

北京大学外国哲学研究丛书（第二辑）

二十世纪数学哲学

一个自然主义者的评述

PHILOSOPHY OF MATHEMATICS IN THE 20TH CENTURY
A NATURALISTIC COMMENTARY

叶 峰 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学外国哲学研究丛书（第二辑）

二十世纪数学哲学

一个自然主义者的评述

PHILOSOPHY OF MATHEMATICS IN THE 20TH CENTURY
A NATURALISTIC COMMENTARY

叶 峰 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

二十世纪数学哲学:一个自然主义者的评述/叶峰著. —北京:北京大学出版社,2010.7

(北京大学外国哲学研究丛书·第二辑)

ISBN 978-7-301-17133-2

I. ①二… II. ①叶… III. ①数学哲学—研究 IV. ①01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第069015号

书 名: 二十世纪数学哲学——一个自然主义者的评述

著作责任者: 叶 峰 著

责任编辑: 田 炜

封面设计: 奇文云海

标准书号: ISBN 978-7-301-17133-2/B·0901

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路205号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子邮箱: pkuphilo@163.com

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 出版部 62754962

编辑部 62752022

印 刷 者: 三河市北燕印装有限公司

经 销 者: 新华书店

650mm×980mm 16开本 32.75印张 461千字

2010年7月第1版 2010年7月第1次印刷

定 价: 56.00元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024;电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

北京大学外国哲学研究丛书编委会

主编：韩水法

编委：赵敦华 靳希平 杜小真

尚新建 韩林合 张祥龙

本丛书由北京大学哲学系与北京大学外国哲学研究所支持和资助

北京市社科基金资助项目

本书得到教育部人文社会科学重点研究基地重大项目

“20世纪西方逻辑哲学和数学哲学”的资助

“北京大学外国哲学研究丛书”序言

北京大学的外国哲学研究素有渊源,在自北大开校以来一百余年的历史中,名家辈出,成绩斐然,不仅有功于神州的外国哲学及其他思想的研究,而且也有助于中国现代社会的变迁。自八十年代以降,北大外国哲学研究进入了一个新时期,学术视野日趋开阔,评价观点百家争鸣,研究领域自由拓展。巨大的转变,以及身处这个时代的学者的探索与努力带来了相应的成果。一大批学术论文、著作和译著陆续面世,开创了新局面,形成了新趋势。

二十余年又过去了。北大外国哲学研究新作迭出,新人推浪,当付梓以饷读者,扩大影响;一些著作或者出版既早,虽然广受欢迎,但坊间已难获一册,或者在海外付梓,此岸读者无缘识面,当因需再版;一些著作面世之后不久作者即在观点、材料方面更有所获,需修改而出新版;一些颇有学术价值而实堪一读的学术论文由于分散在不同的杂志、文集里面,查阅不便,而在现代学术领域,论文是学术研究中相当重要的一种作品形式,需结集发行。凡此种种,无不表明将北大外国哲学研究性文字汇编成丛书,以见系统,以便参考,实属必需。此套丛书于是因应而生。它的宗旨是有计划地陆续出版北大外国哲学研究领域有价值有影响有意义的著作,既展现学者辛勤劳作的成果,亦反映此间外国哲学研究的最新动向。

不过,此套丛书只是展现了北大外国哲学研究的一个方面,因为它所收录的只是其中的部分著作,许多著作因为各种原因暂时未能收录入在其中。我们的计划是通过持续的努力,将更多的研究著作汇入丛书,以成大观。我们真诚欢迎海内外学术界对此套丛书予以批评和指正。

本套丛书第一辑在商务印书馆出版。各部著作陆续出版之后,颇获学界的肯定。在此,我们对学界朋友的支持和商务印书馆的合作谨致谢忱。本丛书的第二辑移师北京大学出版社,我们期望与北京大学出版社精诚合作,使之在各方面更上层楼。

丛书编委会
2010年1月30日

前 言

本书将介绍二十世纪最主要的数学哲学思想,并从自然主义的立场对它们进行分析、批评,以此为笔者提出的一种自然主义数学哲学作辩护。

1. 当代数学哲学的核心问题与主要特征

一 有限的、物质性的宇宙与人类

现代自然科学为我们描绘了一个**有限的宇宙**。根据今天人们普遍接受的宇宙学理论,宇宙在宏观上很可能是有限的。在微观上,科学在今天能够比较确定地认识到的宇宙中的事物,都是在普朗克尺度(大约 10^{-35} 米, 10^{-44} 秒等)以上的事物。所以,我们今天只能认识到宇宙中有限范围内的事物。而且,有可能我们以后也只能认识到宇宙中有限范围内的事物。比如,即使有一天我们能深入到普朗克尺度 10^{-35} 米以下,还有 10^{-350} 米的尺度, 10^{-3500} 米的尺度,等等。我们不知道整个宇宙是否就是有限的,但我们所认识的宇宙是有限的。

