



普通高等教育「十一五」国家级规划教材

# 高等

# 数学

第四册

第三版

四川大学数学学院高等数学、微分方程教研室 编

( 物 理 类 专 业 用 )



高等教育出版社  
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 高等数学

## Gaodeng Shuxue

(物理类专业用)

第四册

第三版

四川大学数学学院高等数学、微分方程教研室 编



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。本次修订对第二版内容进行了适当的调整,重视理论与实际结合,数学与物理联系,同时注重保持原版理论严谨、表述流畅、可读性强、便于教学等特点。本套教材共分四册,本书是第四册,主要内容为数学物理方法,包括复变函数、数学物理方程、积分变换和特殊函数。

本书可供高等学校物理学类、电子信息科学类、电气信息类、光电类等对数学要求较高的专业使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 第4册/四川大学数学学院高等数学、微分方程教研室编. —3版. —北京: 高等教育出版社, 2010.5

物理类专业用

ISBN 978-7-04-029230-5

I. ①高… II. ①四… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第043005号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 蒋青 封面设计 赵阳  
责任绘图 郝林 版式设计 余杨 责任校对 胡晓琪  
责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120

购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 三河市华润印刷有限公司

网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 850×1168 1/32  
印 张 15.125  
印 数 390 000

版 次 1979年8月第1版  
2010年5月第3版  
印 次 2010年5月第1次印刷  
定 价 22.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29230-00

## 第三版序言

由四川大学数学学院高等数学教研室编写的《高等数学》自1978年出版以来,被多所高等学校物理类专业广泛采用。在30年教学实践和教学改革的基础上,结合国内兄弟院校使用本教材的反馈信息及当前的实际教学需求,本次修订保持原书理论严谨、表述流畅、可读性强、便于教学等特点,吸收国内外优秀教材的长处,引入题材新颖的应用例题和实际模型,例题与习题的配置更加丰富、合理、便于自学,有利于提高学生数学应用能力的培养。

本次修订参考了近年来出版的同类教材并借鉴了其中一些很好的论述和语言,对第四册进行了如下修改:增加了辐角原理、半无界弦问题、二阶线性偏微分方程的分类和线性偏微分方程的叠加原理;格林函数作了较大充实,并注意了规范化和系统化;改写了齐次化原理,更具体地讲述了保角变换,简单介绍了小波变换和广义函数,罗列了一些可以化为贝塞尔方程的微分方程;为使读者便于自学本书,特附加了习题答案。

本套教材共分四册。第一册主要内容为函数和极限、一元函数微积分及其应用;第二册主要内容为空间解析几何与矢量代数、多元函数微积分及其应用、级数、微分方程等;第三册主要内容为线性代数、概率论与数理统计;第四册主要内容为数学物理方法,包括复变函数、数学物理方程、积分变换、特殊函数等。使用本教材的各高等学校可按照原有教学习惯组织教学,根据教学实际情况,对加\*号或小字排版的内容以及专业性较强的物理专业例题作灵活处理,修改后的本套教材可供对数学要求较高的非数学专业数学课程教学和教学参考使用。

本套教材的修订得到四川大学教务处、四川大学数学学院和高等教育出版社的大力支持,教材编写组专门召开会议讨论修订

方案;原书作者周城璧先生、姚昌瑞先生等对本次修订提出了全面、系统的修改建议;本教材自1978年出版以来,收到许多读者来信,对内容安排、习题配备和教材中出现的错漏提出了许多宝贵的意见和建议,对确保本书质量起到了重要作用,在此谨向他们表示衷心的感谢。

本套教材第四册由四川大学数学学院唐志远、姚昌瑞、吴元凯编写,修订工作由四川大学数学学院邓瑾完成。限于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,希望广大读者予以指正。

