MODIFIED BAYESIAN ESTIMATION METHOD OF

可靠性参数的修正Bayes

RELIABILITY PARAMETERS AND ITS APPLICATION

估计法及其应用

韩 明 著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

可靠性参数的修正 Bayes 估计法及其应用

韩　明　著

同濟大學 出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书对 Bayes 方法中参数的点估计——Bayes 估计进行修正，给出可靠性参数的 E-Bayes 估计的定义、E-Bayes 估计及其性质；对 Bayes 方法中参数的可信限——Bayes 可信限进行修正，给出可靠性参数的 M-Bayes 可信限的定义、M-Bayes 可信限的估计及其性质，并给出模拟算例和应用实例. 全书共分五章，包括绪论、λ 的估计、p_i 的估计、R 的估计及分布参数的估计.

本书图表并举，理论与应用并重，体系系统，论述直观而严密，可作为高等院校有关专业的高年级本科生、研究生的教材或参考书，也可以供高等院校有关教师、研究人员和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

可靠性参数的修正 Bayes 估计法及其应用/韩明著.
—上海：同济大学出版社，2010. 3
ISBN 978-7-5608-4249-3

Ⅰ. ①可… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①试验分析(数学)
Ⅳ. ①0212. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 014307 号

可靠性参数的修正 Bayes 估计法及其应用

韩 明 著

责任编辑 曹 建 助理编辑 李小敏 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www. tongjipress. com. cn
(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 同济大学印刷厂
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 15. 5
字 数 310 000
印 数 1—1 100
版 次 2010 年 3 月第 1 版 2010 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-4249-3

定 价 58. 00 元

本书若有印装质量问题，请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前　　言

Bayes 方法的研究和应用受到国际上的重视，可以说它是国际统计界的一个热点问题. 在国际统计学术界中有两大学派——Bayes 学派和经典学派，这两个学派之间长期存在争论，至今没有定论. 事实上，这两个学派的争论形成了现代统计学发展的一个特色. 两个学派的学者们都认为这场争论对现代统计学的发展起到了积极的促进作用. 应用 Bayes 方法进行统计推断有两个方面的困难，一个是**先验分布的确定**，这是关于 Bayes 方法争论最多的问题；另一个是**后验分布的计算**，这里包括许多从公式表面所看不到的理论上和计算上的问题.

参数的修正 Bayes 估计法是在现有理论的基础上对 Bayes 方法的修正，它包括**参数的 E-Bayes 估计法**和**参数的 M-Bayes 可信限法.** 所谓参数的 E-Bayes 估计法，是对 Bayes 方法中参数的点估计——Bayes 估计进行修正，给出参数的 E-Bayes 估计（expected Bayesian estimation）的定义、E-Bayes 估计及其性质等. 所谓参数的 M-Bayes 可信限法，是对 Bayes 方法中参数的可信限——Bayes 可信限进行修正，给出参数的 M-Bayes 可信限(modified Bayesian credible limit）的定义、估计及其性质等.

本书将给出几个常见的可靠性参数(失效率、可靠度、失效概率等)的 E-Bayes 估计的定义、E-Bayes 估计及其性质，并给出模拟算例和应用实例；将给出几个常见的可靠性参数(失效率、可靠度等)的单侧 M-Bayes 可信限(one-sided modified Bayesian credible limit)和双侧 M-Bayes 可信限(two-sided modified Bayesian credible limits)的定义、估计及其性质，并给出模拟算例和应用实例.

全书共由五章组成：

第 1 章是**绪论**，包括 Bayes 方法的研究与应用，参数的修正 Bayes 估计法概述，参数的 E-Bayes 估计法，参数的 M-Bayes 可信限法，基本函数和常见的寿命分布以及本书的结构示意图.

第 2 章介绍 **$\boldsymbol{\lambda}$ 的估计**，对一个超参数情形和两个超参数情形分别给出 λ 的 E-Bayes 估计的定义、E-Bayes 估计、多层 Bayes 估计及 E-Bayes 估计的性质；给出 λ 的单侧 M-Bayes 可信限和双侧 M-Bayes 可信限的定义、估计及其性质，并给出模拟算例和应用实例.

第 3 章介绍 **p_i 的估计**，对一个超参数情形和两个超参数情形分别给出 p_i 的 E-Bayes 估计的定义、E-Bayes 估计、多层 Bayes 估计及 E-Bayes 估计的性质，并给出模拟算例和应用实例.

