高职高专教育“十二五”规划教材

# 高等数学

GAODENG SHUXUE

主编　白秀琴

北京工业大学出版社

高职高专教育“十二五”规划教材

# 高等数学

主 编 白秀琴

北京工业大学出版社

## 内 容 提 要

本书是作者根据教育部最新制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，结合多年教学经验，针对目前高职高专教育现状编写的，全书内容有函数、极限与连续；导数与微分；中值定理与导数的应用；不定积分；定积分及其应用；常微分方程；向量代数与空间解析几何；多元函数微分学；重积分及曲线积分；无穷级数；数学软件包 MATLAB 7.0 应用介绍等. 书后附有初等数学常用公式；数学软件包 MATLAB 常用系统函数，供读者参考.

本书是高等职业教育和高等专科教育《高等数学》的通用教材，也可作为成人教育的函授教育高等数学课程的学生用书.

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学/白秀琴主编. —北京：北京工业大学出版社，2010.8

ISBN 978-7-5639-2464-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①白… Ⅲ. ①高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 152084 号

**高 等 数 学**

| | |
|---|---|
| **主　　编**：白秀琴 | **经销单位**：全国各地新华书店 |
| **责任编辑**：初旭新 | **开　　本**：787 mm×1 092 mm　1/16 |
| **出版发行**：北京工业大学出版社 | **印　　张**：19.25 |
| **地　　址**：北京市朝阳区平乐园 100 号 | **字　　数**：500 千字 |
| **邮政编码**：100124 | **版　　次**：2010 年 8 月第 1 版 |
| **电　　话**：010-67391106　010-67392308（传真） | **印　　次**：2010 年 8 月第 1 次印刷 |
| **电子信箱**：bgdcbsfxb@163.net | **标准书号**：ISBN 978-7-5639-2464-6 |
| **承印单位**：北京溢漾印刷有限公司 | **定　　价**：38.00 元 |

# 前　言

本教材依据教育部最新规定的“高职高专高等数学课程教学基本要求”和《教育部关于加强高职高专教育专业人才培养工作的意见》并结合煤炭行业高职高专的教育特色和实际情况编写的.

在本教材的编写过程中,重点体现以下指导思想:突出“以应用为目的,以必需、够用为度”的高等职业教育特色;遵循“突出思想分析、立足能力培养,强化动手技能,解决实际问题”的原则;在保证科学性的基础上,力求讲清概念,减少理论求证;注重培养学生的基本运算能力,解决实际问题能力以及理论联系实际能力;强调数学学科与相关学科之间的横向联系,力求做到立足实践与应用,拓宽基础知识面,使一般能力的培养与职业能力相结合,努力适应工科高职高专的教学要求.

本书由白秀琴任主编,由李瑞阁、刘义山、郭兵波任副主编,由马振伟、李晓歌、张建中、丁书召任编委,具体撰写分工如下:濮阳职业技术学院郭兵波(第一章)、南阳理工学院李瑞阁(第三、第七章)、平顶山工业职业技术学院张建中(第二章)、平顶山工业职业技术学院丁书召(第四章)、平顶山工业职业技术学院李晓歌(第五章)、平顶山工业职业技术学院白秀琴(第八、第十章)、平顶山工业职业技术学院刘义山(第十一章)、北京联合大学马振伟(第六、第九章),白秀琴负责全书的统稿工作.

在此,谨向在本书编写出版过程中,提供帮助和支持的所有同志及单位,致以衷心的感谢!

由于编者水平有限,缺点、错误在所难免,恳请专家、同行、读者批评指正.

编　者

# 目　录

# 第一章 函数、极限与连续

在自然科学、工程技术，甚至在某些社会科学中，函数都是被广泛应用的数学概念之一，其重要意义远远超出了数学范围.在数学中函数处于基础的核心地位，是贯穿数学的一条主线.高等数学是以函数为主要研究对象的一门数学课程.

## 第一节　集合与函数

### 一、集合

**1.集合**

集合是现代数学中最基本的概念，它已经渗透到现代数学的各个分支，并且渗透到小学数学教学中，集合不能用更简单的概念来定义，但可以通过例子对这个概念加以说明，例如，所有自然数的全体；一个教室里的全体学生；某矩形内所有的点等.它们都是集合.一般的，具有某种确定性质的对象的全体称为集合或简称为集，其中的对象称为集合的元素，通常用大写拉丁字母 $A,B,M$ 等表示集合，而用小写拉丁字母 $a,b,m$ 等表示集合的元素，若 $a$ 是 $A$ 的元素，则记作 $a\in A$（读作 $a$ 属于 $A$）；若 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，记作 $a\notin A$（读作 $a$ 不属于 $A$）；

一般地，集合的表示方法有两种，一种是列举法，就是按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号“{　}”括起来.

