的；函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的.

3. 奇偶性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上有定义，

若 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；

若 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，$f(x)=x^2$，$g(x)=x\sin x$ 都是偶函数，而 $h(x)=x$，$\varphi(x)=x\cos x$ 则是奇函数.

4. 周期性

定义 1.5 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，对一切 x 均有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，并把 T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常讲的函数周期指的是函数的最小正周期.

例如，在三角函数中，$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x$、$y=\cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

四、基本初等函数

定义 1.6 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初**

等函数.

这些函数在中学数学课程里已经学过，此处只从形式上做简要介绍，要详细了解这些函数的图像和性质，可参阅有关资料.

1. 幂函数　$y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$

形如 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$的函数称为幂函数，其中 α 为常数. 不同幂函数的定义域和值域以及相应的图像和性质依 α 的取值而不同，但无论 α 取何值，幂函数在$(0,+\infty)$内总有定义.

2. 指数函数　$y=a^{x}(a>0,a\neq1)$

形如 $y=a^{x}$(a 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$)的函数称为指数函数，所有指数函数的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，值域均为$(0,+\infty)$. 其图像均在 x 轴上方，且过$(0,1)$点，当 $a>1$ 时函数单调递增，$0<a<1$ 时函数单调递减.

3. 对数函数　$y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$

形如 $y=\log_{a}x$(a 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$)的函数称为对数函数，所有对数函数的定义域均为$(0,+\infty)$，值域均为$(-\infty,+\infty)$. 其图像均在 y 轴的右侧，且过$(1,0)$点，当 $a>1$ 时函数单调递增，$a<1$ 时函数单调递减.

在工程中，常以无理数 $e=2.718\ 281\ 828\ 495\ 045\cdots$作为指数函数和对数函数的底，并且记 $e^{x}=\exp x$，$\log_{e}x=\ln x$，而后者称为自然对数函数.

4. 三角函数

三角函数包括正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 及余割函数 $y=\csc x$，它们均为周期函数.

5. 反三角函数

反三角函数包括反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$ 及反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

基本初等函数在高等数学中占有非常重要的地位，是进一步学习高等数学的基础，我们应该熟练掌握这些函数的定义形式、简单性质和函数图像.

将基本初等函数和常数进行有限次四则运算所得到的函数称为**简单函数**.

五、反函数

定义 1.7　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 M，如果对于数集 M 中的每个 y 值，在数集 D 中都有使等式 $y=f(x)$成立的唯一的 x 值与之对应，其对应法则记为 f^{-1}，即变量 x 是 y 的函数. 这个定义在数集 M 上的函数 $x=f^{-1}(y)$称为函数 $y=f(x)$的**反函数**. 记为

$$x=f^{-1}(y)$$

此时函数的定义域为 M，值域为 D，并且函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$的图形在同一坐标系内是相同的.

习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此约定将反函数 $x=f^{-1}(y)$的自变

量记号改为 x，因变量的记号改为 y，以后用 $y=f^{-1}(x)$ 来表示 $y=f(x)$ 的反函数. 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域仍为 M，值域仍为 D，此时由于改变了变量的记号，因此函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标系内是关于直线 $y=x$ 对称的.

由定义可知，指数函数 $y=a^x\,(a>0,a\neq1)$ 与对数函数 $y=\log_a x\,(a>0,a\neq1)$ 互为反函数.

六、复合函数

在实际问题中，我们常会遇到由几个基本初等函数组合而成的较为复杂的函数. 例如，在对一个球形气球充气的过程中，球的体积 V 是半径 r 的函数 $V=f(r)$，如果将球的半径 r 设定为充气时间 t 的函数 $r=g(t)$，则球的体积 V 也是充气时间 t 的函数. 为了描述这类依赖关系，引入复合函数的定义.

