

全国硕士研究生入学统一考试

数学复习辅导

微积分与线性代数

硕士研究生入学统一考试数学命题研究中心 编



上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

全国硕士研究生入学统一考试

数学复习辅导

——微积分与线性代数

硕士研究生入学统一考试数学命题研究中心 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书根据国家教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》和近年考研数学试卷最新信息编写。本书分两篇十七章,包括:函数,极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,定积分与不定积分,向量代数与空间解析几何,多元微分学,重积分,线面积分,级数,微分方程,行列式,矩阵,向量,线性方程组,相似矩阵,二次型。内容涵盖《考研大纲》中微积分与线性代数的全部考点。每章均设置考点精要,重点和难点、高分攻略与解题技巧、例题精析等栏目,具有很强的实战性和针对性。

本书可供考研学生复习备考时使用,也适合在校大学生以及专升本学生学习和复习高等数学时阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学复习辅导·微积分与线性代数/硕士研究生入学统一考试数学命题研究中心编. —上海:上海交通大学出版社,2010

(全国硕士研究生入学统一考试)

ISBN 978-7-313-06458-5.

I. 数... II. 硕... III. ①微积分—研究生—入学考试—自学参考资料 ②线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①0172 ②0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 080488 号

数学复习辅导

——微积分与线性代数

硕士研究生入学统一考试数学命题研究中心 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

上海崇明南海印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:787mm×960mm 1/16 印张:30 字数:564 千字

2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 1 次印刷

印数:1~4 030

ISBN 978-7-313-06458-5/O 定价:58.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

本考研系列是依据国家教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，近几年考研试卷的最新信息以及作者历年评阅试卷积累的经验而编写的考研应试辅导力作。本系列包括《数学复习辅导——微积分与线性代数》、《数学复习辅导——概率论与数理统计》，对研究生考试课程作系统和提纲挈领式的总结、归纳和疏理，所编内容和选编的例题、练习题涵盖《考研大纲》中的全部考点，充分关注考试内容的重点，反映近年考研试卷的命题趋势和动向。

本系列具有以下特点：

1. 设置栏目，针对性强

为了帮助读者进行复习，提高学习效率，本系列设置了以下栏目：考点精要，重点与难点，高分攻略与解题技巧，例题精析等。凡有练习题或测试题的，书末均附有标准答案，方便读者自测时参考。

2. 题型齐全，形式新颖

本系列选编的例题是编者在筛选和科学测试历年考研试题的基础上精选出的，具有很强的参考性和实战性。对于典型例题，除了提供详尽正确的解题过程外，更有题解前的分析点拨以及题解后总结题型规律的评注，力求收到举一反三、融会贯通之功效。

3. 重视方法，启迪思维

解题既需要掌握常规的方法，更讲究特有的思路 and 技巧。本系列注重介绍学习方法和获取高分的秘笈，启迪解题思路与解题技巧，传授避错防错的对策和措施。

本系列的编者来自上海交通大学、复旦大学等上海一流高校，曾多次参与考研阅卷评分等工作，具有丰富的考研命题规律研究和应试复习辅导经验。本系列主要面向考研学生，供他们复习备考时使用；同时一般在校大学生也可借助本系列作阶段或期末复习时使用，也适合专升本学生复习备考时阅读参考。