与此同时,现代自然科学给我们描绘了一个**物质性的宇宙**。人类是这个宇宙中的物质的自然进化的产物,是这个物质宇宙的一部分。人类的所有认知活动都是由物质性的大脑及身体实现的。人类的所有知识,部分地来源于由进化与基因所决定的人类大脑的内在结构,部分地产生于大脑通过身体与环境之间的物质性的相互作用,这包括环境中的事物发出的光波、声波等等作用于感觉器官,然后通过神经通道再作用于大脑,也包括大脑控制身体作用于环境中的事物,等等。

简单地说,现代自然科学为我们描绘了一个**有限的、物质性的宇宙**,其中包括了我们人类自身。

二 无穷的、非物质的数学世界

但另一方面,现代数学为我们描绘了一个完全不同的数学世界。

这个数学世界里有无穷多的自然数,有不可数无穷多的实数,还有具有更大的无穷基数的无穷集合,乃至现代集合论中所谓的大基数等等。实无穷,乃至不同等级的实无穷,已经是现代数学中不可缺少的东西。这个数学世界里还有任意维度的拓扑(几何)空间、各种类型的代数结构、函数空间等抽象的数学对象或结构。这些数学世界中的东西是非物质的,不存在于宇宙时空之中,也不是这个宇宙时空之中的任何有限事物的简单的抽象。它们可能在这个物质宇宙之中没有任何“影子”或“例子”,甚至不与这个物质宇宙中的任何事物在结构上相似。它们也与这个物质世界中的事物没有因果联系,或任何其他物质性的联系。它们似乎是在存在于一个完全独立于这个物质世界的另外一个世界之中。

三 当代数学哲学需要回答的问题

果真存在这么一个独立于物质世界的抽象数学世界吗?如果它果真存在,那么存在于这个物质宇宙中的、有限的、物质性的、人类的大脑,如何可能认识到那个数学世界中的、非物质的抽象事物,尤其是那个世界中的无穷的事物?比如,大脑对物质世界中的原子、电子等的认识,最终是靠原子、电子等间接地作用于大脑,但那个数学世界中的抽象事物,与(处于物质世界中的)大脑没有任何因果联系,与大脑之间隔着一道鸿沟,大脑如何可能认识它们?又比如,人类的活动范围是有限的,我们对物质世界中离我们非常遥远但还是有限的事物的知识,如对微观粒子、遥远的星体、宇宙的起源等等的知识,只能是不那么确定的推测,而在数学中,我们如何可能那么确定地认识到无穷,甚至不同等级的实无穷?

反之,如果这个抽象数学世界并非真的存在,比如,假设它只是我们的想象,或我们的“思想的创造物”,那么数学公理与定理还是客观真理吗?我们知道,人们普遍认为数学定理是最可靠的真理,是人类知识的典范。如果数学公理与定理不是客观真理,那么数学又是什么?它还提供客观知识吗?也许它仅仅是人类编造的一个神话;也许数学中的那些无穷的、不与宇宙中的任何事物相似的对象、结构等等,就像神话中的角色一样,是人类的幻想。但如果是这样,数学又为何能够在

科学应用中帮助推导出科学真理？它为何能够成为现代科学的基础？
 这些问题就是当代数学哲学要回答的问题。

四 二十世纪数学哲学主题的演变

二十世纪的数学哲学的主题曾经经历过演变。在十九世纪末至二十世纪初的现代数学产生的初期,由于集合论悖论的发现,数学基础问题曾经困扰过当时最出色的数学家,如彭加勒、希尔伯特、布劳维尔、赫尔曼·威尔、冯·诺伊曼等等。当时的数学哲学研究基本上就是数学基础研究,并产生了逻辑主义、直觉主义与形式主义这三个数学基础流派。进入二十世纪三四十年代以后,关于数学基础的争论在数学家中间基本上已经尘埃落定,现代数学的规范被牢固地确立起来。如今这已经被称作经典数学。今天,如果一个数学家或科学家只对发展数学理论、证明数学定理、或将数学应用于科学感兴趣,那么他(她)不必关心任何数学基础问题。大多数数学家认为数学基础问题已经不存在了。但这不等于说没有数学哲学问题了。上面所提到的那些问题,应该是任何一个了解一点现代数学又具有一点哲学好奇心的人都会感兴趣的问题。这些问题对哲学家们是一个挑战。如果不能很好地回答这些问题那就意味着,从哲学上说,我们对数学的本质,或者说对我们自己的数学知识的本质,还缺乏非常彻底的、清晰的认知。

