數學研究小叢書

會計數學入門

余介石
余子颺 著

謝 霖 校

中華書局印行

數學研究小叢書

會計數學入門

撰述者： 余介石
（金陵女子文理學院教育部數學講座）

余子颺
（國立禮樂館會計主任）

主編者： 中等算學研究會

校閱者： 謝霖
（光華大學校長）

中華書局印行

民國三十五年二月發行
民國三十五年二月初版

數學研究小叢書 會計數學入門（全一冊）

◎定價國幣一元四角
（郵運匯費另加）

著者 余介石 余子颺
校者 謝霖
發行人 中華書局有限公司代表 姚戟楣
印刷者 上海澳門路四六九號 中華書局永寧印刷廠
發行處 各埠中華書局

（一三〇四三）（滬印）

$2.40

謝霖甫先生序

會計之道首重算學，盡人皆知。算學之書籍，繁者多而簡者少，讀者有時苦之。余介石先生，為適於實用，或備應試起見，編成會計數學入門一種，印刷流通，以為南針，爰述數語，為介紹焉。

謝霖

民國三十二年三月

發刊旨趣

本叢書取材，或切實用，或備應試，要皆不踰中等數學範圍，求便於中學生之課外閱讀，及一般人士之公餘瀏覽也。方今萬事艱辛，編印固難，購讀亦復非易，故篇幅務簡，內容務精，以期書價抑低，披閱稱便，或亦物資與精力節約之一道。各書編述，非出一手，體裁出入，自所不免。然本會有一貫計劃以聯繫之，并請專家分別校訂，以求充實正確。旨趣如此，能力所限，雖不能至，心嚮往之，則無時或已。方家大雅，幸有以教之。

此册從淺顯處，論投資所需之會計數學，已習初中代數及半者，卽能閱讀。是科專著，如劉覺民之實用投資數學(中華)如褚鳳儀之投資數學及李鴻壽之會計數學(商務)，或切實用，或務宏博，要皆善本。然卷帙繁重，初學力所不逮。本册則精選主要問題，作具體透澈之研討。由是入門，得見宮室之美，編述者始願爲不虛矣。

民國三十二年雙十節　編者識

會計數學入門

目　次

附　表

會計數學入門

一　緒論

1.範圍

「會計」一詞，始見於孟子，萬章篇有『會計當而已矣』一語。焦循正義釋之曰『零星算之爲計，總合算之爲會』。今世取以譯英語Accounting，蓋指貨財之管理與稽核也。故就廣義言之，舉凡企業所涉之計算，皆會計數學之範圍，故亦曰投資數學（Mathematics of Investment）。其所引用之數學，大抵爲下列諸端：

（一）複名數（Denominate Numbers）　如貨品之計量，貨幣之換算。

（二）百分法　如損益，折扣，租稅，運輸等方面問題，無一非百分法之應用。

（三）利息　原係百分法之一目，但在會計數學內，佔主要之地位。且複利涉及指數，非復百分法所能限。

（四）級數　會計數學所用之級數，雖僅有等比級數（Geometric Series）一種，然一切基本問題，莫不恃此。年金（Annuity）一事，實其中心觀念，是卽由複利爲項所構成之等比級數也。

（五）機率（Probability）　機率乃一種特殊之比率，卽論一事成敗之可能性者也。社會科學，生物科學所用之主要數

理爲統計學（Statistics），機率即此科之生命也。會計數學中需用機率之處在保險（Insurance）方面。

（六）統計　商業統計所注重之特題爲商業循環（Business Cycle），操奇計贏者之指針也。

又會計數學，重數字之計算，故以對數（Logarithm）爲重要工具。然僅有此尙病未盡便利之能事，故對主要諸式如複利終値（Final Value），現値（Present Value），年金終値，現値等，莫不特製成數値表以供運用。

循此以論，不特過駁雜，抑亦太廣泛，故普通皆分爲四部。

（I）商業算術　包括（一）（二）及單利之實際計算各法。

（II）會計數學　以複利及年金爲主，旁及其各方面之應用，如分期淸償，資產估價，折舊，債劵等問題。

（III）保險數學　即加機率因素於年金所生之問題，可以人壽保險爲代表。其主要事項爲生命年金（Life Annuity）。此雖爲一專科，但一般會計數學，亦多附論及之。