例如，12 的约数组成的集合 $A$，可表示为 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$.

例如，方程 $x^2-1=0$ 的根所组成的集合 $S$，可表示为 $S=\{-1,1\}$

还有一种是描述法，它的一般形式是

$$A=\{x\,|\,x\text{ 具有性质 }P\},$$

其中 $P$ 是关于 $x$ 的某个性质，意思是：$a\notin A$ 的充要条件是 $x$ 不满足性质 $P$.

例如，全体偶数的集合 $B$，可表示为

$$B=\{x\,|\,x=2n,\quad n\text{ 为整数}\}.$$

由某些数组成的集合称为数集，例如，全体自然数组成自然数集，常用符号 $\mathbf{N}$ 表示；全体正整数组成正整数集，常用符号 $\mathbf{N}_+$ 表示；全体整数组成整数集，常用符号 $\mathbf{Z}$ 表示；全体有理数组成有理数集，常用符号 $\mathbf{Q}$ 表示；全体实数组成实数集，常用符号 $\mathbf{R}$ 表示，等等.

如果集合 $A$ 的元素都是集合 $B$ 的元素，即若 $x\in A$，则有 $x\in B$，就说集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集，记作 $A\subset B$（读作 $A$ 包含于 $B$），或 $B\supset A$（读作 $B$ 包含 $A$）.

如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，就说集合 $A$ 与集合 $B$ 相等，记作 $A=B$.不包含任何元素的集合称为

空集,记作 $\varnothing$. 例如,集合 $\{x|x\in\mathbf{R},x^2=-1\}$ 是空集.

以后用到的集合主要是数集,即集合中的元素都是数,如果没有特别说明,以后用到的数均指实数.

**2.** 区间

高等数学中最常用的集合是区间,介于两个实数间的全体实数构成的集合称为区间. 这两个实数称为区间的端点,两端点间的距离称为区间的长度. 一般情况下有如下几种区间,如表 1-1-1 所示.

**表 1-1-1　常见区间($a,b\in\mathbf{R},\ a<b$)**

| 区间符号 | 区间 | 区间名称 | 区间定义 |
|---|---|---|---|
| $(a,b)$ | 有限 | 开区间 | $\{x\mid a<x<b\}$ |
| $[a,b]$ | | 闭区间 | $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ |
| $(a,b]$ | | 半开区间 | $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ |
| $[a,b)$ | | 半开区间 | $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ |
| $(a,+\infty)$ | 无限 | 无穷开区间 | $\{x\mid a<x<+\infty\}$ |
| $(-\infty,a)$ | | 无穷开区间 | $\{x\mid -\infty<x<a\}$ |
| $[a,+\infty)$ | | 无穷半闭区间 | $\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$ |
| $(-\infty,a]$ | | 无穷半闭区间 | $\{x\mid -\infty<x\leqslant a\}$ |
| $(-\infty,+\infty)$ | | 无穷区间 | $\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$ |

**3.** 邻域

对于任意的正数 $\delta$,开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 表示点 $x_0$ 的以 $\delta$ 为半径的邻域,简称为点 $x_0$ 的邻域,记作 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$$

当不需要邻域半径时,通常是对某个确定的邻域半径 $\delta$,常将它表示为 $U(x_0)$,并简称为点 $x_0$ 的邻域.

数集 $U(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 表示在点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域中去掉点 $x_0$,称为点 $x_0$ 的以 $\delta$ 为半径的去心邻域. 记作 $U^0(x_0,\delta)$,即

$$U^0(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

当不需要注明邻域半径 $\delta$ 时,通常是对某个确定的邻域半径 $\delta$,常将它表为 $U^0(x_0)$,简称点 $x_0$ 的去心邻域.

**二、函数的概念**

**定义 1.1**　设 $x$ 和 $y$ 是两个变量,$D$ 是 R 的非空子集,任意 $x\in D$,变量 $y$ 按照一定对应关系(如 $f$)总有唯一确定的数值与之对应(记作 $f(x)$),则称 $y$ 是 $x$ 的函数,记作 $y=f(x)$. $x$ 称为自变量,$y$ 称为因变量,$D$ 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域,数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

关于函数概念的两点说明：

(1) 函数 $y=f(x)$ 有两个因素完全确定，一个是它的定义域；另一个是它的对应关系. 也就是说定义域相同且对应关系也相同的两个函数为同一函数，而自变量和因变量采用什么符号则无关紧要，因此，函数 $y=f(x), x\in D$ 与函数 $v=f(u), u\in D$ 表示同一个函数.