《数学复习辅导——微积分与线性代数》由陆少华主编，周汉源、孙薇荣、谢国瑞、金嘉华、黄蔚等参加编写。

由于成书时间仓促，书中疏忽和错误之处，恳请广大读者和使用本书的老师、同学批评指正。

编 者

2010年6月

目 录

第 1 篇 微积分

1 函数	1
考点精要(1) 高分攻略与解题技巧(2) 例题精析(3)	
2 极限与连续	15
2.1 极限	15
考点精要(15) 高分攻略与解题技巧(17) 例题精析(17)	
2.2 函数的连续性	37
考点精要(37) 高分攻略与解题技巧(38) 例题精析(39)	
3 导数与微分	43
3.1 导数的概念	43
考点精要(43) 高分攻略与解题技巧(44) 例题精析(44)	
3.2 导数的计算	50
考点精要(50) 高分攻略与解题技巧(51) 例题精析(52)	
3.3 微分及其应用	59
考点精要(59) 高分攻略与解题技巧(60) 例题精析(60)	
3.4 高阶导数	63
考点精要(63) 高分攻略与解题技巧(64) 例题精析(64)	
4 中值定理与导数的应用	73
考点精要(73) 高分攻略与解题技巧(75) 例题精析(76)	
5 定积分与不定积分	106
5.1 积分的概念	106
考点精要(106) 高分攻略与解题技巧(107) 例题精析(108)	
5.2 积分的计算	112

考点精要(112) 高分攻略与解题技巧(114) 例题精析(114)	
5.3 定积分的应用	144
考点精要(144) 高分攻略与解题技巧(145) 例题精析(145)	
6 向量代数与空间解析几何	156
6.1 向量代数	156
考点精要(156) 高分攻略与解题技巧(157) 例题精析(157)	
6.2 空间解析几何	160
考点精要(160) 高分攻略与解题技巧(162) 例题精析(162)	
7 多元微分学	172
7.1 微分法	172
考点精要(172) 高分攻略与解题技巧(172) 例题精析(172)	
7.2 几何应用	181
考点精要(181) 高分攻略与解题技巧(182) 例题精析(182)	
7.3 极值与最值	189
考点精要(189) 高分攻略与解题技巧(189) 例题精析(189)	
8 重积分	204
8.1 二重积分	204
考点精要(204) 高分攻略与解题技巧(205) 例题精析(205)	
8.2 三重积分	224
考点精要(224) 高分攻略与解题技巧(224) 例题精析(225)	
9 线面积分	234
9.1 曲线积分	234
考点精要(234) 高分攻略与解题技巧(235) 例题精析(235)	
9.2 曲面积分	255
考点精要(255) 高分攻略与解题技巧(256) 例题精析(257)	
10 级数	266
10.1 常数项级数	266
考点精要(266) 高分攻略与解题技巧(268) 例题精析(268)	
10.2 幂级数	282

考点精要(282) 高分攻略与解题技巧(284) 例题精析(284)	
10.3 傅里叶级数	302
考点精要(302) 高分攻略与解题技巧(303) 例题精析(303)	
11 微分方程	309
11.1 一阶微分方程	309
考点精要(309) 高分攻略与解题技巧(310) 例题精析(310)	
11.2 高阶微分方程	325
考点精要(325) 高分攻略与解题技巧(327) 例题精析(327)	

第 2 篇 线性代数

12 行列式	350
考点精要(350) 高分攻略与解题技巧(351) 例题精析(352)	
13 矩阵	362
考点精要(362) 高分攻略与解题技巧(371) 例题精析(371)	
14 向量	389
考点精要(389) 高分攻略与解题技巧(392) 例题精析(392)	
15 线性方程组	410
考点精要(410) 高分攻略与解题技巧(412) 例题精析(412)	
16 矩阵的特征值与特征向量	431
考点精要(431) 高分攻略与解题技巧(432) 例题精析(433)	
17 二次型	458
考点精要(458) 高分攻略与解题技巧(460) 例题精析(461)	

第 1 篇 微积分

1 函 数

【考点精要】

(1) 函数: 设 D 是一个数集, 若根据某个规律 f , 使得 D 中每一个数 x , 都有唯一的数 y 与之对应, 则称确定了一个定义在数集 D 上的函数 f , 记作 $y=f(x)$. D 称为函数 f 的定义域, 为指出是函数 f 的定义域, 常记成 $D(f)$. 数集 $\{f(x) | x \in D(f)\}$ 称为函数 f 的值域.

实际问题中函数的定义域由问题的背景确定. 由代数式确定的函数, 其定义域常指使该代数式有意义的数全体所成的集合, 称为自然定义域.