第 4 章讲解 **R 的估计**，对一个超参数情形和两个超参数情形分别给出 R 的 E-Bayes 估计的定义、E-Bayes 估计、多层 Bayes 估计及 E-Bayes 估计的性质；给出 R 的单侧 M-Bayes 可信限和双侧 M-Bayes 可信限的定义、估计及其性质，并给出模拟算例和应用实例.

第 5 章阐述**分布参数的估计**，给出指数分布、双参数指数分布、对数正态分布和 Weibull 分布中分布参数的最小二乘估计，位置-尺度参数模型中分布参数的最小二乘估计；在无失效数据(zero-failure data)问题的研究中引进失效信息，并在此基础上进行综合处理；给出分布参数的加权综合估计，同时给出应用实例.

可靠性参数的修正 Bayes 估计法将丰富现有的参数估计理论，并将对数学、统计学及可靠性理论和应用起到一定的促进作用. 它不但可以应用于可靠性参数的估计，还可以应用于其他参数估计，具有重要的理论价值和实际应用意义，发展前景看好.

本书图表并举(表有 117 个，图有 45 幅)，理论与应用并重(定理有 75 个，另有 2 个引理和 1 个猜想，同时提供了 30 个模拟算例和应用实例)，体系系统，论述直观而严密，具有较好的可读性.

自从笔者提出了可靠性参数的修正 Bayes 估计法以来，已逐渐引起了国内外同行的关注. 写作本书的目的，一个是基于国内外同行的关注，帮助具有一定基础的读者在尽量短的时间内掌握可靠性参数的修正 Bayes 估计法的基本理论并进入前沿研究领域，另一个是为了总结该领域的研究成果. 笔者在培养研究生的过程中，本书的主要内容已经使用过，并修正了大多数错误. 但由于笔者水平所限，书中难免仍有一些不妥甚至是疏漏之处，恳请专家、读者批评指正.

在此，要感谢吴喜之教授对笔者的辛勤培养与帮助，还要感谢张尧庭教授、陈家鼎教授、茆诗松教授、王静龙教授、赵仁杰教授、魏振军教授等多年来给予笔者的指导和帮助.

本书的出版得到福建省“百千万人才工程”基金、福建工程学院重点建设学科——“应用数学”学科建设经费的资助；本书的部分内容是浙江省“151 人才工程”基金(No. 992071)、浙江省自然科学基金资助项目(No. 100026)、福建省自然科学基金资助项目(No. Z0511044，No. 2009J01001)的研究成果，在此一并致谢！

韩　明

2009 年 12 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

1 绪　　论

本章主要介绍 Bayes 方法的研究进展与应用现状，并讲解参数的修正 Bayes 估计法、参数的 E-Bayes 估计法和参数的 M-Bayes 可信限法，还介绍基本函数和常见的寿命分布及本书的结构示意图.

1.1 Bayes 方法的研究与应用

Bayes 方法的研究与应用受到国际同行的重视，可以说它是国际统计界的一个热点问题. 纵观国内外统计学方面的杂志，尤其是美国统计协会的 JASA (Journal of the American Statistical Association)，英国皇家统计学会的 JRSS (Journal of the Royal Statistical Society)等，几乎每一期都有 Bayes 统计方面的内容.

在国际统计学术界中有两大学派——Bayes 学派和经典学派（经典学派也称为频率学派），这两个学派之间长期存在争论，至今没有定论. 事实上，这两个学派的争论形成了现代统计学发展的一个特色. 两个学派的学者们都认为这场争论对现代统计学的发展起到了积极的促进作用（陈希孺(2002)）.

应用 Bayes 方法进行统计推断有两个方面的困难，一个是**先验分布的确定**，这是关于 Bayes 方法争论最多的问题；另一个是**后验分布的计算**，这里包括许多从公式表面所看不到的理论上和计算上的问题. 这些问题一直以各种方式影响着当代 Bayes 统计的研究发展方向（Kotz 与吴喜之(2000)）.