（IV）商業統計　討論統計主要法則，而側重商業上之應用。

本書內容從狹義，其範圍如（II），但爲求便初學計，只及主要而單純之事項，其中所引用之數學，亦略加申述。

2.指數與對數

指數式表示一數自乘若干次，如

$5\times5=5^2$，　$a\cdot a\cdot a=a^3$，　$c\cdot c\cdots$(n個因子)$=c^n$

式中右角上數字表示自乘之次數者曰指數。據此義言，則指數以正整數爲限。但數理上，指數意義，有擴充之必要，其規定如下（參看後文§9與§12）：

負指數　$5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}$，　$a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$

分指數　$5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，　$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$

$$C^{\frac{2}{3}}=C^{0.666\cdots\cdots}=\sqrt[3]{C^2}$$

數學家已證明--數得以1外他正數之指數式表示。爲實際應用故，當取此正數爲10，如

$$2=10^{0.301\cdots\cdots},\quad 20=10^{1.301\cdots\cdots},\quad 0.2=10^{-10+.301\cdots\cdots}$$

苟以指數代原數入算，則按指數律，可以加代乘，以減代除，以乘代冪，以除代根，而化繁爲簡。故爲布式明晰計，宜重視指數，書於便利之地位。數學家於是創對數之記法，書上三式爲：

$$\log_{10}2=0.301\cdots\cdots,\quad \log_{10}20=1.301\cdots\cdots,$$
$$\log_{10}0.2=0.301\cdots\cdots-1$$

讀曰『2之常用對數爲0.301』等。10一數稱爲對數之底，實際供計算用者僅限此種，故不妨略去底，而簡記之爲：

$$\log 2=0.301\cdots\cdots,\ \log 20=1.301\cdots\cdots,\ \log 0.2=-1+0.301\cdots\cdots$$

積，商，冪，根之指數定律，吾人當已熟知之，記以對數式，卽得對數運算定律，玆對照並列於次：

指數律	對數律
$10^m=X,\ 10^n=Y$	$m=\log X,\quad n=\log Y$
$X\cdot Y=10^m\cdot 10^n=10^{m+n}$	$\log(X\cdot Y)=m+n=\log X+\log Y$
$\frac{X}{Y}=\frac{10^m}{10^n}=10^{m-n}$	$\log\frac{X}{Y}=m-n=\log X-\log Y$
$X^k=(10^m)^k=10^{km}$	$\log(X^k)=km=k\log X$
$\sqrt[k]{X}=\sqrt[k]{10^m}=10^{\frac{m}{k}}$	$\log\sqrt[k]{X}=\frac{1}{k}m=\frac{1}{k}\log X$

茲舉下例，聊見一斑：

$$
\begin{aligned}
&0.00314\times124\\
&=10^{0.4914-3}\times10^{2.0934}\\
&=10^{0.4914-3+2.0934}\\
&=10^{0.5848-1}\\
&=0.3844
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lr}
\log 0.00314 & =0.4914-3\\
\log 124 & =2.0934\quad(+\\
\hline
 & 2.5848-3
\end{array}
$$

$$\log 0.3844=0.5848-1$$

$$\therefore\quad 0.00314\times124=0.3844$$

讀者當可恍然於對數式之何以較爲明晰矣。

會計學至少需用五位對數，乃至於六位七位者。此等表大抵在20面以外，本書限於篇幅，未能附載。然其檢表法，初與四位表，大體相若，故亦不復及之。

3.等比級數

若干數量，或有限，或無窮，依一定規則排列之，如：

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots,\quad a_n,\cdots\cdots$$

則稱曰級數。如此中任一項與其相隣前項之比爲定值，即

$$a_2/a_1 = a_3/a_2 = \cdots\cdots = a_{n+1}/a_n = \cdots\cdots = r$$

斯成等比級數，常記以簡語G.P.在此 r 曰公比(Common Ratio) a_1曰首項，當項數有限，例如止於a_n 時，則稱之爲末項，而 n 爲項數。盡取諸項求和得總和，記以S.