(2) 复合函数: 如果函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D , 值域为 Z , 且 $Z \subseteq D_1$, 则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为定义在 D 上的由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

(3) 反函数: 若函数 $y=f(x)$ 是定义域 D 到值域 Z 的一一对应, 则每个 $y=f(x) \in Z$, 都有唯一的 $x(\in D)$ 与之对应, 即确定了一个定义域为 Z , 值域为 D 的新函数 g , 称 g 为 f 反函数. 此时有 $f[g(y)]=y$, $g[f(x)]=x$.

(4) 基本初等函数: 常数函数 ($y=C$), 幂函数 ($y=x^a$), 指数函数 ($y=a^x$), 对数函数 ($y=\log_a x$), 三角函数, 反三角函数.

(5) 初等函数: 六类基本初等函数经有限次加、减、乘、除与复合而得的函数.

(6) 奇函数: 函数 $y=f(x)$, 如果任意 $x \in D(f)$, 必有 $-x \in D(f)$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 则 y 称为奇函数.

(7) 偶函数: 函数 $y=f(x)$, 如果任意 $x \in D(f)$, 必有 $-x \in D(f)$, 且 $f(-x) = f(x)$, 则 y 称为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称; 偶函数的图形关于 y 轴对称.

(8) 有界性: 设函数 $y=f(x)$ 在区间 Δ 有定义:

① 若存在常数 M , 对任意 $x \in \Delta$, 恒有

$$f(x) \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在 Δ 上有上界, M 为其一个上界.

② 若存在常数 m , 对任意 $x \in \Delta$, 恒有

$$f(x) \geq m,$$

则称 $f(x)$ 在 Δ 上有下界, m 为其一个下界.

③ 若存在常数 N , 对任意 $x \in \Delta$, 恒有

$$|f(x)| \leq N,$$

则称 $f(x)$ 在 Δ 上有界.

一般, $f(x)$ 在 Δ 上有界 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 Δ 上有上下界.

(9) 周期性: 若任意 $x \in D(f)$, 必有 $x+T \in D(f)$, 且 $T > 0$,

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为其一个周期(通常周期是指最小周期).

一般, $f(x)$ 的周期为 $T, a > 0$, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{a}$.

(10) 单调性:

① 若任意 $x_1, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2$, 必有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 Δ 单调递增.

② 若任意 $x_1, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2$, 必有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 Δ 单调递减.

重点: 函数的自然定义域, 复合函数的定义域.

难点: 函数的有界性.

【高分攻略与解题技巧】

(1) 自然定义域的确定法:

① 熟记六类基本初等函数的定义域.

② 若函数为基本初等函数的和、差、积、商, 则其定义域为表达式中出现的基本初等函数的定义域的交集(排除分母为 0 的情形).

③ 若函数为基本初等函数的复合函数, 则设中间变量, 采用分步确定的方法.

(2) 值域的确定法:

① 若函数有反函数, 则其值域为反函数的定义域.

② 若函数为闭区间上连续函数, M 为其最大值, m 为其最小值, 则其值域为区间 $[m, M]$.

(3) 分段函数(特别是绝对值函数)处理技巧: 求复合函数表达式、求导、求积

必须分段进行,两段交点的处理要谨慎,研究连续性必须求出左、右极限,研究可导性必须求出左、右导数.

(4) 隐式化显式常用方法:化简、换元、递推.

(5) 偶函数的判别法:

① 偶函数的和、差、积、商仍为偶函数.

② 奇函数的积与商为偶函数.

③ 奇函数的导函数为偶函数.

(6) 奇函数的判别法:

① 若任意 x , 均有 $f(x) + f(-x) = 0$, 则 $f(x)$ 为奇函数.

② 奇函数的和与差仍为奇函数.

③ 奇函数与偶函数的积与商为奇函数.

④ 偶函数的导函数为奇函数.

⑤ 奇函数的反函数为奇函数.

(7) 有界性的判别法:

① 利用初等数学的不等式或配方法.

② 闭区间上连续函数是有界的.

