高等学校招生
数学试题解

南阳师范学校

说　明

华主席号召我们："要提倡学习文化，学习技术，精通业务，又红又专。"为了邦助广大青年及在校学生加深对中学数学基础知识和基本理论的理解，提高演算技能和技巧，培养分析问题和解决问题的能力，我们收集了一九七七年二十八个省、市、自治区高考数学试题，并作解答，汇编成册；又将一九五二至一九六六年全国高考数学试题解答附印于后，以供参考。

所收试题，多系传抄而来，定有不确之处。但是我们力求题解本身的准确性。

由于时间仓促，水平所限，错误之处在所难免，恳望读者批评指正。

南阳师范数学教研组

一九七八年三月

目　　录

一九七七年

附　录

1、北 京 市

（理科）

一、解方程：$\sqrt{x-1}=3-x$.

解：两边同时平方整理得：

$$x^2-7x+10=0$$

解之得：$x_1=2$，$x_2=5$.

经检验知$x=2$是原方程的根，$x=5$是增根.

二、计算 $2^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

解：原式$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$$=\frac{\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-3}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-2}{2}.$$

三、已知：$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$，

求：$\lg\sqrt{45}=?$

解：$\lg\sqrt{45}=\frac{1}{2}\lg(5\times 9)$

$$=\frac{1}{2}\left(\lg\frac{10}{2}+\lg 3^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\lg 10-\lg 2+2\lg 3)$$

$$=\frac{1}{2}(1-0.3010+2\times 0.4771)=0.8266.$$

四、证明：$(1+\mathrm{tg}\alpha)^2=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

证：∵左边$=(1+\mathrm{tg}\alpha)^2$

$$=\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$$

$$=\frac{(\cos a+\sin a)^2}{\cos^2 a}$$

$$=\frac{\cos^2 a+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}=\text{右边}.$$

∴原式成立.

五、求过直线$x+y-7=0$和$3x-y-1=0$的交点并且过点（1,1）的直线方程.

解：解方程组：

$$\begin{cases}x+y-7=0\\3x-y-1=0\end{cases}$$

得：$\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$

故两直线交点坐标为（2，5）.

由两点式得直线方程：

$$\frac{y-1}{5-1}=\frac{x-1}{2-1}.$$

即$4x-y-3=0$ 为所求直线方程.

六、某厂今年七月份的产值为100万元，以后每月的产值比上月增加20%，问今年七月份到十月份的总产值是多少？

解：由题意知7－10月份的产值组成一个等比数列，

其中$a_1=100$，公比$q=1+20\%=1.2$，$n=4$.

$$\therefore s_4=\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{100(1.2^4-1)}{1.2-1}$$

$$=536.8（万元）.$$

答：今年七月份到十月份的总产值为536.8万元.

七、已知二次函数$y=x^2-6x+5$，

① 求顶点坐标和对称轴方程；

② 画出它的图象；

③ 分别求出图象与x轴y轴交点的坐标.

解：① $\because a=1$，$b=-6$，$c=5$，

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2}=3.$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$=\frac{4\cdot1\cdot5-(-6)^2}{4\cdot1}=-4.$$

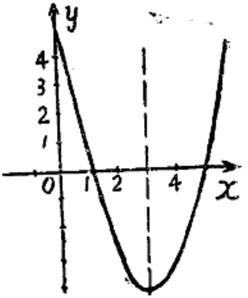
∴顶点坐标为（3，－4）；

对称轴方程为

$x=3$.

② 列表：

X	……	0	1	2	3	4	5	6	……
Y	……	5	0	-3	-4	-3	0	5	……



描点得图象如右图.

③ 令$y=0$，

即$x^2-6x+5=0$.

解得$x_1=1$，$x_2=5$．

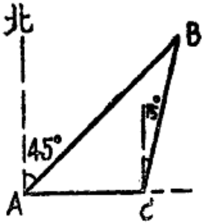
令$x=0$，得$y=5$．

故图象和x轴交点是（1，0），（5，0），

图象和y轴交点是（0，5）．

八、一只船以20海里／小时的速度向正东航行，起初船在A处看见一灯塔B在船的北45°东，一小时后，船在C处看见这灯塔在北15°东的方向，求这时船和灯塔的距离是多少？

解：如图，在△ABC中，



$\angle BAC=90°-45°=45°$，

$\angle ACB=90°+15°=105°$，

$\angle ABC=180°-(45°+105°)=30°$，

$AC=20\times1=20$．

由正弦定理：$\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$．

即：$\dfrac{BC}{\sin45°}=\dfrac{20}{\sin30°}$．

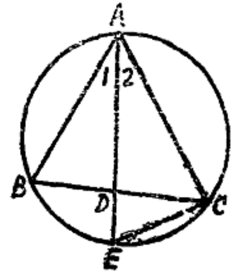
$\therefore\quad BC=\dfrac{20}{\sin30°}\cdot\sin45°$

$=\dfrac{20}{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=20\sqrt{2}$（海里）．

答：这时船和灯塔的距离是$20\sqrt{2}$浬

九、有一个园内接三角形ABC，∠A的平分线交BC于D，交外接园于E，.