一G. P. 中之a, r, n, a_n, S 五要件間有二主要關係：

按G.P.之基本性質，$a_2=a_1r$, $a_3=a_2r=a_1r^2$, ……

推之　$a_n=a_1r^{n-1}$，此其一。

因是　$S=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$

$=a_1+a_1r+\cdots\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}$

故　$rS=\quad a_1r+\cdots\cdots+a_1r^{n-1}+a_1r^n$

相減，$S-rS=a_1-a_1r^n$，卽$S(1-r)=a_1(1-r^n)$

$$S=a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$，此其二。

4.內插法(*Interpolation*)，數值表(*Table*)

計算問題，在由已知量推求未知量，則必未知量對諸已知量間，有一定關係，故其值始可視已知量之值決定。數學中卽稱此未知量爲諸已知量之函數(Function)，而稱已知量曰元(Argument)。例如已知一G.P.中之a, r, n 卽可據上述關係式二以求S,故 S 爲 a, r, 及 n 三元之函數，數學上以 S=f (a, r, n) 記之。符號 f(a,r,n) 讀爲「含 a, r, n 之函數 f」。又如息金 I，乃本金 P，利率 i,時期 n 之函數，卽 I=f (P,i,n).爲便於計算起見，吾人每取常須用及之函數，製爲數值表，如複利表(本書附表一)，卽其一例。然紙面僅有縱橫二向，故僅能列一元或二元函數對於其元之相關數值，是爲一項(Single entry) 表或二項 (Double entry) 表。於元數多於二時，勢須先固定其一元之值，例如息金 I 常與本金 P 成正比，而對 i 與 n 之關係則較複雜，故複利表乃本金 1 元照複利率 i 經 n 期之息金。標 i 於上項橫行，n 於左列直行，由已知之 i 及 n 值，檢其交义處，即爲所求息金。例如複利率 $1\frac{1}{2}\%$，十四年終之 1 元息金，可在附表一中頂上標明 $1\frac{1}{2}\%$ 之第二直行內，與左列標 14 橫行之交义處，檢得此值爲 1.2318. 其他各表查法同此。

於此有一困難，即所標各元之值，不能將一切可能情形，盡行列入。例如複利表中 i 項未列 $1\frac{1}{6}\%$，n項未列月數(爲年數之分數)，遇有需要時，勢須由其隣近值間推出之，是曰內插法。其最簡之法乃依比例計算，舉例釋之如次。

[例一] 就複利表求 n 值使 $(1+7\%)^n=(1.07)^n=2$.

[解] 就附表一項標 7% 之直行中，覓二相隣值使 2 介於其間者，

$$\left.\begin{aligned} n=10,\quad (1.07)^{10}&=1.9672\\ n=11,\quad (1.07)^{11}&=2.1049\end{aligned}\right\}\quad 1.9672<2<2.1049$$

按比例推算之法，乃假定元值之差與函數值之差成比例。

n	$(1.07)^n$
10	1.9672
?	2.
11	2.1049

$$11-10:?-10=2.1049-1.9672:2-1.9672,$$

$$?-10=\frac{2-1.9672}{2.1049-1.9672}=\frac{0.0328}{0.1377}=0.23,$$

$$\therefore\quad ?=10.23$$

［例二］ 就複利現值表求 i，使$(1+i)^{-12}=0.6157$。

［解］ 先從附表二左列標 12 之橫行中，覓得適當二相隣值如次：

i	$(1+i)^{-12}$
0.04	0.6246
?	0.6157
0.05	0.5568

$$\frac{0.05-0.04}{?-0.04}=\frac{0.5568-0.6246}{0.6157-0.6246}=\frac{0.0578}{0.0089}$$

$$?-0.04=\frac{-0.0089}{-0.0678}\times(0.05-0.04)$$

$$=0.0013\quad\therefore\quad ?=0.0413$$

亦可如次演算：

i	$(1+i)^{-12}$
0.04	0.6246
?	0.6157
0.05	0.5568

$$\frac{0.05-0.04}{0.05-?}=\frac{0.5568-0.6246}{0.5568-0.6157}$$

$$0.05-?=\frac{-0.0589}{-0.0678}\times0.01=0.0067,$$

$$\therefore\quad ?=0.05-0.00067=0.0413.$$

［例三］ 解方程式 $10(1+i)[(1+i)^{120}-1]-1824i=0.$

［解］ 此 121 次方程式，若以代數法求解，卽窮數日之力亦未易得。

令 $$f(i)=(1+i)\frac{(1+i)^{120}-1}{i}-182.4,$$

則所求之 i 乃能使 f(i) 爲零之值 此中$\frac{1}{i}[(1+i)^{120}-1]$稱年金終值，有已製成之數值表。但本書所附之表七甚簡，n 值止於25未達 120，故不足應用。可查劉覺民編實用投資數學第七表。

假設 i 之值甚微，則可以 1 代1+i ，故當在表中覓取與 182.4

相近之值，在上書273頁左列標120之橫行中，得二適當値爲

$\frac{7}{12}\% = 0.00583$及$\frac{3}{4}\% = 0.0075$.