③ 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, 则当 x 充分靠近 a 时, $f(x)$ 有界.

(8) 单调性的判别法:

① 按定义验证.

② 利用一阶导数的正、负判别函数的单调与否.

【例题精析】

1.1 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = x^0, g(x) = 1$;

(2) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x$;

(3) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(4) $f(x) = \sin x, g(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

分析 两个函数当且仅当定义域与对应法则均相同时才表示同一函数,否则它们表示两个不同的函数.

解 (1) $f(x) = x^0$ 的定义域为 $x \neq 0$; 而 $g(x) = 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 故两个函数不相同.

(2) $f(x) = \lg x^2$ 的定义域为 $x \neq 0$; $g(x) = 2 \lg x$ 的定义域为 $x > 0$, 故两个函数不相同.

(3) 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x$, 而 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x| = -x$, 即两个函数的对应规则不相同, 故不是相同的函数.

(4) $f(x) = \sin x$ 与 $g(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ 是相同的函数, 因为它们有相同的定义域 $(-\infty, +\infty)$, 有相同的对应法则.

1.2 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x+1};$$

$$(2) y = \arcsin \frac{2-5x}{3};$$

$$(3) y = \sqrt{\sin x} + \lg(9-x^2);$$

$$(4) y = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}.$$

分析 求函数的定义域, 就是求使表达式有意义的那些自变量的值, 通常是列出不等式(组), 解之即得定义域.

$$\text{解 (1)} \begin{cases} x \neq 1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1; \\ x \geq -1. \end{cases}$$

故定义域为 $[-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) $-1 \leq \frac{2-5x}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 2-5x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq -5x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{5} \leq x \leq 1$, 故定义域为 $[-\frac{1}{5}, 1]$.

(3) $\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 9-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n\pi \leq x \leq 2n\pi + \pi & (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ -3 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < 3$, 即定义域为 $[0, 3)$.

$$(4) \begin{cases} 2x-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \\ \lg(2x-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \text{ 及 } 1 < x \leq 2, \text{ 即定义域为 } (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2].$$

1.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求 $f(\lg x)$, $f(\sin x)$ 的定义域.

解 要使 $f(\lg x)$ 有意义, x 满足: $0 \leq \lg x \leq 1$, 得定义域为 $[1, 10]$. 为使 $f(\sin x)$ 有意义, x 满足: $0 \leq \sin x \leq 1$, 得定义域为

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} [2n\pi, 2n\pi + \pi].$$

1.4 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}} + 1, \quad x \neq 0;$$

$$(2) y = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}, \quad x \geq -\frac{1}{4};$$

$$*(3) y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}.$$

分析 求反函数的通常步骤:由 $y = f(x)$ 解出 x , 得 $x = \varphi(y)$, 则 $y = \varphi(x)$ 即为所求反函数.

解 (1) $y(10^x - 10^{-x}) = 10^x + 10^{-x} + 10^x - 10^{-x} = 2 \times 10^x$,
 $y(10^{2x} - 1) = 2 \times 10^{2x}, \quad (y-2)10^{2x} = y$,

解得 $x = \frac{1}{2} \lg \frac{y}{y-2}$,

故所求反函数为 $y = \frac{1}{2} \lg \frac{x}{x-2}$.

$$(2) y(1 + \sqrt{1+4x}) = 1 - \sqrt{1+4x},$$
$$\sqrt{1+4x} = \frac{1-y}{1+y},$$

解得 $x = \frac{-y}{(1+y)^2}$,

故所求反函数为 $y = \frac{-x}{(1+x)^2}$.

$$(3) y^3 = [x + \sqrt{1+x^2}] + 3 \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}} \cdot$$
$$[\sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}] + [x - \sqrt{1+x^2}]$$
$$= 2x + 3 \sqrt[3]{x^2 - (1+x^2)} y$$
$$= 2x - 3y,$$

解得 $x = \frac{1}{2}(y^3 + 3y)$,

故所求反函数为 $y = \frac{1}{2}(x^3 + 3x)$.