在近 30 年以来，Bayes 统计在理论上取得了一些进展，在实际中又获得了广泛的应用. Berger 的专著《Statistical Decision Theory》(1980)、《Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis》(Second Edition，1985)在美国相继问世（第 2 版的中译本由中国统计出版社于 1998 年出版），其中对 Bayes 统计作了较完整的叙述. 美国国家科学院院士、美国加州大学 Berkley 分校的 Lehmann 教授（许宝騄教授曾协助 Neyman 教授指导 Lehmann 的博士学位论文），在其专著《Theory of Point Estimation》(1983 年；第 2 版，1998 年）的第 2 版中增加了 Bayes 统计推断方面的篇幅（该书的第 2 位作者是 George Casella，他是佛罗里达大学的终身教

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

授,还是统计系的系主任). 该书的中译本由中国统计出版社于 2005 年出版. 1991 年和 1995 年,美国连续出版了两本《Case Studies in Bayesian Statistics》,使 Bayes 统计在理论上和实际应用上以及在它们的结合上都取得了长足的发展. 关于 Bayes 统计的研究,代表性的还有 Lindley & Smith(1972),Box & Tiao(1973),Toman(1986),Arnold & Casstillo(1993),Bernardo & Smith(1994),Berger(2000),Kotz 与吴喜之(2000)等的研究成果. 关于 Bayes 方法用于可靠性理论方面的研究,代表性的有 Martz & Waller (1982),Tillman et al. (1982),Coolen & Newby (1994),Li et al. (2002),Nassar & Eissa (2004),蔡洪等(2004)等的研究成果. Bayes 方法的应用很广泛,除了在可靠性理论方面的应用外,在经济管理、保险精算等方面也十分活跃,代表性的有 Zellner(1971),Litterman(1986),Buhlmann (1967),Gelfang & Wang (2000),Bewley & Griffiths(2002),朱慧明与韩玉启(2005)等的研究成果.

前面已提过,应用 Bayes 方法进行统计推断有两个方面的困难,在这两个方面都取得了一些进展. 但 Bayes 统计的发展过程中始终还存在一些问题,至今没有很好地解决. 关于先验分布的确定,已有一些研究,在此先不谈,详见 Berger(1985),茆诗松(1999),Kotz 与吴喜之(2000)等的研究成果. 这里简要概述一下与后验分布计算有关的一些问题.

Dempster(1980)认为,统计推断技术的应用受到概念和计算因素的阻碍. Bayes 统计推断从概念上要比非 Bayes 统计推断直观得多,而非 Bayes 统计推断仅有一套复杂的特殊规则,Bayes 方法更广泛应用的主要障碍是在计算上. 近些年来,一些学者提出了数值和解析近似的方法来解决参数的后验分布密度和后验分布各阶矩的计算问题,如 Lindley(1980)的数值逼近法,Naylor-Smith(1982)的近似法,Tierney-Kadane(1984)的近似法等. 然而这些方法的实现,需要依靠复杂的数值技术及相应的软件支撑. MCMC(Markov Chain Monte Carlo)方法的研究对推广 Bayes 统计推断理论和应用开辟了广阔的前景,使 Bayes 方法的研究与应用得到了再度复兴. 目前,MCMC 已经成为一种处理复杂统计问题极其流行的工具,尤其是在经常需要复杂的高维积分运算的 Bayes 统计推断领域更是如此. 由于一些复杂的高维积分运算用通常的方法无法得到后验分布密度,在这个背景下,一些其他方法(如一些线性近似、高斯积分方法等)或者不可行,或者无法提供精确的结果. 而如果定义合理且方法实施适当,则 MCMC 方法总能得到一条或几条收敛的马尔可夫链(Markov Chain),其极限分布就是所需要的后验分布,而且 MCMC 还具有其他一些重要性质. 例如,它能把复杂的高维积分运算问题转化为一系列简单

的低维问题.

目前,在 Bayes 方法中应用最为广泛的 MCMC 方法主要有两种,一种是 Gibbs 抽样方法,另一种是 Metroplis-Hastings 方法. 如 Roberts & Smith(1993)提出了 Gibbs 抽样方法. 还有一些文献研究了 Gibbs 抽样方法和 Metroplis-Hastings 方法的结合问题,如 Gilks, Best & Tan(1995)提出一种基于 Gibbs 抽样的调整筛选 Metroplis 抽样方法. 尽管 MCMC 方法应用广泛,但很难判断何时马尔可夫链已经渐近收敛于平稳分布. 对 MCMC 方法收敛性的研究一直是一个重要课题,主要集中在两个领域. 第一个是理论上的,主要是分析马尔可夫链转移核. 例如,Polson(1994)给出了离散跳跃 Metroplis-Hastings 算法的多项式时间收敛边界,而 Rosenthal(1995)则给出了谱系模型在有限样本空间下连续情形的边界. 实践证明,这些结果在实际问题中难以应用. 因此,几乎所有的 MCMC 方面的工作都转向第二种方法,即对算法产生的样本作收敛诊断,如黎曼和收敛诊断(Riemann sum convergence diagnosis)方法等. Besag(2001),Brooks(1998),Shao & Ibrhim(1989)等从不同的角度对 Bayes 统计推断中的 MCMC 方法及相关问题进行了研究.