所以,大约从二十世纪中期开始,大多数数学哲学研究不再试图为数学提供基础,而是对现代数学的实践进行哲学上的反思与分析^[1]。这种反思与分析,不一定会直接地影响数学家们的数学实践,但它是在试图描述、理解我们人类自身的数学认知活动,是将人类的数学实践当作研究对象的分析与研究。正是在这个意义上,上面提出的那些问题让人困惑:承认人类的确具有现代数学的知识,也承认现代数学在科学中有着广泛的应用,是科学的基础,然后问,作为物质世界的一部分的有限的人类,究竟如何可能认识那些独立于物质世界的、无穷的、非物

[1] 当然,例外总是有的。比如,哥德尔坚持为现代数学提供更坚实的基础,极少数构造主义者提议应该用构造主义数学代替经典数学,等等。

质的数学对象^[1]？而假如人类的数学理论并不是在描述一个独立于物质世界的抽象数学世界，那么数学知识又是关于什么的知识？数学还能提供客观真理吗？它又如何能够应用于科学？解释这些疑问，正是当代数学哲学的任务。它要求我们对人类的数学实践的本质有更清晰、彻底的认识。这当然也有可能反过来影响数学家与科学家们的数学实践，或者影响数学教育的方法等。

五 数学哲学与一般哲学的关系

这些数学哲学的问题，其实也是最传统的哲学问题，即本体论与认识论问题，在数学这个知识领域的反映。也就是说，是否客观存在着一个由数学对象构成的数学世界？我们的数学知识是如何可能的？从柏拉图到康德、穆勒等等，过去的哲学家们已经对此尝试了种种回答。但是，从十九世纪末起发展起来的现代数学，在内容上已经远远超出了此前的数学，这使得这些传统的对数学哲学问题的回答，都还有不及之处。这也是当代数学哲学得以继续存在的原因之一。

另一方面，能否回答关于人类数学知识的哲学问题，也是一种哲学能否站得住脚的试金石。从柏拉图到康德、穆勒，历史上许多哲学家都以回答数学哲学问题为己任。特别是康德，他以回答数学知识如何可能为他的哲学的主要目的之一。二十世纪的逻辑实证主义以及当代分析哲学的兴起，在很大程度上也是由于弗雷格、逻辑实证主义者等哲学家认识到了康德的回答的不足，并尝试继续解决数学哲学问题。所以也可以说，数学哲学问题其实是哲学的核心问题。

2. 本书的目的、内容与写作策略

一 本书可以作为数学哲学的教科书

本书将介绍、分析、批评二十世纪的一些最主要的、最有影响的数

[1] 当然，有些哲学家不认为人类是物质性，他们相信人类具有在本质上是非物质的心灵，这种心灵能够“把握”非物质的抽象数学世界中的事物，比如哥德尔就持有这种观点。这是本书将要讨论的各种数学哲学之一。

学哲学思想。本书的目的并不是要全面介绍二十世纪数学哲学的历史。如果读者想要了解二十世纪数学哲学的详细历史,最好是从阅读经典的数学哲学论文集开始,比如 Benacerraf and Putnam (1983), Shapiro (2005), Jacquette (2001) 等等,然后再深入阅读相关的论文、著作。目前国际上似乎还没有较全面地论述二十世纪数学哲学史的著作,也许目前还没有到对二十世纪的数学哲学思想盖棺定论的时候。另外,本书的主要目的也不是为了作为二十世纪数学哲学的教科书。国际上已经有了几种数学哲学的教科书性质的书籍,如 Shapiro (2000)。但为了适应广大读者,本书不会假设读者已经了解数学哲学。本书的第一章可以作为当代数学哲学的一个导论。而且,本书在分析、批评各种数学哲学思想之前,都用了很多的篇幅来介绍那些思想。因此,本书可以被用作数学哲学的教科书。