(2) 根据函数的定义，函数都存在定义域，但是常常并不明确指出函数的定义域，这时认为函数的定义域是自明的，即定义域是使函数有意义的实数的集合，称为自然定义域；在实际问题中，函数的定义域是由问题的实际意义所确定的，称为实际定义域.

**例 1**　球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 $V$ 是 $r$ 的函数，$r$ 是自变量，$V$ 是因变量，函数的实际定义域是 $r\in[0,+\infty)$.

有些函数随着自变量取不同的值，对应关系也不同，这种函数称为分段函数.

下面给出几个常见的分段函数.

**例 2**　取整函数：$y=[x]$.

其中 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，即若 $n\leqslant x<n+1$，则 $[x]=n$（$n$ 为整数）. 因此

$$[x]=\begin{cases}\cdots, & \cdots,\\ -2, & -2\leqslant x<-1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ \cdots & \cdots\end{cases}$$

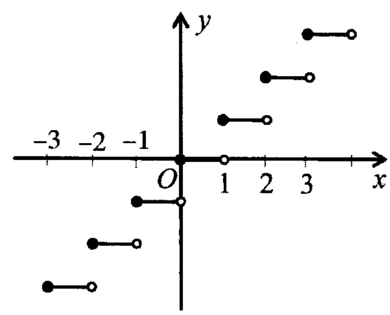

图 1-1-1

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数，如图 1-1-1 所示.

**例 3**　符号函数：$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$

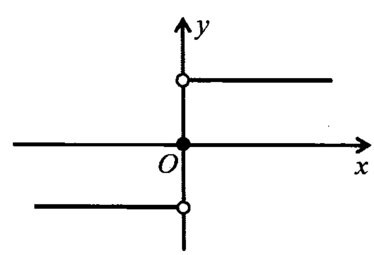

图 1-1-2

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $\{-1,0,1\}$，如图 1-1-2 所示. 有时可以运用它将某些分段函数写的简洁一些.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2}, & x\leqslant 0;\\ x\sqrt{1+x^2}, & x>0.\end{cases}$ 可以记为

$$f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{sgn} x.$$

又如，$|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x$.

这里 $\operatorname{sgn} x$ 起了符号的作用，因此称为符号函数.

**例 4**　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

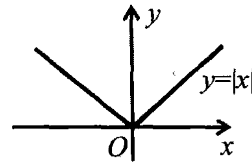


图 1-1-3

定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$. 值域是 $[0,+\infty)$，函数图形如图 1-1-3 所示.

**例 5**　狄里克雷(Dirichlet) 函数

$$y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数};\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

其定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{0,1\}$，因为数轴上有理点与无理点都是稠密的，所以它的图形不能在数轴上准确地描绘出来.

**例 6**　已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ x^2, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$$

求 $f(1)$，$f(2)$，$f(x-1)$.

**解**　根据分段函数的定义

$$f(1)=1+2=3, f(3)=3^2=9.$$

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2, & 0\leqslant x-1\leqslant 2;\\ (x-1)^2, & 2<x-1\leqslant 4.\end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}x+1, & 1\leqslant x\leqslant 3;\\ (x-1)^2, & 3<x\leqslant 5.\end{cases}$$

**三、函数的性质**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，函数有以下性质：

**1. 有界性**

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$（$I$ 可以是函数的定义域，也可以是定义域的一部分）上有定义，若存在正数 $M$，使得对任一 $x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有界. 否则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上无界.

显然，函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有界 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上既有上界又有下界 $\Leftrightarrow$ 存在闭区间 $[-M,M]$ $(M>0)$，使

$$\{f(x)\mid x\in I\}\subset[-M,M].$$

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界的几何意义是：存在两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$，函数 $y=f(x)$ 的图像位于以这两条直线为边界的带形区域之内. 如图 1-1-4 所示.