近些年来,国内外对 Bayes 方法的研究与应用给予了重视,但用 Bayes 方法得到的结果在应用上遇到了一些困难,虽然有 MCMC 等方法,在有些问题上还是不太方便.

1.2 参数的修正 Bayes 估计法概述

所谓**参数的修正 Bayes 估计法**,是对 Bayes 方法的修正,它包括**参数的E-Bayes 估计法**和**参数的 M-Bayes 可信限法**. 参数的 E-Bayes 估计法是在现有理论的基础上,对 Bayes 方法中参数的点估计——Bayes 估计进行修正,给出参数的 E-Bayes 估计(expected Bayesian estimation)的定义、E-Bayes 估计及其性质等. 参数的 M-Bayes 可信限法是在现有理论的基础上,对 Bayes 方法中参数的可信限——Bayes 可信限进行修正,给出参数的 M-Bayes 可信限(modified Bayesian credible limit)的定义、估计及性质等.

笔者在前期工作中,首先在**无失效数据**(zero-failure data)情形下,提出了**可靠性参数的修正 Bayes 估计法**,并对几个常见的可靠性参数(失效率、可靠度、失效概率等)提出了 E-Bayes 估计的定义、M-Bayes 可信限的定义,并给出了它们的 E-Bayes 估计及其性质、M-Bayes 可信限的估计及性质等. 笔者在吴喜之教授的指

导下完成了博士学位论文《基于无失效数据的可靠性参数估计》，其后在中国统计出版社出版（其中包括在无失效数据情形下，提出可靠性参数的修正 Bayes 估计法等. 在此作者还要感谢张尧庭教授等给予的具体指导和帮助). 后来的研究发现，在参数的修正 Bayes 估计法的理论研究和实际应用方面还有很多问题需要进一步研究，该方法不但可以用于无失效数据情形的可靠性参数估计问题，还可以用于一般情形的可靠性参数估计以及其他参数估计等问题. 需要进一步研究的问题还不少，例如，参数的修正 Bayes 估计法与已有的参数估计方法（经典方法、Bayes 方法、多层 Bayes 方法等）的关系等.

参数的修正 Bayes 估计法是在 Bayes 方法的基础上，对 Bayes 方法的框架有所突破. 参数的修正 Bayes 估计法将丰富现有的参数估计理论，并将对数学、统计学、可靠性理论和实际应用起到一定的促进作用. 参数的修正 Bayes 估计法不但可以应用于可靠性参数的估计，还可以应用于其他参数估计. 例如，作者已将参数的修正 Bayes 估计法用于证券投资预测等（韩明（2005b，2007b），Han（2007b））.

1.3 参数的 E-Bayes 估计法

本节以一个超参数和两个超参数情形为例，分别给出参数的 E-Bayes 估计的定义.

1.3.1 一个超参数情形

对于在参数 θ 的先验分布中含有一个超参数的情形，我们给出参数的 E-Bayes 估计的定义. 设 θ 为待估参数，a 是参数 θ 的先验分布中的未知参数——超参数(hyperparameter).

定义 1.3.1 对 $a \in D$，若 $\hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a)$ 是连续的，则称

$$\hat{\theta}_{\mathrm{EB}} = \int_D \hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a)\pi(a)\,\mathrm{d}a$$

是参数 θ 的 **E-Bayes 估计**(expected Bayesian estimation). 其中 $\int_D \hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a)\pi(a)\,\mathrm{d}a$ 是存在的，D 为超参数 a 取值的集合（$D \subset \mathbb{R}$，$\mathbb{R}$ 为实数集合），$\pi(a)$ 是 a 在集合 D 上的密度函数，$\hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a)$ 为 θ 的 Bayes 估计（用超参数 a 表示）.