定义 1.8　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U_1，$u=g(x)$ 的值域为 U_2，如果 $U_1\cap U_2\neq\varnothing$，对于变量 x，通过函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$，则有确定的 y 与之对应，从而得到一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数，称其为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**，记为

$$y=f[g(x)].$$

称变量 u 为**中间变量**.

如 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数为 $y=\sin^2 x$，而 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的复合函数为 $y=\sin x^2$.

注意：并不是任意两个函数都可以构成复合函数. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，而 $u=2+x^2$ 的值域为 $[2,+\infty)$.

在可能的情况下，更多的函数也可以构成复合函数，此时的中间变量为两个或更多.

对于复合函数，应该明确其复合与分解的过程. 函数的复合就是把中间变量依次代入的过程，而分解就是把复合函数分解为几个简单函数，而这些简单函数往往都是基本初等函数，或者是基本初等函数与常数的四则运算的形式.

例 1.7　指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sin 2^x$；

(2) $y=\sqrt{1+x^2}$；

(3) $y=\ln\cos 3x$.

解　(1) $y=\sin 2^x$ 的复合过程是

$$y=\sin u,\ u=2^x.$$

(2) $y=\sqrt{1+x^2}$ 的复合过程是

$$y=\sqrt{u},u=1+x^2.$$

(3)函数 $y=\ln\cos 3x$ 的复合过程是

$$y=\ln u,u=\cos v,v=3x.$$

七、初等函数

由基本初等函数或常数经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成的并且可以用一个解析式表示的函数叫做**初等函数**.

后面所讨论的函数大多数都是初等函数,但分段函数一般不是初等函数.

练习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$;

(3) $y=\lg(x+2)+1$;　　(4) $y=\lg\sin x$;

(5) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$.

2. 设 $f(x)=x^2,g(x)=e^x$,求 $f[g(x)],g[f(x)],f[f(x)],g[g(x)]$.

3. 判断函数 $y=\ln(1-x)$ 与 $y=\dfrac{x\ln(1-x)}{x}$ 是否为同一函数?

4. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{1}{5}\right),\varphi\left(-\dfrac{1}{2}\right),\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

5. 判断下列函数在所给区间上的有界性:

(1) $f(x)=\cos x\quad(-\infty,+\infty)$;　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}\quad[0,1]$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}\quad(-1,0)$;　　(4) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}\quad(0,+\infty)$.

6. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^{-3}$;　　(2) $f(x)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$;

(3) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;　　(4) $f(x)=x\sin x$.

7. 判断下列函数是否为周期函数:

(1) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$;　　(2) $y=3\cos 5x$;

(3) $y=\sin\pi x-3$;　　(4) $y=x^2\tan x$.

8. 设 $y=f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调奇函数,问其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是否是单调奇函数,请说明理由.

9. 指出下列函数是由哪几个简单函数复合而成：

(1) $y=\arccos\sqrt{x}$；　　(2) $y=\ln\sin^2 x$；

(3) $y=e^{e^x}$；　　(4) $y=\sqrt{\tan x}$.

10. 求由给定的函数形成的复合函数，并求复合函数的定义域：

(1) $y=u^2, u=\ln x$；　　(2) $y=\sqrt{u}, u=e^x-1$；

(3) $y=\arcsin u, u=e^x$；　　(4) $y=\ln u, u=\sin v, v=x^2$.

11. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\arcsin\dfrac{3x+1}{2}$；　　(2) $y=\tan(x-1)$；

(3) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-x}}$；　　(4) $y=\ln(x+1)+\sqrt{x+3}$.

12. 作出下列函数的图像：

(1) $y=\dfrac{1}{2x}$；　　(2) $y=\sin(x-1)$；

(3) $y=\ln(1-x)$；　　(4) $y=\arctan x+1$.

第二节　极限的概念

在客观世界中，我们经常会遇到一些变量的变化趋势问题，例如手机电池充电后，在下一次充电之前，电池的电量会变得越来越小. 又如烧热的铁块放在温度为 T 的空气中冷却，铁块的温度将随着时间的无限增大而趋于常数 T. 这两个问题说明在自变量的某一变化过程中，函数值趋向于某个确定的常数. 为此，我们需要研究极限的概念.