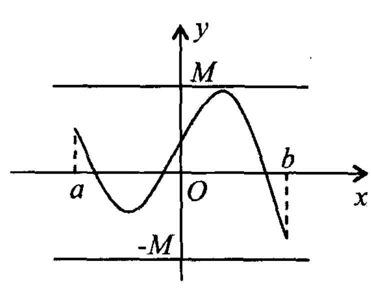


图 1-1-4

如果 $f(x)$ 在定义域 $D$ 上有界，则称 $f(x)$ 为有界函数. 例如函数 $f(x)=\sin x$ 是有界函数. 函数 $f(x)=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的，但它在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上是有界的.

**2. 单调性**

设区间 $I\subset D$，如果对 $\forall x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上单调增加(或单调减少),此时 $I$ 称为函数 $f(x)$ 的单调增(或减)区间(有时简称为增(或减)区间).

如果将上述不等式改为

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上严格增加(或严格减少).

严格增加和严格减少统称为严格单调.严格增加、严格减少、单调增加、单调减少统称为单调.增区间和减区间统称为单调区间.在区间 $I$ 上单调(严格)增加或单调(严格)减少的函数统称为区间 $I$ 上的单调函数.

从几何直观上看,区间 $I$ 上单调增加(减少)的函数,其图像自左向右是上升(下降)的.单调增加函数的图形如图 1-1-5 所示,单调减少函数的图形如图 1-1-6 所示.

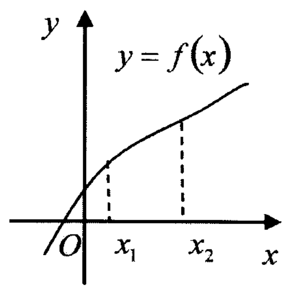


图 1-1-5

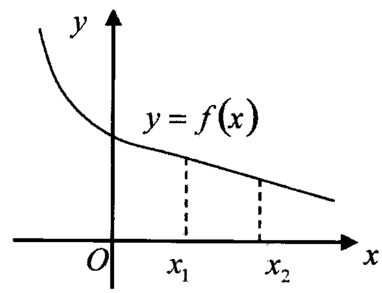


图 1-1-6

例如,函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的,在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的;在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

**3. 奇偶性**

如果对 $\forall x \in D$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数;如果对 $\forall x \in D$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

显然,奇函数和偶函数的定义域是关于原点对称的.

奇函数的图像关于原点对称,如图 1-1-7 所示;偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1-1-8 所示.

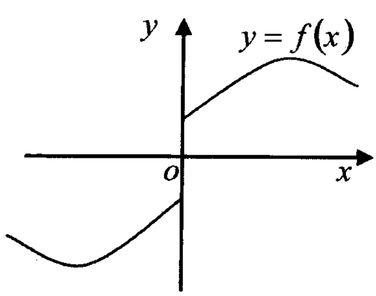


图 1-1-7

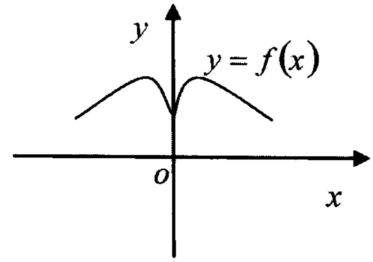


图 1-1-8

**4. 周期性**

对 $\forall x \in D$,如果存在一个正常数 $T$,有 $x \pm T \in D$,且 $f(x \pm T) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,$T$ 称为函数 $f(x)$ 的一个周期.

若 $T$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期,显然,$nT$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期,若函数 $f(x)$

有最小正周期，通常将这个最小正周期称为函数 $f(x)$ 的基本周期，简称为周期.

描绘周期函数的图像时，只要在一个周期长的区间上描绘出函数的图像，然后将此图像一个周期一个周期向左、右平移，就得到了整个周期函数的图像.

**例 7** 讨论函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的特性.

**解** 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(1) 任意 $x\in\mathbf{R}$，$\left|\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|<\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-f(x)$；

(3) $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}=\frac{2(e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}>0.$$

因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界的、单调增加的奇函数，并由单调性得到 $f(x)$ 不具有周期性.

## 四、反函数与复合函数

### 1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，值域为 $A$，则对 $\forall x\in D$，按照对应关系 $f$，对应唯一一个 $y\in A$. 反之，对 $\forall y\in A$，能否对应唯一一个 $x\in D$，使 $y=f(x)$ 成立呢?这就是我们要讨论的问题.

若对 $\forall x_1,x_2\in D$，且 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$（$\Leftrightarrow$ 当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，有 $x_1=x_2$），则称函数 $y=f(x)$ 是 $D$ 与 $A$ 间的一一对应. 如表 1-1-2 所示.