i	$\frac{1}{i}\left[(1+i)^{20}-1\right]$	$(1+i)\frac{1}{i}\left[(1+i)^{20}-1\right]$	$f(i)$
0.00583	173.0848	174.09	174.09−182.4=−8.31
?		182.4	0
0.00750	193.5143	194.96	194.96−182.4=12.56

$$\frac{0.00750-0.00583}{?-0.00583}=\frac{194.96-174.09}{182.4-174.09}\text{或}=\frac{12.56-(-8.31)}{0-(-8.31)}$$

$$?-0.00583 : 0.00167 = 8.31 : 20.87,$$

$$\therefore\ ? = 0.00583+\frac{8.31}{20.87}\times 0.00167$$

$$= 0.00583+0.00066=0.65\%.$$

[註]　本題見開明高中代數(民國三十年版)257頁第7題

5. 利息之類別

利息有單利(Siomple Interest)，期利 (Periodic Interest)與複利(Compound Interest)之分。單利僅對本金 (Principal) 依利率(Rate of Interest)計息；期利則分期計息，未付之息，仍須依同一利率，計其單利；複利亦分期計息，且於分期末，將息併入本金，爲次期之新本金而計算之。單利之公式甚簡，設本公金爲P，利率爲i，時間長（年數，月數或日數）爲t，息金爲I，本息和爲A，則

$$I=Pit,\qquad A=P+I=P(1+it).$$

期利不難準此求之。其實際計算之若干便捷法則，詳商業算術中，本書從略。

利率乃單位時間內，息金對本金之百分比，此單位時期可爲年，月或日；因有年利率，月利率與日利率之別。依各國習慣，普通所言者，皆指年利率。利率常以分釐等詞表之，分卽十之一之意，例如利率一分二釐，卽每年息金爲本金之12%；但在月利率及日利率，除特殊情況下，絕少達十分之一者，故習慣上，「分」指百分之一，如謂月利率一分二釐乃1.2%，日利率一釐乃0.1%；若高利貸竟達月利率10%者，俗稱之爲大一分。

利率計算之單位時間，普通均以年論，但投資時期決不以此爲限。故日利雖非吾人所習見，銀行計算時，往往須化年利率爲日利率，是故與一年究作若干日計之問題有關。以一年爲360日者曰便息(Ordinary Interest)，美，法，德諸國採之，故亦曰美國銀行利息；以一平年爲365日，一閏年爲366日者，曰實息(Exact Interest)，我國及英，日諸國採之。設 i 爲年利率，則$\frac{i}{360}$爲便息之日利率，$\frac{i}{365}$（平年）及$\frac{i}{366}$（閏年）爲實息之日利率。由是易明同一年利率化爲日利率時，便息高於實息。

二　單貼現

6. 基本公式

預先支取未到期之款項，必須認付此時期之息金。故實得者，乃自該款額減去息金之差，是爲貼現，依單利計算者曰單貼現(Simple-Discount)。款項原額A,曰面值(Face Value)亦稱到期值(Maturity Value)；息金I，曰貼現息(Discount)；計算息金之利率d,曰貼現率(Rate of Discount)；自預取至到期之日數t,曰貼現期(Period of Discount)，面值減去貼現息之差P,卽預取之淨收額(Proceeds)，亦可稱爲A之現值(Present Value)。此諸量間之關係，依單利計之，則得次二式：

$I=Adt;\quad P=A-I=A-Adt=A(1-dt)$

〔註〕 有時未到期款項，附帶利息，則到期值爲面值與息金之和，而大於面值。又實際上，貼款人除扣貼現息外，尙須加收手續費等項，則以現值減去此項費用後之餘款爲淨收額。本書除特別說明之處外皆論不帶息之情形，亦不計入手續費，俾問題較簡。

單貼現與單利，似係一事，實則不然。緣單利須於到期取息，而貼現則爲預付利息，取此款時已先行扣除 故二者之差異，卽在息金支付之早遲。蓋貼現時先扣之息金，在貼現期內尙可按利率生息，較期終取息所得多也。玆以例明之如下。

〔例〕 有二月後到期之期票，面值5000元，月利率五釐，卽0.5%·

（一）求貼現時所扣之貼現息與淨收之現值。

（二）如以所得現值經營，所獲利益，恰合月利率0.5%之數，則二個月後之本利和，是否仍爲5000元？