中学数学

DAISHUJIETIYINDAO

代数解题引导

湖北教育出版社

代数解题引导

汤　挥　陈传理　等编

陈森林　江仁俊　等审

湖 北 教 育 出 版 社

代数解题引导
杨　挥　陈传理等编
陈森林　江仁俊等审
*
湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行
宜昌市新华印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本　16.625印张　356,000字
1984年1月第1版　1984年1月第1次印刷
印数：1—80,500
统一书号：7306·54　定价：1.33元

出版说明

一九七九年，湖北人民出版社约请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了《代数解题引导》、《初等几何解题引导》、《三角解题引导》、《解析几何解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》，并于一九八〇年至一九八二年先后出版。为满足读者的需要，现稍作修改，以湖北教育出版社名义出版。

希望这套书和广大读者见面以后，能听到来自读者的热情的批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善。

一九八三年十二月

目　录

第一章　实数与复数

§1. 实　　数

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

通称为自然数或正整数．正整数、零、负整数统称为整数．

凡大于 0 的数(实数)叫正数；小于 0 的数(实数)叫负数．

设 P，q 各为整数，当 $q\neq 0$ 时，凡能以 $\dfrac{P}{q}$ 表示的数称为分数或有理数．当 $q=1$ 时，显然分母为 1 的分数是整数．因此整数是分数的特例．可见整数集是有理数集的子集．就是说有理数集包含整数集．

通常，称无限不循环小数为无理数，如：

$$\pi=3.14159265\cdots;$$
$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots;$$
$$\sqrt{3}=1.73205080\cdots;$$
$$\sqrt{5}=2.23606797\cdots;$$
$$e=2.718281828459\cdots$$

等等，都是无理数．但，这里有一个问题，怎么知道这些数是无限不循环的小数呢？这却是难以直接回答的．因此后来又以：凡数轴上由非有理点所对应的数定义为无理数．如 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ 等等，就是根据这一定义来论断的．

由此可见，在数集中不存在既是有理数又是无理数的数．

用集论的话说：有理数集与无理数集的交是空集．而有理数集与无理数集的并称为实数集．用通俗的话说：有理数、无理数统称为实数．

值得注意的是，至今还有按下表列写数系的：

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\end{cases}
$$

严格地说，在有理数部分，这样列写是不恰当的．因为正有理数就是正分数，正整数集是正分数集的子集．为此，建议改正成：

$$
\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{一般正分数}\end{cases}
$$

即把正整数作为特殊的正分数．同理，负有理数部分也是如此．

实数集具有：

性质 1　实数和数轴上的点一一对应．

由于直线上的点是连续排列的，既然实数集的数和数轴上的点一一对应，故实数构成连续统．

性质 2　实数满足加法、乘法基本运算律．且对实数施行除法（除数不为零外）的四则运算结果仍是实数．

因此，又称实数集为实数域．

性质 3　实数集中任两元素间存在着顺序关系，且满足基本顺序律．

性质 4　实数集满足比较性质．

因此，实数是可以比较大小的.

当 x 是实数时，x 的绝对值记作 $|x|$，且

$$|x|=\begin{cases} x, & 当\ x\geqslant 0; \\ -x, & 当\ x<0. \end{cases}$$

如 a 为正实数时，$|x|\leqslant a$ 是指：

当 $x\geqslant 0$ 时，$x\leqslant a$；

当 $x<0$ 时，$-x\leqslant a$，即 $x\geqslant -a$.

概括这两式，常记作

$$-a\leqslant x\leqslant a.$$

这即表示满足下列不等式组

$$\begin{cases} x\leqslant a \\ x\geqslant -a \end{cases}$$

的实数的全体.

此外，由于实数的平方不小于零，因此，若 x，y 都是实数时，常以

$$x^2+y^2=0$$

表示 $x=0$，$y=0$. 又以

$$x^2+y^2\neq 0$$

表示 x，y 不全为 0 .

如果一个数的 n 次幂等于 a，则这个数叫做 a 的 n 次方根. 如

$$x^4=16$$

即 $$x^4-2^4=(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)=0$$

在复数范围内，2，-2，$2i$，$-2i$ 都称为 16 的 4 次方根；在实数范围内，只有 2 和 -2 才是 16 的 4 次方根；而在零和正实数的范围内，则只有 2 才是 16 的 4 次方根. 并称 2

是 16 的四次算术根.