二 本书主要辅助论证了一种彻底自然主义的数学哲学

但本书的主要目的,是从自然主义的立场出发,分析二十世纪的主要数学哲学思想中的问题与难点,探讨一种彻底自然主义的数学哲学的必要性与可能性,并为笔者提出的一种彻底自然主义的数学哲学作辩护。

自然主义完全接受当代科学关于人类的物质构成与起源的解释,认为人类是物质进化的产物,人类的认知活动,包括人类的数学实践,都是物质世界中事件。自然主义拒绝从一个超自然的、独立于物质世界的心灵或所谓“超验自我”的角度出发,去提出或回答本体论与认识论问题,也拒绝任何从这样一个心灵或“超验自我”的角度出发的哲学思辨或玄想。自然主义的这种基本立场与通常所说的唯物主义是相符合的。自然主义(naturalism)也是当代分析哲学界的主要思潮之一。

当然,与任何一种哲学立场一样,自然主义也有种种形式。本书的主题是数学哲学,所以这里不直接为自然主义作辩护,也不打算详细介绍、分析自然主义的各种形式。关于自然主义的一些还有争议的问题,如意识、意向性、自由意志以及认识论规范与道德规范在自然世界中的起源与位置等问题,都是当代分析哲学中的热点问题;自然主义的各种形式之间的差异,也是当代分析哲学的研究热点。对这些本书都无法

论及。我们将在第二章明确地界定本书所接受的自然主义的那种形式。它是一种比较强的、比较彻底的自然主义^[1]。然后,本书将以这种形式的自然主义为前提,在这个自然主义的框架下分析、批评二十世纪主要的数学哲学思想。

本书中的研究是笔者的另一项研究的补充。在那项研究中,笔者提出了一种彻底自然主义的数学哲学,它也是反实在论的或唯名论的数学哲学。二十世纪的数学哲学已经有一些被冠以“自然主义”这个名称,其中包括在二十世纪后半叶最有影响的一个哲学家蒯因的“自然主义”数学哲学,以及从它发展出的其他一些数学哲学观点。但与这些也被称作“自然主义”的数学哲学理论相比,笔者提出的是一种**真正彻底**的自然主义的数学哲学。事实上,本书将说明,蒯因的数学哲学思想中的主要问题,恰恰来源于它有意无意地背离了自己公开宣示的自然主义的基本观念。

本书通过从自然主义的角度分析、批评二十世纪主要的数学哲学流派,从另一个角度为笔者所提出的那种彻底的自然主义的数学哲学作辩护。本书将试图说明,自然主义提供了一个非常清晰、明确的,而且是**科学**的概念框架,使得我们可以将传统哲学中的一些哲学概念与问题转化为科学的概念与问题,因此一些概念上的模糊不清之处可以得到澄清,对问题的回答也有科学的标准。也就是说,自然主义将一些哲学问题科学化。特别是,各个数学哲学流派中所包含的一些合理的想法,他们对数学实践所作的一些正确的观察,都可以被纳入到自然主义的框架中,可以在自然主义的框架下得到合理解释;他们所提出的一些概念之中的模糊不清之处,可以在自然主义的框架中得到澄清;在自然主义的框架下,他们的争论中那些令人困惑的地方都变得清晰起来,他们各自的思想中的内在冲突或潜在矛盾也清晰地显露出来。自然主义的概念框架给人带来一种豁然开朗的感受。

[1] 而且笔者认为,只有这样的彻底的自然主义才是融贯一致的自然主义,所以笔者将仅仅称之为“自然主义”而不尝试为它另起一个名字。为了与其他形式的自然主义相区别,有时也称之为“彻底的自然主义”。

本书还试图说明,自然主义的框架将能够解决各个数学哲学流派各自所遇到的难题。更具体地说,对二十世纪的那些同情自然主义的数学哲学流派(比如蒯因及一定程度上的卡尔纳普),本书将试图论证,由于他们不能坚持彻底的自然主义,他们的思想中包含了一些内在的冲突乃至矛盾,而出路就在于走向彻底的自然主义。至于那些以明确的反自然主义的基本假设为出发点数学哲学流派(如哥德尔),本书试图说明,他们出于反自然主义的观念所遇到的那些难题,在自然主义的框架下是可以解决的科学问题,而他们思想中包含的对自然主义的反驳,其实是基于一些反自然主义的预设,因此,如果作为反驳自然主义的论证,那将是循环的论证,并不构成对自然主义的真正威胁。