从定义 1.3.1 可以看出，参数 θ 的 E-Bayes 估计

$$\hat{\theta}_{\mathrm{EB}} = \int_D \hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a)\pi(a)\mathrm{d}a = E[\hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a)]$$

是参数 θ 的 Bayes 估计 $\hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a)$对超参数 a 的数学期望(expectation),即 θ 的 E-Bayes 估计是 θ 的 Bayes 估计对超参数的数学期望.

1.3.2　两个超参数情形

对于在参数 θ 的先验分布中含有两个超参数的情形,我们也给出参数 θ 的 E-Bayes 估计的定义. 设 θ 为待估参数,a 和 b 是参数 θ 的先验分布中的两个超参数.

定义 1.3.2　对$(a, b) \in D$,若 $\hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a, b)$是连续的,则称

$$\hat{\theta}_{\mathrm{EB}} = \iint_D \hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a, b)\pi(a, b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b$$

是参数 θ 的 **E-Bayes 估计**. 其中$\iint_D \hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a, b)\pi(a, b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b$ 是存在的,D 为超参数 a 和 b 取值的集合($D \subset \mathbb{R}^2$),$\pi(a, b)$ 是 a 和 b 在集合 D 上的密度函数,$\hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a, b)$ 为 θ 的 Bayes 估计(用超参数 a 和 b 表示).

从定义 1.3.2 可以看出,参数 θ 的 E-Bayes 估计

$$\hat{\theta}_{\mathrm{EB}} = \iint_D \hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a, b)\pi(a, b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b = E[\hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a, b)]$$

是参数 θ 的 Bayes 估计 $\hat{\theta}_{\mathrm{B}}(a, b)$对超参数 a 和 b 的数学期望,即 θ 的 E-Bayes 估计是 θ 的 Bayes 估计对超参数的数学期望.

在以后几章中,将结合几个常见的可靠性参数(失效率、可靠度、失效概率等)给出它们的 E-Bayes 估计的定义、E-Bayes 估计及其性质,并给出模拟算例和应用实例.

1.4　参数的 M-Bayes 可信限法

本节以一个超参数情形为例,分别给出参数的单侧 M-Bayes 可信限和双侧 M-Bayes 可信限的定义.

1.4.1　单侧 M-Bayes 可信限

以下分别给出参数 θ 的单侧 M-Bayes 可信上限和单侧 M-Bayes 可信下限的

定义. 设 θ 为待估参数, a 是参数 θ 的先验分布中的超参数.

定义 1.4.1 对 $a \in D$, 若 $\hat{\theta}_{BU-\alpha}(a)$ 是连续的, 称

$$\hat{\theta}_{MBU-\alpha} = \int_D \hat{\theta}_{BU-\alpha}(a)\pi(a)\mathrm{d}a$$

是参数 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ 的**单侧 M-Bayes 可信上限**(one-sided modified Bayesian upper credible limit). 其中$\int_D \hat{\theta}_{BU-\alpha}(a)\pi(a)\mathrm{d}a$ 是存在的, D 为超参数 a 取值的集合($D \subset \mathbb{R}$), $\pi(a)$ 是 a 在集合 D 上的密度函数, $\hat{\theta}_{BU-\alpha}(a)$ 为 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的单侧 Bayes 可信上限(用超参数 a 表示).

从定义 1.4.1 可以看出, 参数 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的单侧 M-Bayes 可信上限

$$\hat{\theta}_{MBU-\alpha} = \int_D \hat{\theta}_{BU-\alpha}(a)\pi(a)\mathrm{d}a = E[\hat{\theta}_{BU-\alpha}(a)]$$

是 $\hat{\theta}_{BU-\alpha}(a)$ 对超参数 a 的数学期望, 即 θ 的单侧 M-Bayes 可信上限是 θ 的单侧 Bayes 可信上限对超参数的数学期望.

类似地, 可以给出参数 θ 的单侧 M-Bayes 可信下限的定义.

定义 1.4.2 对 $a \in D$, 若 $\hat{\theta}_{BL-\alpha}(a)$ 是连续的, 称

$$\hat{\theta}_{MBL-\alpha} = \int_D \hat{\theta}_{BL-\alpha}(a)\pi(a)\mathrm{d}a$$

是参数 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ 的**单侧 M-Bayes 可信下限**(one-sided modified Bayesian lower credible limit). 其中$\int_D \hat{\theta}_{BL-\alpha}(a)\pi(a)\mathrm{d}a$ 是存在的, D 为超参数 a 取值的集合($D \subset \mathbb{R}$), $\pi(a)$ 是 a 在集合 D 上的密度函数, $\hat{\theta}_{BL-\alpha}(a)$ 为 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的单侧 Bayes 可信下限(用超参数 a 表示).