一般说来，在零和正实数的范围内，无论 n 是奇次还是偶次，对于这范围内的 a 都只有一个 n 次方根. 常称此为算术根，并记作 $\sqrt[n]{a}$. 如 $\sqrt[4]{16}\neq-2$，$\sqrt[4]{16}\neq 2i$，$\sqrt[4]{16}\neq-2i$，$\sqrt[4]{16}=2$. 因为只有 2 才是 16 的算术根。

在实数范围内，正实数 a 的偶次方根有两个，它们是互为相反的数，分别记作 $\sqrt[n]{a}$、$-\sqrt[n]{a}$. 如实数范围内，16 的 4 次方根为 $\sqrt[4]{16}=2$ 和 $-\sqrt[4]{16}=-2$. 这里应注意 $\sqrt[4]{16}$ 始终表示算术根. 而负实数在实数范围内不存在算术根. 零的奇次或偶次方根都是零. 正实数 a 的奇次方根只一个 $\sqrt[n]{a}$. 负实数 $-a$ 的奇次方根也只有一个，即 $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$.

本节的例题，将牵涉绝对值，算术根，与常见的实数问题. 关于绝对值、算术根是初学者所应特别注意的.

例 1 设实数 $m\neq n$，试指出下式错在哪里.

$$m^2-2mn+n^2=n^2-2nm+m^2$$

$$(m-n)^2=(n-m)^2$$

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2}$$

$$m-n=n-m$$

$$2m=2n$$

$$\therefore\quad m=n.$$

分析 主要错误，在于第三个等式到第四个等式这一步. 因为就 $m>n$ 时，由

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2},$$

依算术根为

$$m-n=m-n.$$

另外，由第二个等式到第三个等式这一步，是不完全的.

应该是：

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2},$$

及 $$\sqrt{(m-n)^2}=-\sqrt{(n-m)^2}.$$

(其中包括 $-\sqrt{(m-n)^2}=-\sqrt{(n-m)^2}$；$-\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2}$)

例 2 若 x，y 都是实数，试述下列各式的变化范围：(其中 a 是正常数)

① $|x|\leqslant a$；$|y|\leqslant a$.

② $\begin{cases}|x|\leqslant a\\ |y|\leqslant a.\end{cases}$

③ $|x+y|\leqslant a$.

④ $|x|+|y|\leqslant a$.

分析 绝对值不等式 $|x|\leqslant a$ 与

$$-a\leqslant x\leqslant a \text{ 或 } \begin{cases}x\leqslant a\\ x\geqslant -a\end{cases}$$

等价．在数轴上表示为包括点 a 与点 $-a$ 及其间实数点的全体．在数平面上则表示为包括边界 $x=a$ 及 $x=-a$ 的带形区域．(想一想，为什么)

解答 ① 的变化范围，如图 1—1，1—2 阴影部分．

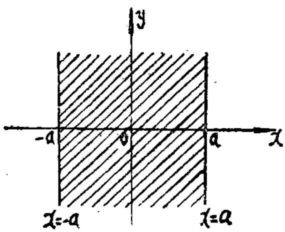

图 1—1

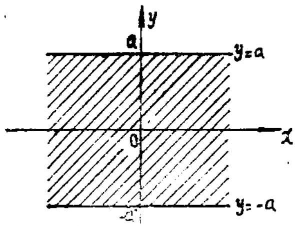

图 1—2

② 的变化范围，为$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant a$的公共部分(交)。如图 1—3.

③ 的变化范围，为

$$\begin{cases}x+y\leqslant a\\x+y\geqslant -a\end{cases}$$

其中，$y\leqslant -x+a$表示包括边界$y=-x+a$的下半平面；$y\geqslant -x-a$表示包括边界$y=-x-a$的上半平面. 而

$$\begin{cases}x+y\leqslant a\\x+y\geqslant -a\end{cases}$$

则表示上述两个半平面的交（一斜带形区域）. 如图 1—4.