求证：AD·AE＝AC·AB.



证明：如图，连结EC.

在△ABD与△AEC中，

∵AE是∠A的平方线，

∴∠1＝∠2.

又∵∠ABC＝∠AEC，

∴△ABD∽△AEC.

$\therefore \frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}$.

∴AD·AE＝AC·AB.

十、当m取哪些值时，直线$y=x+m$与椭园$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$有一个交点？有两个交点？没有交点？当它们有一个交点时，画出它们的图形.

解：依题意得方程组：

$$\begin{cases} y=x+m & (1) \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 & (2) \end{cases}$$

将（1）代入（2）得：

$$25x^2+32mx+16m^2-144=0.$$

当有一个交点时，

$$\triangle=(32m)^2-4\times25\times(16m^2-144)=0.$$

即$m^2=25$，

$\therefore m=\pm5$.

当有两个交点时，

$$\Delta=(32m)^2-4\times25\times(16m^2-144)>0.$$

即 $m^2<25$.

$\therefore -5<m<5$.

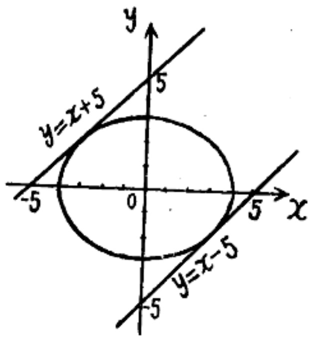
当没有交点时，

$$\Delta=(32m)^2-4\times25\times(16m^2-144)<0.$$

即 $m^2>25$.

$\therefore m<-5$ 或 $m>5$.

当有一个交点时画图如下.



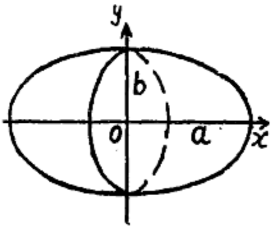
参　考　题

一、1、求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{\pi}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 的导数

解：$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{\pi}{x}-\pi\cos\dfrac{\pi}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

2、求椭园 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕x轴旋转而成的旋转体 的

体积.



解：设旋转体的体积为v，

$$\because \quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad V&=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx\\&=\frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2\cdot x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}\\&=\frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2\cdot a-\frac{1}{3}\cdot a^3-a\cdot(-a)+\frac{1}{3}(-a)^3\right]\\&=\frac{4}{3}\pi ab^2.\end{aligned}$$

二、1、试用ε—δ语言描述函数f（x）在$x=x_0$处连续的定义.

解：描述为：设f（x）在点$x=x_0$处的一邻域内有定义，任意给定ε＞0，总存在δ＞0（δ与ε，x_0有关），当$|x-x_0|<\delta$时，则有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.那么就称函数f（x）在$x_0$处连续。

2、试证明若f（x）在$x=x_0$处连续，且$f(x_0)>0$则存在一个x的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$在这个邻域内处处有f（x）＞0.

证明：∵f（x）在$x=x_0$处连续，

∴对任意给定的$\varepsilon > 0$，总存在$\delta > 0$

使当$|x - x_0| < \delta$时，则有

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。

即$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$，

$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

又∵$f(x_0) > 0$，要使$f(x) > 0$时，只要$f(x_0) - \varepsilon > 0$，即$\varepsilon < f(x_0)$就可以了。

又∵ε是任意给定的，∴$\varepsilon < f(x_0)$总是可以办到的。

即$\delta(\varepsilon, x_0) > 0$总是存在的，即存在一个x的邻域，$|x - x_0| < \delta$，或表示成$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，在邻域内处处存在$f(x) > 0$

（文科）

一、计算：$3^0 + 5^{-1} + \left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$.

解：原式$= 1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= 1 + \frac{1}{5} + \frac{4}{3} = 2\frac{8}{15}$。

二、化简 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

解：$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

$=\frac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2}$

$=\frac{8+4\sqrt{3}}{4}=2+\sqrt{3}$。

三、解方程：$\frac{1}{x-1}+1=\frac{4x-2}{x^2-1}$。

解：去分母整理得：

$x^2-3x+2=0$。

解之得：$x_1=1$，$x_2=2$。

经检验知 $x_1=1$ 是原方程的增根，

$x_2=2$ 是原方程的根。

四、不查表求 $\sin 105°$ 的值。

解：$\sin 105°=\sin(60°+45°)$

$=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

五、一个正三棱锥形的另件，它的高是10cm，底面边长是2cm，求它的体积。

解：已知正三棱锥底面正三角形的边长为2cm，

∴底面积为 $s=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sin 60°$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ (cm²)

∴正三棱锥体积 $V=\frac{1}{3}S\cdot h=\frac{1}{3}\sqrt{3}\times 10=\frac{10}{3}\sqrt{3}$ (cm³)，

答：正三棱锥的体积为 $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm³.