三 本书的各章

本书的第一章将介绍数学哲学的基本问题,并简要说明二十世纪主要的数学哲学流派回答这些问题的思路,以及它们所面临的主要困难。这将为分析和划分二十世纪主要数学哲学流派提供一个框架,并作为当代数学哲学的一个导论,为读者理解本书后面对二十世纪主要数学哲学思想的更详细的介绍、分析、批评提供基础。本书第二章将介绍自然主义的基本观念及笔者提出的那种彻底自然主义的数学哲学。这将成为本书分析、批评二十世纪主要数学哲学思想的哲学基础与出发点。这一章仅仅是那种自然主义数学哲学的引论。关于它的更详细的论述,可参考该章所引的笔者的其他论文与著作。

从第三章开始,本书将介绍二十世纪的一些主要的数学哲学思想,并从自然主义的角度对它们作分析、批评。鉴于本书的目的不是完整地叙述二十世纪数学哲学的历史,也囿于篇幅上的限制,本书仅分析评述二十世纪数学哲学中一些最主要的思想、流派,将专注于对二十世纪数学哲学在整体上有较大影响的、已成为经典的数学哲学思想与流派,因此主要是二十世纪早期与中期的那些在今天已经成为经典的数学哲学思想。这首先包括二十世纪早期的逻辑主义、直觉主义与形式主义三大数学基础研究流派。虽然为数学提供基础已经不是今天的数学哲学研究的目标,这些早期数学基础研究流派中包含的数学哲学思想,一直是二十世纪数学哲学思想的源泉。其次,这还包括了二十世纪早期

到中期的卡尔纳普、哥德尔、蒯因的数学哲学思想。它们在今天也已经成为经典。第三章将先介绍、分析十九世纪末的数学基础研究的状况,这是二十世纪初的数学基础问题研究的缘起。然后,第四至第九章将分别考察逻辑主义、直觉主义、形式主义、卡尔纳普与逻辑实证主义、哥德尔的数学哲学及蒯因的数学哲学。

本书的第三章至第九章是相对独立的,读者可以有选择地阅读。另外,本书最后一章将比较蒯因的自然主义与本书所支持的那种彻底的自然主义。这是对本书第一、二章的呼应,以此结束全书。仅仅对自然主义数学哲学感兴趣的读者,可以主要阅读本书的第一、二、九章。

四 本书未能涵盖的数学哲学

二十世纪后期的数学哲学出现了流派纷呈的局面,研究者们提出了许多新的想法。其中,有一些是对二十世纪早、中期的那些经典思想的修正。比如,C. Wright 与 B. Hale 等人尝试修正与复兴逻辑主义,提出新逻辑主义;Burgess、Maddy、Colyvan 等人对蒯因提出辩护、改进或修正;H. Field 作了实质上是对形式主义的修正的尝试。也有一些人尝试引入新的观念来解释数学,如 G. Hellman、C. Chihara、S. Shapiro 等人的模态主义与结构主义,以及受拉卡托斯影响的拟经验论等等。从自然主义的角度看,分析这些数学哲学中的新想法也是有意义的工作,虽然这些想法中有哪些能够在未来的一段时间内站得住脚,成为有持续的影响力的思想,这一点在今天还很不明朗。鉴于本书的篇幅所限,而且鉴于有必要先介绍、分析与评述二十世纪的那些最重要的、最有影响的数学哲学的经典,本书将不讨论二十世纪后期的这些新的数学哲学思想。笔者期待有机会在另一著作中再详细介绍、分析与批评它们。

但这里需要指出,本书中对经典数学哲学思想的分析批评已经顾及到后来的思想家对这些经典思想的修正。还有一个例外是,在讨论蒯因的那一章中,本书分析了最近几十年对所谓不可或缺性论证的质疑与辩护,这是二十世纪最后几十年的数学哲学研究的主要课题之一。