**表 1-1-2 函数的对应关系**

| | |
|---|---|
| $y=f(x)$ 是 $D$ 与 $A$ 间的一一对应 | $\forall x_1,x_2\in D,x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ |
| $y=f(x)$ 是 $D$ 与 $A$ 间的非一一对应 | $\exists x_1,x_2\in D,x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ |

一般来说，函数 $y=f(x)$ 在定义域 $D$ 与其值域 $A$ 间是非一一对应的. 但也存在这样的函数 $y=f(x)$，它在定义域的某个子集 $I$ 与其对应的值域 $f(I)$ 间是一一对应的.

**定义 1.2** 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，$I\subset D$. 当 $x\in I$ 时，$y\in f(I)$. 如果 $y=f(x)$ 是 $I$ 与 $f(I)$ 间的一一对应，于是，对 $\forall y\in f(I)$，对应唯一一个 $x\in I$，使 $f(x)=y$，即在 $f(I)$ 上定义了一个函数，则称此函数是函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),y\in f(I).$$

如函数 $y=x^2$ 的定义域是 $D=\mathbf{R}$，值域是 $A=[0,+\infty)$，它在整个定义域上没有反函数. 但当 $x\in I=[0,+\infty)\subset D$ 或 $x\in I=(-\infty,0]\subset D$ 时，$y=x^2(y\in f(I)=[0,+\infty))$ 分别有反函数 $x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$，它们的定义域都是 $f(I)=[0,+\infty)$，而值域分别是 $I=[0,+\infty)$ 和 $I=(-\infty,0]$.

显然，如果 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，即它们互为反函数. 并且，如果函数 $y=f(x)$ 在定义域 $D$ 上存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域 $A$ 和定义域 $D$. 于是有

$$f^{-1}[f(x)]\equiv x,\qquad x\in D\ ;$$

$$f[f^{-1}(y)]\equiv y,\qquad y\in A.$$

如函数 $y=x^3$ 在它的定义域 $\mathbf{R}$ 上存在反函数 $x=\sqrt[3]{y}$，$x=\sqrt[3]{y}$ 的定义域是 $y=x^3$ 的值域 $\mathbf{R}$，而值域是 $y=x^3$ 的定义域 $\mathbf{R}$.

不加证明地给出反函数存在的充分条件：严格单调函数必存在反函数.

函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$，$y$ 是自变量. 但习惯上用 $x$ 表示自变量，因此将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 $x$ 与 $y$ 对调，改写为 $y=f^{-1}(x)$. 例如函数 $y=3x-2$ 的反函数是 $x=\dfrac{y+2}{3}$，要改写为 $y=\dfrac{x+2}{3}$. 一般所说的反函数都是指改写后的函数.

但要注意：函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像，在坐标平面上是同一点集. 当把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 $x$ 与 $y$ 对调后，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像就不同了，而是关于直线 $y=x$ 对称.

**2. 复合函数**

由两个或两个以上的函数用所谓“中间变量”传递的方法能生成新的函数. 例如函数

$$z=\ln y \text{ 与 } y=x-1,$$

由“中间变量”$y$ 的传递生成新函数

$$z=\ln(x-1).$$

在这里，$z$ 是 $y$ 的函数，又 $y$ 是 $x$ 的函数. 于是，通过中间变量 $y$ 的传递得到 $z$ 是 $x$ 的函数. 为了使函数 $z=\ln y$ 有意义，必须要求 $y>0$，为了使函数 $y=x-1>0$，必须要求 $x>1$. 仅对函数 $y=x-1$ 来说，$x$ 可取任意实数，但是，对生成的新函数 $z=\ln(x-1)$来说，必须要求 $x>1$.

**定义 1.3**　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $U$，而 $u=\phi(x)$ 的定义域为 $X$，$D=\{x\in X\,|\,\phi(x)\in U\}\neq\phi$，则对任意的 $x\in D$，通过 $u=\phi(x)$，变量 $y$ 有确定的值 $f(u)$ 与之对应，于是得到一个以 $x$ 为自变量、$y$ 为因变量的函数，该函数称为 $y=f(u)$ 和 $u=\phi(x)$ 的复合函数. 记作 $y=f[\phi(x)]$，$D$ 是它的定义域，$u$ 称为中间变量.

如自由落体运动的物体，其动能 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$，速度 $v=gt$，它们的复合函数 $E=\dfrac{1}{2}mg^2t^2$.