一、数列的极限

1. 数列的概念

定义 1.9　将自变量为正整数的函数 $u_n=f(n)$ 的函数值按自变量 n 由小到大的顺序排成的一列数

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$$

称为**数列**. 记为 $\{u_n\}$，其中 $u_n=f(n)$ 为数列 $\{u_n\}$ 的**通项**或**一般项**. 由于一个数列 $\{u_n\}$ 完全由其一般项 u_n 所确定，有时也将数列 $\{u_n\}$ 简写成 u_n.

例如，数列 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$，其通项公式 $a_n=n$，该数列可记为 $\{n\}$.

定义 1.10　对于数列 $\{u_n\}$，若存在一个常数 $M>0$，使得 $|u_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$ 恒成立，则称数列 u_n 为**有界数列**，或称**数列有界**.

如果数列 $\{u_n\}$ 有界，也可理解成存在两个数 M 和 m，使得 $m\leqslant u_n\leqslant M$，也称 M 为数列的**上界**，m 为数列的**下界**.

定义 1.11 对于数列$\{u_n\}$，若数列的各项满足$u_n \leqslant u_{n+1}$，则称数列$\{u_n\}$为**单调增加的数列**；若数列的各项满足$u_n \geqslant u_{n+1}$，则称数列$\{u_n\}$为**单调减少的数列**. 单调增加的数列和单调减少的数列统称为**单调数列**.

下面通过几个实例说明数列单调的情况：

$\{u_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$为单调减少的数列；

$\{v_n\}: 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$为单调增加的数列；

$\{w_n\}: 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^n}{n}$仅仅是有界数列，但不是单调数列.

2. 数列的极限

观察上面的3个数列，当项数n无限增大时，数列$\{u_n\}$无限接近于常数0，而数列$\{v_n\}$和$\{w_n\}$则无限接近于常数1，它们的共同特征都是：当项数n无限变大时，数列的值都无限接近于一个确定的常数. 这可以用数列的极限来描述.

定义 1.12 对于数列$\{u_n\}$，当项数n无限增大时，如果数列u_n的值无限接近于一个确定的常数A，则称A为数列的极限，或称数列$\{u_n\}$的极限存在，记为

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ 或表示为 当$n\to\infty$时，$u_n \to A$

注意：并非所有的数列都有极限，如果当$n\to\infty$时，u_n无限接近的常数A不存在，则数列$\{u_n\}$的极限不存在.

例如，数列$u_n=[1+(-1)^n]$和数列$v_n=\frac{n^2-1}{n}$的极限都不存在.

关于数列极限的几点说明：

(1)当数列有极限A时，在趋向于A的过程中，变化的形式可能不同. 如上面的3个例子，第一个数列是以单调减少的方式趋于0，第二个数列是以单调增加的方式趋于1，第三个数列是以摆动的方式趋于1.

(2)n无限增大的含义也可用表达式来说明. 若记N为充分大的正整数，则n无限增大可以表示为$n>N$.

(3)u_n与A无限接近也可以表示成，对任意小的正数ε，$|u_n-A|<\varepsilon$恒成立.

(4)数列极限的几何解释. 如果把数列$\{u_n\}$中的每一项都用数轴Ox上的一个点来表示，那么数列$\{u_n\}$趋向于A可解释为：对于任意小的正数ε，存在一个充分大的正整数N，当$n>N$时，点u_n的值都落在点A的ε邻域内.

由极限的定义，容易得出下列结论：

①$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0(|q|<1)$；②$\lim\limits_{n\to\infty} C=C$($C$为常数).

二、函数的极限

前面讨论了数列的极限，数列作为一种较为简单的特殊函数(整标函数)，可以方便地观察其变化趋势. 现在就一般函数$y=f(x)$的变化趋势进行讨论.