编 者

2009年7月于四川大学

# 目 录

## 第一篇 复变函数论

第一章 复数与复变函数 .....	3
第一节 复数 .....	3
§ 1.1.1 复数域 .....	3
§ 1.1.2 复平面 .....	4
§ 1.1.3 复数的模与辐角 .....	5
§ 1.1.4 复数的乘幂与方根 .....	7
第二节 复变函数的基本概念 .....	9
§ 1.2.1 区域与若尔当曲线 .....	9
§ 1.2.2 复变函数的概念 .....	11
§ 1.2.3 复变函数的极限与连续性 .....	13
第三节 复球面与无穷远点 .....	14
§ 1.3.1 复球面 .....	14
§ 1.3.2 闭平面上的几个概念 .....	15
习题一 .....	16
第二章 解析函数 .....	19
第一节 解析函数的概念及柯西 - 黎曼条件 .....	19
§ 2.1.1 导数与微分 .....	19
§ 2.1.2 柯西 - 黎曼条件 .....	20
§ 2.1.3 解析函数的定义 .....	24
第二节 解析函数与调和函数的关系 .....	25
§ 2.2.1 共轭调和函数的求法 .....	25
§ 2.2.2 共轭调和函数的几何意义 .....	27
第三节 初等解析函数 .....	29

§ 2.3.1 初等单值函数 .....	29
§ 2.3.2 初等多值函数 .....	32
第四节 解析函数在平面场中的应用 .....	40
§ 2.4.1 平面场 .....	40
§ 2.4.2 复位势 .....	41
§ 2.4.3 例 .....	44
习题二 .....	47
<b>第三章 柯西定理 柯西积分</b> .....	<b>51</b>
第一节 复变积分的概念及其简单性质 .....	51
§ 3.1.1 复变积分的定义及其计算方法 .....	51
§ 3.1.2 复变积分的简单性质 .....	54
第二节 柯西积分定理及其推广 .....	55
§ 3.2.1 柯西积分定理 .....	55
§ 3.2.2 不定积分 .....	56
§ 3.2.3 柯西积分定理推广到复围线的情形 .....	59
第三节 柯西积分公式及其推广 .....	61
§ 3.3.1 柯西积分公式 .....	61
§ 3.3.2 解析函数的无限次可微性 .....	63
§ 3.3.3 模的最大值原理 柯西不等式 刘维尔定理 莫雷拉定理 .....	66
习题三 .....	68
<b>第四章 解析函数的幂级数表示</b> .....	<b>71</b>
第一节 函数项级数的基本性质 .....	71
§ 4.1.1 数项级数 .....	71
§ 4.1.2 一致收敛的函数项级数 .....	72
第二节 幂级数与解析函数 .....	76
§ 4.2.1 幂级数的敛散性 .....	76
§ 4.2.2 解析函数的幂级数表示 .....	80
§ 4.2.3 解析函数零点的孤立性及唯一性定理 .....	84

第二节 洛朗级数	86
§ 4.3.1 洛朗级数的收敛圆环	86
§ 4.3.2 解析函数的洛朗展式	87
§ 4.3.3 洛朗展式举例	89
第四节 单值函数的孤立奇点	92
§ 4.4.1 孤立奇点的三种类型	92
§ 4.4.2 可去奇点	93
§ 4.4.3 极点	95
§ 4.4.4 本性奇点	96
§ 4.4.5 解析函数在无穷远点的性质	96
习题四	99
第五章 留数及其应用	103
第一节 留数	103
§ 5.1.1 留数的定义及留数定理	103
§ 5.1.2 留数的求法	106
§ 5.1.3 无穷远点的留数	109
第二节 利用留数计算实积分	111
§ 5.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的计算	111
§ 5.2.2 积分路径上无奇点的反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的计算	114
§ 5.2.3 积分路径上有奇点的反常积分的计算	119
§ 5.2.4 杂例	121
§ 5.2.5 多值函数的积分	124
第三节 辐角原理及其应用	128
§ 5.3.1 对数留数	128
§ 5.3.2 辐角原理	129
§ 5.3.3 鲁歇定理	131



习题五	132
<b>第六章 保形变换</b>	<b>136</b>
第一节 解析变换的特性	136
§ 6.1.1 单叶变换	136
§ 6.1.2 解析函数的保角性	137
§ 6.1.3 拉普拉斯算符的变换	141
第二节 分式线性变换	142
§ 6.2.1 几种最简单的保形变换	142
§ 6.2.2 分式线性变换	144
§ 6.2.3 分式线性变换的保交比性	146
§ 6.2.4 分式线性变换的保圆周性	147
§ 6.2.5 分式线性变换的保对称点性	147
§ 6.2.6 分式线性变换的应用	149
第三节 某些初等函数所构成的保形变换	151
§ 6.3.1 幂函数与根式函数	151
§ 6.3.2 指数函数与对数函数	153
§ 6.3.3 茹科夫斯基函数	155
习题六	156