如函数 $z=\sqrt{y}$ 的定义域是区间$[0,+\infty)$，函数 $y=(x-1)(2-x)$的定义域是 $\mathbf{R}$，为了使其生成复合函数，必须要求

$$y=(x-1)(2-x)\geqslant 0,\ \text{即}\ 1\leqslant x\leqslant 2.$$

于是，$\forall x\in[1,2]$，函数 $y=(x-1)(2-x)$与 $z=\sqrt{y}$ 生成了复合函数

$$z=\sqrt{(x-1)(2-x)}.$$

以上是两个函数生成的复合函数. 不难将复合函数概念推广到有限个函数生成的复合函数. 例如，三个函数

$$u=\sqrt{z},\ z=\ln y,\ y=2x+3,$$

生成的复合函数是

$$u=\sqrt{\ln(2x+3)},\quad x\in[-1,+\infty).$$

不仅能将若干个“简单函数”生成为复合函数，而且还要善于将复合函数“分解”为若干个简单函数. 例如函数

$$y=\tan^5\sqrt[3]{\lg\arcsin x}$$

是有五个简单函数 $y=u^5$，$u=\tan v$，$v=\sqrt[3]{\bar\omega}$，$\bar\omega=\lg t$，$t=\arcsin x$ 所生成的复合函数.

**例 8** 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, x\geqslant 0\\ 2-x, x<0\end{cases}$ 求 $f[f(3)]$.

**解** $f[f(3)]=f[1-3]=f(-2)=2-(-2)=4$.

**例 9** 设函数 $f(x)=x^3, \phi(x)=\sin\sqrt{x}$,求 $f[\phi(x)], \phi[f(x)]$.

**解** 由 $f(x), \phi(x)$ 的表达式,

$f[\phi(x)]=[\phi(x)]^3=\sin^3\sqrt{x}$;$\phi[f(x)]=\sin\sqrt{f(x)}=\sin(x^{\frac{3}{2}})$.

**例 10** 已知 $y=\ln u, u=4-v^2, v=\cos x$,将 $y$ 表示成 $x$ 的函数.

**解** $y=\ln(4-v^2)=\ln(4-\cos^2 x)$.

**例 11** 分别指出函数 $y=\sin 5x, y=e^{\cos\frac{1}{x}}$ 是由哪些简单函数复合而成的.

**解** $y=\sin 5x$ 是由 $y=\sin u, u=5x$ 复合而成的;

$y=e^{\cos\frac{1}{x}}$ 是由 $y=e^u, u=\cos v, v=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ 复合而成的.

**五、初等函数**

在数学的发展过程中,形成了以下六类最简单最常用的函数,即

(1) 常数函数:$y=C$ ($C$ 是常数).

(2) 幂函数:$y=x^\alpha$($\alpha$ 是任意实数).

(3) 指数函数:$y=a^x$, $(a>0, a\neq 1.)$.

(4) 对数函数:$y=\log_a x$, $(a>0, a\neq 1.)$.

(5) 三角函数:

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\tan x,$$
$$y=\cot x,\quad y=\sec x,\quad y=\csc x.$$

(6) 反三角函数:

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\arctan x,$$
$$y=\operatorname{arccot} x,\quad y=\operatorname{arcsec} x,\quad y=\operatorname{arccsc} x.$$

这六类函数称为基本初等函数,现将它们的性质简述如下:

**1. 常数函数**

常数函数 $y=C$ ( $C$ 是常数) 的定义域是$(-\infty,+\infty)$ 图形是通过点$(0,C)$,且平行于 $x$ 轴的直线,如图 1-1-9 所示.

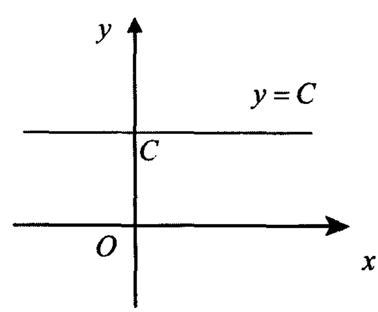


图 1-1-9

常数函数是有界函数,且是一个不存在最小正周期的周期函数,它既是单调增加函数又是单调减少函数,特别的,当 $C=0$ 时,它还是奇函数.

**2. 幂函数**

幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域及其性质与 $\alpha$ 的取值有关,但任意 $\alpha\in\mathbf{R}$, $x^\alpha$ 在$(0,+\infty)$ 内都有意义. 为了便于比较,只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形,而 $x<0$ 时的情形可根据函数的奇偶性确定.