1.5 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 0, 1$, 求:

$$(1) f\left[\frac{1}{f(x)}\right];$$

注: 例题序号左上角打“*”号, 为难度略高或高的题目, 下同.

(2) $f(f\{f[f(x)]\})$.

解 (1) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x}$,

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1} = \frac{x-1}{x-1-x} = 1-x.$$

(2) $f[f(x)] = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{x}{x-(x-1)} = x$, 故

$$f(f\{f[f(x)]\}) = f[f(x)] = x.$$

1.6 设 $f(x) = e^x, g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的表达式.

解 $f[g(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1; \end{cases}$

$$g[f(x)] = g(e^x) = \begin{cases} 1, & e^x < 1 \\ 0, & e^x = 1 \\ -1, & e^x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

1.7 求 $f_n(x) = \underbrace{f \cdots f(x)}_{n\text{次}}$, 若

(1) $f(x) = a + bx, x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$.

解 (1) $f_1(x) = f(x) = a + bx$,

$$f_2(x) = f[f(x)] = a + b(a + bx) = a(b+1) + b^2x,$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = a + b[a(b+1) + b^2x] = a(b^2 + b + 1) + b^3x,$$

.....

若

$$f_k(x) = a(b^{k-1} + b^{k-2} + \cdots + b + 1) + b^kx,$$

则

$$f_{k+1}(x) = f[f_k(x)] = a + b[a(b^{k-1} + \cdots + b + 1) + b^kx]$$

$$= a(b^k + \cdots + b + 1) + b^kx.$$

故由归纳法, 得

$$f_n(x) = a(b^{n-1} + \dots + b + 1) + b^n x = \frac{a(b^n - 1)}{b - 1} + b^n x.$$

$$(2) f_1(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$f_2(x) = f[f(x)] = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

若 $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1-kx^2}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right),$

则 $f_{k+1}(x) = f[f_k(x)] = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-kx^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1-kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-(k+1)x^2}},$
 $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{k+1}}, \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$

故由归纳法, 得 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1-nx^2}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$

1.8 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$

(2) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$

(3) $f(x) = (\sqrt{a+1} + \sqrt{a})^x + (\sqrt{a+1} - \sqrt{a})^x;$

(4) $f(x) = x \left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2} \right).$

分析 判别函数 $f(x)$ 是否为奇(偶)函数, 常用方法是检验 $f(-x)$ 是否等于 $\pm f(x)$.

解 (1) $f(-x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \ln \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$
 $= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x),$

故 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

(2) $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = -f(x),$

故 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 是奇函数.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad f(-x) &= (\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^{-x} + (\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^{-x} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\right)^x + \left(\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}\right)^x \\
 &= \left(\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{(a+1)-a}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}{(a+1)-a}\right)^x \\
 &= (\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^x + (\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^x \\
 &= f(x),
 \end{aligned}$$

故 $f(x) = (\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^x + (\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^x$ 是偶函数.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad f(-x) &= (-x) \left[\frac{1}{2^{-x}-1} + \frac{1}{2} \right] = (+x) \left[\frac{2^x}{2^x-1} - \frac{1}{2} \right] \\
 &= x \left[\frac{2^x}{2^x-1} - 1 + \frac{1}{2} \right] = x \left[\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2} \right] = f(x),
 \end{aligned}$$

故 $f(x) = x \left(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2} \right)$ 是偶函数.

1.9 求证: 定义在 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上的任何函数 $f(x)$ 都可以唯一表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

证 存在性: 由于 $g(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $h(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数, 而

$$g(x) + h(x) = 2f(x),$$

$$\text{从而} \quad f(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{h(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

即 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数 $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 与一个奇函数 $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 之和.

唯一性: 若 $f(x)$ 可表为偶函数 $\varphi(x)$ 与奇函数 $\psi(x)$ 之和:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$$\text{则} \quad f(-x) = \varphi(-x) + \psi(-x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

$$\text{两式相加, 得} \quad \varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2};$$

$$\text{两式相减, 得} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

这就证明了唯一性.