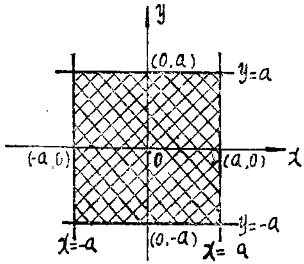

图 1—3

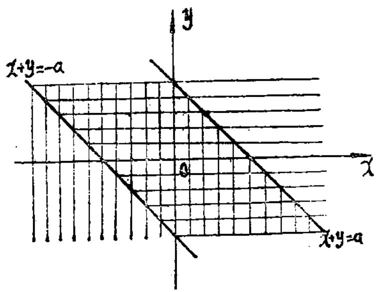

图 1—4

④ 的变化范围为满足不等式方程组

$$\begin{cases}x+y\leqslant a\\x+y\geqslant -a\\x-y\leqslant a\\x-y\geqslant -a\end{cases}$$

(x, y) 的全体. 即如图1—5，四个半平面的交（且包括边界）.

例 3 试证 $\sqrt{3}$ 为无理数.

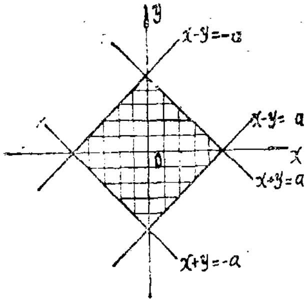

图 1—5

分析 要证 $\sqrt{3}$ 为无理数，即要证明$\sqrt{3}$为数轴上非有理点所对应的一个数. 这就需先证明$\sqrt{3}$不是有理数.

采用反证法，从既约分数入手，通过一系列恒等变换，若得一未约分数，则矛盾可证.

具体说来，若 m，n 为整数，设 $\sqrt{3}=\dfrac{n}{m}$ 为既约分数，则 $3m^2=n^2$，说明 n^2 是 3 的倍数，而 n 又能否被 3 整除呢？这就需要考虑一个性质：

若一整数平方为 3 所整除，则该数必为 3 所整除. 要证明这一性质，又牵涉到一个反命题：

若一整数不能被 3 整除，则它的平方也不被 3 整除. 事实上对 3 说来，把整数分为三类，即

$$3K;\ 3K+1;\ 3K+2,\ (K=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

其中 $3K+1$，$3K+2$ 为不能被 3 的整除类，且

$$(3K+1)^2=9K^2+6K+1=3(3K^2+2K)+1$$

$$(3K+2)^2=(3K+3-1)^2=3[3(K+1)^2-2(K+1)]+1$$

仍是不能为 3 所整除类. 于是该命题得证.

另一方面，关于上一性质，已知一整数平方为 3 所整除，则由后一命题得知，该数的平方，也不能为 3 所整除. 于是

发生矛盾，该性质得证.

证明 设既约分数平方等于3，即

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2=3,\ n^2=3m^2 \qquad (*)$$

可见，依分析中的前一性质，n 必被 3 整除，即 $n=3p$. 以此代入（*）式得

$$(3p)^2=3m^2,$$

即 $$m^2=3p^2。$$

可见，m 又被 3 所整除. 于是 n 与 m 有公约数 3，这与所设既约分数矛盾. 由此 $\sqrt{3}\neq\frac{n}{m}$，即 $\sqrt{3}$ 是非有理数.

而 $\sqrt{3}$ 在数轴上有确定的位置，故 $\sqrt{3}$ 为非有理点所对应的数，即无理数。

注 上述论证，虽较冗长，但，是严格的.

通常论证 $\sqrt{2}$ 为无理数，皆取同一手法. 读者不妨就此试证 $\sqrt{5}$ 为无理数.

例 4 在 $S=\frac{ax+b}{cx+d}$ 中，a、b、c、d 是有理数，且 $c\neq0$，x 是无理数，试证：

① 若 $bc=ad$，则 S 为有理数；

② 若 $bc\neq ad$，则 S 为无理数.

证明 ① 因 $c\neq0$ 及 $bc=ad$，故有

$$S=\frac{c(ax+b)}{c(cx+d)}=\frac{a(cx+d)}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}$$

由于 a、c 是有理数，故 $S=\frac{a}{c}$ 是有理数.