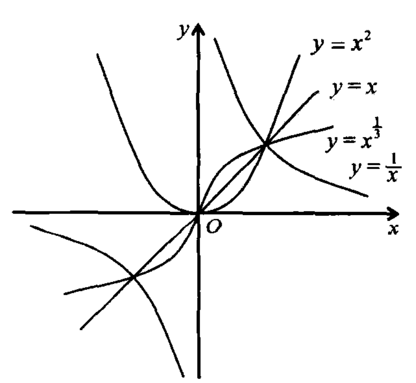


图 1-1-10

当 $\alpha>0$ 时,函数的图像通过原点$(0,0)$和点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调增加且无界;

当 $\alpha<0$ 时,图像不过原点,但仍过点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调减少、无界,曲线以坐标轴为渐近线. 图 1-1-10 中画出了

$\alpha=\pm1,\alpha=2,\alpha=\dfrac{1}{3}$的情形.

**3. 指数函数**

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$，其定义域为 **R**，由于无论 $x$ 取何值，总有 $a^x>0$ 且 $a^0=1$，所以它的图像全部在 $x$ 轴上方，且通过点(0,1). 也就是说它的值域是$(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 $x$ 轴负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 $x$ 轴正半轴为渐近线，如图 1-1-11 所示.

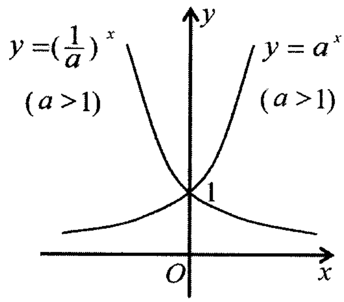


图 1-1-11

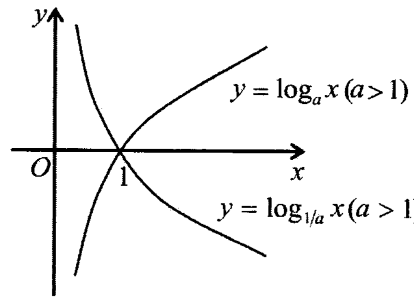


图 1-1-12

**4. 对数函数**

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$，其定义域为$(0,+\infty)$，图像全部在 $y$ 轴右方，值域是 **R.** 无论 $a$ 取何值，曲线都通过点(1,0).

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 $y$ 轴负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 $y$ 轴正半轴为渐近线. 如图 1-1-12 所示.

对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

**5. 三角函数**

(1)正弦函数 $y=\sin x$. 其定义域为 **R**，值域为$[-1,1]$，奇函数，以 $2\pi$ 为周期，有界. 如图 1-1-13 所示.

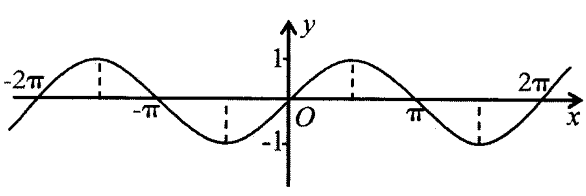


图 1-1-13

(2)余弦函数 $y=\cos x$. 其定义域为 **R**，值域为$[-1,1]$，偶函数，以 $2\pi$ 为周期，有界. 如图 1-1-14 所示.

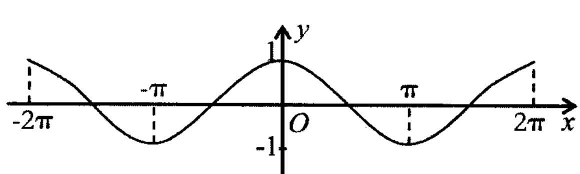


图 1-1-14

(3)正切函数 $y=\tan x$. 其定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $\mathbf{R}$，奇函数，以 $\pi$ 为周期，在每一个周期内单调增加，以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathrm{Z})$ 为渐近线. 如图 1-1-15 所示.

(4)余切函数 $y=\cot x$. 其定义域为 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $\mathbf{R}$，奇函数，以 $\pi$ 为周期，在每一个周期内单调减少，以直线 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线. 如图 1-1-16.