1.10 若周期函数 $f(x)$ 的周期为 $T, a \neq 0$, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{a}$.

证 记 $g(x) = f(ax+b)$,

$$\text{则} \quad g(x+T_1) = f[a(x+T_1)+b] = f[(ax+b)+aT_1],$$

因而 T_1 是 $g(x)$ 的周期 $\Leftrightarrow g(x) = g(x+T_1) \Leftrightarrow aT_1$ 是 $f(x)$ 的周期 $\Leftrightarrow T = aT_1$, 即 $T_1 = \frac{T}{a}$.

故 $g(x) = f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{a}$.

1.11 求下列周期函数的周期:

(1) $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$;

(2) $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$;

(3) $f(x) = a\cos x + b\sin x$, $b \neq 0$.

解 (1) $f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$.

因为 $\cos x$ 的周期为 2π , 故 $\cos 2x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 从而 $f(x)$ 的周期也为 π .

$$\begin{aligned} (2) f(x) &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4x) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

因为 $\cos 4x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 故 $f(x)$ 的周期也是 $\frac{\pi}{2}$.

(3) 令 $\varphi = \arctan \frac{a}{b}$, 则

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin\varphi \cos x + \cos\varphi \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),$$

故 $f(x)$ 的周期为 2π .

1.12 若函数 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $x = a$ 和 $x = b$ 对称 ($a \neq b$), 求证: $f(x)$ 为周期函数.

证 $f(x)$ 图形关于直线 $x = c$ 对称, 则 $f(c+x) = f(c-x)$.

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad f(x) &= f[a + (x - a)] = f[a - (x - a)] = f(2a - x) \\ &= f[b + (2a - x - b)] = f[b - (2a - x - b)] \\ &= f[x + 2(b - a)], \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

1.13 求证: 函数 $f(x)$ 有界 $\Leftrightarrow f(x)$ 上、下有界.

证 \Rightarrow : $f(x)$ 有界, 即存在 M , 使

$$|f(x)| \leq M,$$

于是

$$-M \leq f(x) \leq M,$$

即 $f(x)$ 上、下有界.

⇐: $f(x)$ 上、下有界, 即存在 a, b , 使

$$a \leq f(x) \leq b,$$

于是 $|f(x)| = |f(x) - a + a| \leq |f(x) - a| + |a| = f(x) - a + |a| \leq b - a + |a|$,
即 $f(x)$ 有界.

1.14 若函数 $f(x)$ 满足:

$$af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}, \quad x \neq 0, |a| \neq |b|,$$

求证: $f(x)$ 为奇函数.

证 令 $x = \frac{1}{t}$, 得 $af\left(\frac{1}{t}\right) + bf(t) = ct$,

或 $bf(x) + af\left(\frac{1}{x}\right) = cx$,

消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, 得 $(a^2 - b^2)f(x) = \frac{ac}{x} - b cx$,

用 $(-x)$ 代 x , 得 $(a^2 - b^2)f(-x) = \frac{-ac}{x} + b cx$.

两式相加得 $(a^2 - b^2)[f(x) + f(-x)] = 0$.

因为 $a^2 - b^2 \neq 0$, 故 $f(x) + f(-x) = 0$,

即 $f(x)$ 为奇函数.

1.15 $ad \neq bc$, 若函数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 与反函数相同, 求 a, b, c, d 满足的关系式.

解 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, 解得 $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$,

故反函数为 $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

由 $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-dx+b}{cx-a}$, 得

$$c(a+d)x^2 + (d-a)(d+a)x - (d+a)b \equiv 0,$$

于是
$$\begin{cases} c(a+d) = 0, \\ d^2 - a^2 = 0, \\ b(a+d) = 0, \end{cases}$$

即 a, b, c, d 满足的条件为

$$a+d=0.$$

或

$$\begin{cases} b=c=0, \\ a=d. \end{cases}$$