② 因 $c\neq0$ 及 $bc\neq ad$ 即 $bc-ad\neq0$.

$$S=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

其中$\frac{a}{c}$是有理数，但$\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$是无理数，而有理数与无理数之和是无理数.

例 5 设 x、y 为有理数，且 $(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$，求 x、y 的值.

解一 由$(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$得

$$x^2+2y^2-2xy\sqrt{2}=9-4\sqrt{2},$$

而 x、y 是有理数，比较等式两边得

$$\begin{cases} x^2+2y^2=9 & (1) \\ 2xy=4 & (2) \end{cases}$$

解这个方程组得

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases} \quad 或 \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-2. \end{cases}$$

解二 由$(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$得

$$(x-y\sqrt{2})=\pm\sqrt{9-4\sqrt{2}}$$

即 $$x-y\sqrt{2}=\pm(2\sqrt{2}-1)$$

而 x、y 为有理数，比较等式两边，得

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases} \quad 或 \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-2. \end{cases}$$

例 6 设 a 是任意实数，化简：

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}.$$

解 由于

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & （当 a\geqslant 0 时） \\ -a & （当 a<0 时）; \end{cases}$$

$$\sqrt{(1-a)^2}=|1-a|=\begin{cases}1-a & （当 a\leqslant 1 时）\\ a-1 & （当 a>1 时）.\end{cases}$$

故 $$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}=|a|+|1-a|$$

$$=\begin{cases}2a-1 & （当 a\geqslant 1）\\ 1 & （当 0\leqslant a<1）\\ 1-2a & （当 a<0）.\end{cases}$$

注 如果认为 $\sqrt{(a-b)^2}=a-b$ 则是错误的，请读者特别注意.

§2. 复　　数

当 a，b，c 都是实数，解 $az^2+bz+c=0$ 形式的二次方程时，则它的根将是 $x+y\sqrt{-1}$ 形式的数，其中 x 与 y 都是实数，这样的数称为复数．当 $y=0$ 时复数退化为实数，因此实数是复数的特例．当 $x=0$，$y\neq 0$ 时它就成为纯虚数．通常称 x 为实部，y 为虚部．记 $\sqrt{-1}=i$，则 $x+yi$ 称为复数的代数表示．此外也有用坐标形式 (x, y) 表示复数的．后者如同实数和数轴的关系一样，这里发展成复数与数平面相对应.

当且仅当 $x=y=0$ 时，称此复数为零，并记作 0 或 $(0, 0)$．关于这一点，初学者应认真识别．正如数轴上的原点与数平面的原点是有区别的.

若 $x_m+y_mi=x_n+y_ni$ 或 $(x_m, y_m)=(x_n, y_n)$，则它们的实部与虚部分别相等．即

$$x_m=x_n,\quad y_m=y_n.$$

复数相等与复数为零的概念，在计算与解题时是经常要遇到的.

关于复数在各种表示形式之下的加、减、乘、除、乘方、开方、棣莫佛公式及互换关系有如下表. 并且不难验明复数的加法与乘法运算，有如实数一样遵循算术的五个法则. 即符合加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律，及乘法对加法的分配律.（见下表）

除除数不能为零复数外，复数之间进行有限次四则的结果仍是复数. 因此复数四则的结果是自封的.

尽管实数可比较大小，但复数一般是不可比较大小的.

本节将仅就复数的基本运算举例. 这里复数为零与相等的概念是经常发挥作用的.

例 1 当 x、y 为什么实数值时，下列等式成立?

$$\frac{x+1+(y-3)i}{5+3i}=1+i.$$

解 消去分母，我们得到

$$x+1+(y-3)i=2+8i.$$

依两个复数相等的定义有:

$$\begin{cases}x+1=2,\\ y-3=8.\end{cases}$$

$\therefore\quad x=1,\ y=11.$

例 2 从下列关系求 x，y 的实数值.

$$(x+y)^2i-\frac{6}{i}-x=-y+5i(x+y)-1.$$

解 两边乘以 $-i$，我们得到

$$[(x+y)^2+6]+xi=5(x+y)+(y+1)i,$$

根据复数相等的定义，得

$$\begin{cases}(x+y)^2+6=5(x+y),\\ x=y+1.\end{cases}$$