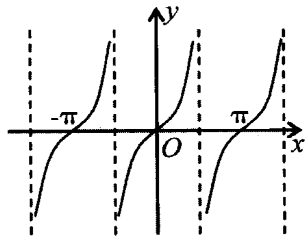


图 1-1-15

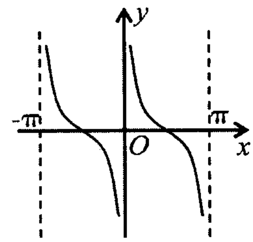


图 1-1-16

**6. 反三角函数**

常用的反三角函数有四个：

(1)反正弦函数 $y=\arcsin x$. 是正弦函数 $y=\sin x$ 在单调区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的反函数，因此称作反正弦函数，其定义域是$[-1,1]$，值域是$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，奇函数，单调增加，有界. 如图 1-1-17 所示.

(2)反余弦函数 $y=\mathrm{arc}\cos x$. 是余弦函数 $y=\cos x$ 在单调区间$[0,\pi]$上的反函数，因此称作反余弦函数，其定义域是$[-1,1]$，值域是$[0,\pi]$，单调减少，有界. 如图 1-1-18 所示.

(3)反正切函数 $y=\arctan x$. 是正切函数 $y=\tan x$ 在单调区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内的反函数，因此称作反正切函数，其定义域是 $\mathbf{R}$，值域是$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，奇函数，单调增加，有界. 如图 1-1-19 所示.

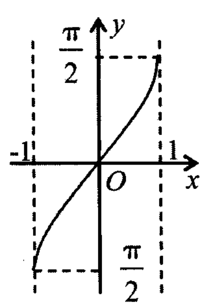


图 1-1-17

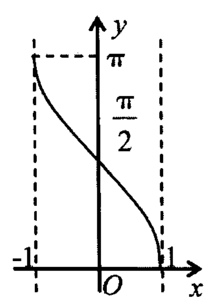


图 1-1-18

(4)反余切函数是余切函数 $y=\cot x$ 在单调区间$(0,\pi)$内的反函数，因此称作反余切函数，其定义域是 $\mathbf{R}$，值域是$(0,\pi)$，单调减少，有界. 如图 1-1-20 所示.

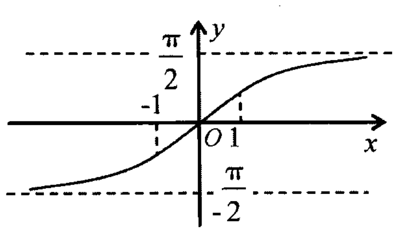


图 1-1-19

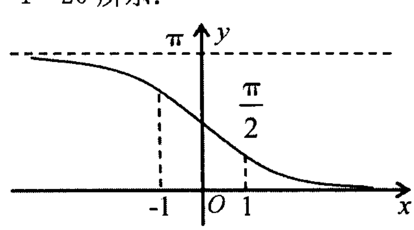


图 1-1-20

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算而产生的且能用一个数学式子表示的一切函数，通称为初等函数.

例如，$y=2x^2-1$，$y=\sin\frac{1}{x}$，$y=|x|=\sqrt{x^2}$等都是初等函数.高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数.但是，狄里克雷函数、符号函数、取整函数等都不是初等函数.

## 习题　1-1

1.用区间表示适合下列不等式的 $x$ 的范围；

(1) $|x|<3$；　(2) $0<|x-2|<4$；

(3) $|x-1|<|x+1|$；　(4) $|x+1|\geqslant 2$.

2.下列各组函数相同吗？

(1) $f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$；　(2) $f(x)=x$，　$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$，　$g(x)=x-1$；　(4) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$，　$g(x)=\sin x$.

(5) $f(x)=3x+1$，　$g(t)=3t+1$.

3.求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x-x^2}$；　(2) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；

(3) $y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+\lg(5-x)$；　(4) $y=\frac{1}{\lg(x+1)}$.

4.设函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<0;\\ 2, & 0\leqslant x<1;\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

求 $f(3)$，$f(2)$，$f(0)$及 $f(-0.5)$.

5.设 $f(x)=x^2$；　$g(x)=2^x$；　求　$f(g(x))$，　$g(f(x))$.

6.下列函数是否具有奇偶性：

(1) $y=(1-x)^{\frac{2}{3}}(1+x)^{\frac{2}{3}}$；　(2) $y=x(x-1)(x+1)$；

(3) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$；　(4) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

7.判断下列函数哪个是周期函数，若有最小正周期，并指出最小的正周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=1+\sin(\pi x)$.

8.指出下列函数在指定区间的反函数及其定义域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,0]$；　(2) $y=\ln(2x+1)$，$x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

9.证明：若 $f(x)$与 $g(x)$都是奇函数，则 $f(g(x))$与 $g(f(x))$都是奇函数.