这可以作为最近几十年的数学哲学的一个引论^[1]。

五 本书的写作策略

在涉及数学史及早期集合论与数理逻辑的历史的地方,本书将主要依据数学史及数理逻辑史专家们的著作而不是原始文献。比如,对十九世纪末至二十世纪初的数学基础研究的历史,对集合论的发展史等,国际上已经有不少专著论及,这些历史研究都超出了本书作者的能力范围,也不是本书的兴趣所在。当然,对于二十世纪早期的数学哲学思想的评述,还是以原始文献为基础。对于二十世纪早、中期的数学哲学思想,迄今为止学者们都已经作了大量的研究,有了大量的二手文献。本书对那些数学哲学思想的介绍、分析,吸收了一些后代学者的论述,对此本书都列出了参考文献。但由于本书的目的不是探讨数学哲学思想的发展,这里只是吸收采纳那些笔者认为正确的分析和评价,而不试图罗列、比较其他的不同的分析和评价,所以,本书对二手文献的引用将是有限的。

另外,一些对著名的数学哲学家思想的分析、评价已经是学界的常识,对这些本书将不去追踪它们的出处,也将略去参考文献,虽然这不意味着它们是本书独创的。这里需要说明一下,本书主要的、独创性的贡献,在于从笔者持有的彻底的自然主义的角度,去分析、批评那些数学哲学思想。

六 读者需要的预备知识

本书将尽可能地适应更大的读者群,包括有较强的哲学背景但很弱的数学或数理逻辑背景的读者,及有较强的数学或数理逻辑背景但很弱的哲学背景的读者。对相关的哲学概念,本书在引入它们时都作了简要的解释,以适应没有哲学背景的读者。对于所涉及的数学与数理逻辑知识,本书将尽量只假设读者具有科普程度上的了解而不是专业程度上的了解,比如,不假设读者了解严格的数学定义或证明。本书

[1] 关于从自然主义的角度对二十世纪后期的一些数学哲学观点的分析,可参见笔者的论文 Ye (2010a)。

的大部分论述要求读者具备一些数理逻辑与集合论的科普性的常识,比如,知道什么是无穷集合、无穷基数,什么是形式系统,数学理论可以形式化、公理化等等^[1]。本书中的少部分具体的论述,比如第四章第一、三节中对弗雷格的逻辑系统的描述及对罗素悖论的推导,第六章中对哥德尔不完全性定理的论述等等,要求读者具备稍多一些数理逻辑的知识,比如,了解一阶逻辑的基本概念,包括常用逻辑符号、公式的意义等,了解递归函数、图灵机等概念。对这些,本书同样只假设读者有一般性的了解,而不假设读者了解其中的数学化的严格的定义、证明等等^[2]。而且,本书将尽量使得读者可以跳过技术性的内容而不影响对有关哲学论述的理解。

然而,读者也应该意识到,本书是学术著作,不是科普读物。它追求简明、清晰与准确,但不刻意追求通俗性。对于数学或逻辑的专业知识的回避,都是以不损害清晰性与准确性为前提的。

3. 致 谢

本书是教育部人文社会科学重点研究基地重大项目“20 世纪西方逻辑哲学和数学哲学”的成果之一。笔者要感谢教育部人文社会科学重点研究基地及该项目的承担单位北京大学外国哲学研究所的资助。笔者还要感谢北京大学哲学系的帮助。

笔者还要感谢许多同事、同学,与他们的讨论给了笔者很多帮助,有些直接影响了本书的写作与修改,有些则让笔者学到了新的东西,或帮助澄清了思路。也许很难列出完整的名单,但就笔者记忆所及,至少包括陈波、陈刚、程炼、郝刘祥、郝兆宽、黄益民、刘闯、刘奋荣、刘晓力、刘壮虎、沈宏梁、孙永平、王路、邢滔滔、许涤非、徐明、徐向东、张志林、

[1] 数理逻辑基础与集合论的入门教材有很多,而且大同小异,比如可参考刘壮虎(2001)、邢滔滔(2008)、徐明(2008)。

[2] 关于这些可参考王浩(1981)及数理逻辑的较高级的教科书,比如, Bell and Machover (1977)、Mendelson (1997)。

周北海、朱志方等同事,符征、郭永盛、蒙虎、南星、彭天璞、杨海波等同学,还有许多在一些讨论场合中遇到的记不起名字的人。很难不遗漏地列出所有的名字,望各位同仁见谅。特别要感谢南星、杨海波同学发现了本书初稿中的一些错误,提出了一些具体的意见。另外,北京大学出版社的田炜、王立刚等编辑的耐心帮助、辛苦工作才使得本书得以问世,对此笔者要特别表示感谢。

最后,笔者要感谢岳母、妻子在本书的写作期间给予的耐心支持和帮助,这使笔者可以专心写作,还要特别感谢刚来到这个世界的女儿带来的欢乐。