从定义 1.4.2 可以看出, 参数 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的单侧 M-Bayes 可信下限

$$\hat{\theta}_{MBL-\alpha} = \int_D \hat{\theta}_{BL-\alpha}(a)\pi(a)\mathrm{d}a = E[\hat{\theta}_{BL-\alpha}(a)]$$

是 $\hat{\theta}_{BL-\alpha}(a)$ 对超参数 a 的数学期望, 即 θ 的单侧 M-Bayes 可信下限是 θ 的单侧 Bayes 可信下限对超参数的数学期望.

以上给出了参数 θ 的单侧 M-Bayes 可信限的定义, 类似地, 可以给出参数 θ 的双侧 M-Bayes 可信限的定义.

1.4.2 双侧 M-Bayes 可信限

以下分别给出参数 θ 的双侧 M-Bayes 可信上限和双侧 M-Bayes 可信下限的定义.设 θ 为待估参数,a 是参数 θ 的先验分布中的超参数.

定义 1.4.3 对 $a \in D$,若 $\hat{\theta}_{BU-\frac{\alpha}{2}}(a)$ 是连续的,称

$$\hat{\theta}_{MBU-\frac{\alpha}{2}} = \int_D \hat{\theta}_{BU-\frac{\alpha}{2}}(a)\pi(a)\mathrm{d}a$$

是参数 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ 的**双侧 M-Bayes 可信上限**(two-sided modified Bayesian upper credible limit).其中$\int_D \hat{\theta}_{BU-\frac{\alpha}{2}}(a)\pi(a)\mathrm{d}a$ 是存在的,D 为超参数 a 取值的集合($D \subset \mathbb{R}$),$\pi(a)$ 是 a 在集合 D 上的密度函数,$\hat{\theta}_{BU-\frac{\alpha}{2}}(a)$ 为 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的双侧 Bayes 可信上限(用超参数 a 表示).

从定义 1.4.3 可以看出,参数 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的双侧 M-Bayes 可信上限

$$\hat{\theta}_{MBU-\frac{\alpha}{2}} = \int_D \hat{\theta}_{BU-\frac{\alpha}{2}}(a)\pi(a)\mathrm{d}a = E[\hat{\theta}_{BU-\frac{\alpha}{2}}(a)]$$

是 $\hat{\theta}_{BU-\frac{\alpha}{2}}(a)$ 对超参数 a 的数学期望,即 θ 的双侧 M-Bayes 可信上限是 θ 的双侧 Bayes 可信上限对超参数的数学期望.

以上给出了参数 θ 的双侧 M-Bayes 可信上限的定义,类似地,可以给出参数 θ 的双侧 M-Bayes 可信下限的定义.

定义 1.4.4 对 $a \in D$,若 $\hat{\theta}_{BL-\frac{\alpha}{2}}(a)$ 是连续的,称

$$\hat{\theta}_{MBL-\frac{\alpha}{2}} = \int_D \hat{\theta}_{BL-\frac{\alpha}{2}}(a)\pi(a)\mathrm{d}a$$

是参数 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ 的**双侧 M-Bayes 可信下限**(two-sided modified Bayesian lower credible limit).其中$\int_D \hat{\theta}_{BL-\frac{\alpha}{2}}(a)\pi(a)\mathrm{d}a$ 是存在的,D 为超参数 a 取值的集合($D \subset \mathbb{R}$),$\pi(a)$ 是 a 在集合 D 上的密度函数,$\hat{\theta}_{BL-\frac{\alpha}{2}}(a)$ 为 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的双侧 Bayes 可信下限(用超参数 a 表示).

从定义 1.4.4 可以看出,参数 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的双侧 M-Bayes 可信下限

$$\hat{\theta}_{MBL-\frac{\alpha}{2}} = \int_D \hat{\theta}_{BL-\frac{\alpha}{2}}(a)\pi(a)\mathrm{d}a = E[\hat{\theta}_{BL-\frac{\alpha}{2}}(a)]$$

是 $\hat{\theta}_{BL-\frac{\alpha}{2}}(a)$ 对超参数 a 的数学期望,即 θ 的双侧 M-Bayes 可信下限是 θ 的双侧

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com