## 第二篇 数学物理方程

<b>第七章 一维波动方程的傅里叶解</b>	<b>163</b>
第一节 一维波动方程——弦振动方程的建立	163
§ 7.1.1 弦振动方程的建立	163
§ 7.1.2 定解条件的提出	165
第二节 齐次方程混合问题的傅里叶解	168
§ 7.2.1 利用分离变量法求解齐次弦振动 方程的混合问题	168
§ 7.2.2 傅里叶解的物理意义	173
第三节 电报方程	176

第四节 非齐次方程的求解	178
习题七	181
<b>第八章 热传导方程的傅里叶解</b>	<b>185</b>
第一节 热传导方程和扩散方程的建立	185
§ 8.1.1 热传导方程的建立	185
§ 8.1.2 扩散方程的建立	187
§ 8.1.3 定解条件的提出	189
第二节 混合问题的傅里叶解	190
第三节 初值问题的傅里叶解	192
§ 8.3.1 傅里叶积分	192
§ 8.3.2 利用傅里叶积分解热传导方程的 初值问题	194
§ 8.3.3 傅里叶解的物理意义	196
第四节 一端有界的热传导问题	199
§ 8.4.1 定解问题的解	199
§ 8.4.2 举例	202
§ 8.4.3 齐次化原理	206
习题八	209
<b>第九章 拉普拉斯方程的圆的狄利克雷问题的傅里叶解</b>	<b>212</b>
第一节 圆的狄利克雷问题	212
§ 9.1.1 定解问题的提法	212
§ 9.1.2 定解问题的傅里叶解法	213
第二节 $\delta$ 函数	217
§ 9.2.1 $\delta$ 函数的引入	217
§ 9.2.2 $\delta$ 函数的性质	218
§ 9.2.3 $\delta$ 函数的数学理论简介	220
§ 9.2.4 高维空间中的 $\delta$ 函数及 $\delta$ 函数的 其他性质	223
习题九	225

第十章 波动方程的达朗贝尔解 .....	228
第一节 弦振动方程初值问题的达朗贝尔解法 .....	228
§ 10.1.1 达朗贝尔解的推出 .....	228
§ 10.1.2 达朗贝尔解的物理意义 .....	230
§ 10.1.3 举例 .....	231
§ 10.1.4 依赖区间 决定区域和影响区域 .....	233
§ 10.1.5 半无界弦问题 .....	235
第二节 高维波动方程 .....	236
§ 10.2.1 三维波动方程的初值问题 .....	236
§ 10.2.2 降维法 .....	239
§ 10.2.3 解的物理意义 .....	240
第三节 非齐次波动方程 推迟势 .....	243
§ 10.3.1 非齐次波动方程的初值问题 .....	243
§ 10.3.2 非线性方程 .....	245
习题十 .....	246
第十一章 拉普拉斯方程(续) .....	250
第一节 格林公式 调和函数的基本性质 .....	250
§ 11.1.1 球对称解 .....	250
§ 11.1.2 格林公式 .....	251
§ 11.1.3 调和函数的基本性质 .....	253
第二节 拉普拉斯方程的球的狄利克雷问题 .....	259
§ 11.2.1 边值问题的提法 .....	259
§ 11.2.2 球的狄利克雷问题 .....	259
§ 11.2.3 狄利克雷外问题 .....	263
第三节 格林函数 .....	264
§ 11.3.1 格林函数的定义 .....	264
§ 11.3.2 用电像法作格林函数 .....	267
§ 11.3.3 格林函数的对称性 .....	270
§ 11.3.4 保形变换法 .....	272