六、一条直线过点（1，-3）并且与直线$2x+y-5=0$平行，求这条直线的方程。

解：直线$2x+y-5=0$的斜率是-2，

所求直线的斜率也应是-2。

由点斜式得所求直线方程：

$$y+3=-2(x-1).$$

即$2x+y+1=0$。

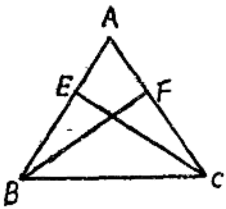
七、证明等腰三角形两腰上的高相等。

已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$CE\perp AB$，$BF\perp AC$．

求证：$BF=CE$。

证明：$\because CE\perp AB$，$BF\perp AC$，

$\therefore \triangle BCE$和$\triangle CBF$为直角三角形。



在$Rt\triangle BCE$和$Rt\triangle CBF$中，

$\because \angle EBC=\angle FCB$，

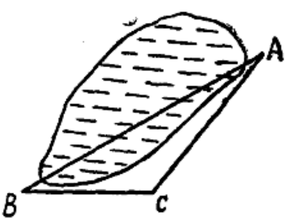
$BC=BC$，

$\therefore \triangle BCE\cong\triangle CBF$。

$\therefore BF=CE$。

八、为了测湖边A、B两点间的距离，选择一点C，测得$CA=50m$，$CB=30m$，$\angle ACB=120°$，求AB。

解：如图，



已知$CA=50m$，

$CB=30m$，

$\angle ACB=120°$，

由余弦定理：

$$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos\angle ACB$$
$$=50^2+30^2-2\cdot50\cdot30\cos120°$$
$$=2500+900-3000\cos(180°-60°)$$
$$=3400+3000\cos60°$$
$$=3400+1500=4900.$$

$\therefore AB=70$（m）。

九、在2和30中间插入两个数，这两个数插入后，使前三个数成等比数列，后三个数成等差数列，求插入的这两个数。

解：设插入的两个数为x和y，得数列2，x，y，30

则 $\begin{cases} x^2=2y \\ 2y=x+30. \end{cases}$

解之得：$\begin{cases} x_1=6, \\ y_1=18, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-5 \\ y_2=12.5 \end{cases}$.

答：插入的两个数为6，18或－5，12.5

十、已知二次函数$y=x^2-4x+3$，

①求出它的图象的顶点和对称轴的方程；

②画出它的图象；

③求出它的图象和直线$y=x-3$的交点的坐标。

解：①$\because a=1$，$b=-4$，$c=3$，

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot1\cdot3-(-4)^2}{4\cdot1}=-1.$$

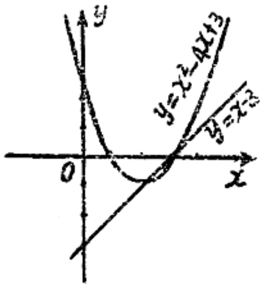
∴图象顶点为（2，－1），

对称轴方程为$x=2$。

②列表：

X	……	0	1	2	3	4	……
Y	……	3	0	-1	0	3	……

描点得图象如右。



③解方程组、

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

得：$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1, \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 0. \end{cases}$

故两个函数图象交点坐标为：（2，-1）和（3，0）。

2、天 津 市

一、1、在什么条件下：

$\frac{y}{2x}$是（a）正数，（b）负数，（c）无意义．

解：(a)在$\begin{cases} y>0 \\ x>0 \end{cases}$或$\begin{cases} y<0 \\ x<0 \end{cases}$的条件下，$\frac{y}{2x}$是正数．

(b)在$\begin{cases} y>0 \\ x<0 \end{cases}$或$\begin{cases} y<0 \\ x>0 \end{cases}$的条件下，$\frac{y}{2x}$是负数．

(c)在$2x=0$即$x=0$的条件下，$\frac{y}{2x}$无意义．

2、比较下列每组数的大小，并说明之．

$\cos 31°$与$\cos 30°$；$\log_2 1$与$\log_2 \frac{1}{4}$．

解：∵在第一象限余弦函数是减函数，

$\therefore \cos 31° < \cos 30°$．

$\because \log_2 1 = 0$，

$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2\log_2 2 = -2$，

$\therefore \log_2 1 > \log_2 \frac{1}{4}$．

3、求值：(1) $tg(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})$ (2) $(-2)^0 \cdot (0.01)^{-\frac{1}{2}}$

解：(1) $tg(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}) = tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$