---

第四节 泊松方程·····	274
§ 11.4.1 泊松方程的导出·····	274
§ 11.4.2 泊松方程的狄利克雷问题·····	275
习题十一·····	276
<b>第十二章 傅里叶变换</b> ·····	<b>278</b>
第一节 傅里叶变换的定义及其基本性质·····	278
§ 12.1.1 傅里叶变换的定义·····	278
§ 12.1.2 傅里叶变换的基本性质·····	279
§ 12.1.3 $n$ 维傅里叶变换·····	281
§ 12.1.4 $\delta$ 函数的傅里叶变换·····	282
第二节 用傅里叶变换解数理方程举例·····	283
第三节 格林函数法(续)·····	285
§ 12.3.1 方程的基本解·····	285
§ 12.3.2 齐次方程定解问题的格林函数·····	291
§ 12.3.3 非定常型非齐次方程的格林函数·····	298
习题十二·····	302
<b>第十三章 拉普拉斯变换</b> ·····	<b>304</b>
第一节 拉普拉斯变换的定义和它的逆变换·····	304
§ 13.1.1 傅里叶变换与拉普拉斯变换·····	304
§ 13.1.2 拉普拉斯变换的定义·····	305
§ 13.1.3 拉普拉斯变换的存在定理和反演定理·····	306
第二节 拉普拉斯变换的基本性质及其应用举例·····	309
第三节 展开定理·····	321
§ 13.3.1 展开定理·····	321
§ 13.3.2 用反演公式解数理方程举例·····	323
习题十三·····	328
<b>第十四章 定解问题的适定性 方程的讨论</b> ·····	<b>331</b>
第一节 弦振动方程初值问题的适定性·····	332
第二节 弦振动方程混合问题的适定性·····	334

§ 14. 2. 1 解的存在性·····	334
§ 14. 2. 2 能量积分和解的唯一性·····	336
第三节 狄利克雷问题的适定性·····	338
§ 14. 3. 1 解的唯一性·····	338
§ 14. 3. 2 解的稳定性·····	339
第四节 热传导方程混合问题的适定性·····	340
§ 14. 4. 1 极值原理·····	340
§ 14. 4. 2 解的唯一性·····	341
§ 14. 4. 3 解的稳定性·····	342
第五节 热传导方程初值问题的适定性·····	343
§ 14. 5. 1 解的唯一性和稳定性·····	343
§ 14. 5. 2 解的存在性·····	345
第六节 拉普拉斯方程狄利克雷外问题解的唯一性·····	347
§ 14. 6. 1 三维空间狄利克雷外问题解的唯一性·····	347
§ 14. 6. 2 二维空间狄利克雷外问题解的唯一性·····	348
第七节 定解问题不适定之例·····	350
§ 14. 7. 1 不适定问题举例·····	350
§ 14. 7. 2 对不适定问题的研究·····	352
第八节 三类方程的比较·····	353
§ 14. 8. 1 关于定解问题的提法·····	354
§ 14. 8. 2 关于解的性质·····	354
§ 14. 8. 3 关于时间的反演·····	356
第九节 二阶线性偏微分方程的分类·····	358
第十节 线性偏微分方程的叠加原理·····	361
习题十四·····	363

### 第三篇 特殊函数

第十五章 勒让德多项式 球函数·····	367
第一节 勒让德微分方程及勒让德多项式·····	367

---

§ 15.1.1	勒让德微分方程的导出	367
§ 15.1.2	幂级数解和勒让德多项式的定义	369
§ 15.1.3	勒让德多项式的微分表达式—— 罗德里格斯公式	375
§ 15.1.4	勒让德多项式的施拉夫利积分表达式	375
第二节	勒让德多项式的母函数及其递推公式	377
§ 15.2.1	勒让德多项式的母函数	377
§ 15.2.2	勒让德多项式的递推公式	379
第三节	按勒让德多项式展开	380
§ 15.3.1	勒让德多项式的正交性	381
§ 15.3.2	勒让德多项式的归一性	381
§ 15.3.3	展开定理的叙述	383
第四节	连带勒让德多项式	383
§ 15.4.1	连带勒让德多项式的定义	383
§ 15.4.2	连带勒让德多项式的正交性和归一性	385
第五节	拉普拉斯方程在球形区域上的狄利克雷问题	386
§ 15.5.1	利用连带勒让德多项式 $P_n^m(x)$ 得出 方程(15.1')的解	386
§ 15.5.2	确定定解问题(15.1')和(15.2')的解	387
习题十五		390
第十六章	贝塞尔函数 柱函数	392
第一节	贝塞尔微分方程及贝塞尔函数	392
§ 16.1.1	贝塞尔微分方程的导出	392
§ 16.1.2	幂级数解和贝塞尔函数的定义	393
第二节	贝塞尔函数的母函数及其递推公式	397
§ 16.2.1	贝塞尔函数的母函数	397
§ 16.2.2	贝塞尔函数的积分表达式	398
§ 16.2.3	贝塞尔函数的递推公式	399
§ 16.2.4	半奇数阶贝塞尔函数	400

第三节 按贝塞尔函数展开·····	402
§ 16.3.1 贝塞尔函数的零点·····	403
§ 16.3.2 贝塞尔函数的正交性·····	403
§ 16.3.3 贝塞尔函数的归一性·····	404
§ 16.3.4 展开定理的叙述·····	405
§ 16.3.5 圆膜振动问题·····	405
第四节 第二类和第三类贝塞尔函数·····	408
§ 16.4.1 第二类贝塞尔函数·····	408
§ 16.4.2 第三类贝塞尔函数·····	410
§ 16.4.3 球贝塞尔函数·····	411
第五节 变形(或虚变量)贝塞尔函数和贝塞尔 函数的渐近公式·····	413
§ 16.5.1 变形贝塞尔函数·····	413
§ 16.5.2 贝塞尔函数的渐近公式·····	416
§ 16.5.3 可以化为贝塞尔方程的微分方程·····	418
习题十六·····	423
<b>第十七章 埃尔米特多项式和拉盖尔多项式</b> ·····	<b>426</b>
第一节 埃尔米特多项式·····	426
§ 17.1.1 埃尔米特微分方程的导出·····	426
§ 17.1.2 幂级数解和埃尔米特多项式的定义·····	427
§ 17.1.3 埃尔米特多项式的母函数·····	429
§ 17.1.4 埃尔米特多项式的正交性和归一性·····	429
第二节 拉盖尔多项式·····	431
§ 17.2.1 拉盖尔微分方程的导出·····	431
§ 17.2.2 幂级数解和拉盖尔多项式的定义·····	431
§ 17.2.3 拉盖尔多项式的母函数·····	433
§ 17.2.4 拉盖尔多项式的正交性和归一性·····	434
第三节 特征值和特征函数·····	435
§ 17.3.1 特征值和特征函数的概念·····	435

---

§ 17.3.2 特征值和特征函数的性质·····	436
§ 17.3.3 施图姆-刘维尔型微分方程边值 问题的例子·····	437
习题十七·····	439
附录( I ) ·····	440
傅里叶变换表·····	440
拉普拉斯变换表·····	441
附录( II ) ·····	445
小波变换简介·····	445
习题答案 ·····	449
外国人名表 ·····	465



# 第一篇 复变函数论

数的概念随着生产实践和科学技术的发展而扩大,不断解决数学运算中出现的矛盾.整数解决了自然数集对减法不封闭的矛盾,有理数解决了整数集对除法不封闭的矛盾,实数解决了有理数集不完备的矛盾.但是,数集扩充到实数集  $\mathbf{R}$  以后,像  $x^2 = -1$  这样的方程还是无解,因为没有一个实数的平方等于  $-1$ . 这样,由于解方程的需要,人们引进了一种所谓虚数,用符号  $i$  表示虚数单位,并规定

(i)  $i^2 = -1$ ;

(ii) 它与实数在一起可以进行通常的四则运算.

根据这个规定就会出现形如  $x + iy$  (这里  $x, y$  都是实数)的数,我们把它叫做复数.

复变函数论要研究的是:复变量  $z = x + iy$  的函数的基本概念和理论及其一些应用.复变函数理论的发展与实函数微积分是不能分离的,但它有其自身的特点,它的中心对象是解析函数.由于解析函数具有许多独特的性质,致使复变函数论方法不但在纯粹数学各个部门有很多的应用,而且在各种应用数学、数学物理课程中也有广泛的应用,成为一种不可缺少的强有力的工具.本篇与中学数学内容重复和与微积分平行的内容均叙而不证.