



数学教育心理学

蔡道法 编著

上海科技教育出版社

数学教育心理学

张孝达

— 蔡 道 法 —

上海科技教育出版社

(沪)新登字 116 号

数学教育心理学

蔡道法

上海科技教育出版社出版发行

(上海冠生园路 393 号)

各地新华书店经销

上海市印刷三厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 9.5 字数 235000

1993 年 8 月第 1 版 1993 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—2200

ISBN 7-5423-0708-0

G·665

定价: 6.70 元

序 言

马 忠 林

当前数学教育的改革, 已为世界所瞩目, 各国都结合自己的国情, 加强研究。现在已形成了国际性的研究组织——国际数学教育研究会(IOME)。

教育的目的在于育人, 而数学教育则是通过数学学科的教学, 启发学生的智力、增长数学知识, 使青少年一代成材, 为国家经济建设、科学技术的发展服务。

中华人民共和国成立以来, 国民经济、科学技术在迅猛发展, 青年一代的文化知识水平急待提高, 以适应客观形势的需要。数学是各门科学的基础, 数学教育改革的重要性, 则是不言自明的了。

近年来, 数学教育的改革, 已深入到数学教育各分支的理论领域。被誉为现代数学教育理论先导者的波利亚(G. Polya, 1888~1985), 撰写了《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》等开拓性的数学教育著作。早年的庞加莱、哈达玛、小仓金之助都力主数学教育改革的重要性, 并撰写了多种著述, 现代的弗莱登泰尔[荷兰]、培利[英]、克莱茵、穆尔等数学教育改革的倡导者, 对数学教育改革在理论和实践中都做了巨大贡献。

数学教育理论领域的研究, 数学教育心理学是重要的一支。国际数学教育心理学研究会已开过多次会议。日美数学教育心理学的跨国研究会, 也做了大量工作。这种开发青少年心理因素, 特别是关于思维的训练, 都能成为促进科学地教学过程的动力, 以期数学教育水平的提高。

蔡道法同志积多年的教学经验, 撰写了《数学教育心理学》一

书,实为我国近年来数学教育理论研究的又一可喜成果。此书是他多年从事数学教育工作的理论和实践的总结,定能成为同行们工作中的借鉴和参考,成为中小学数学教师和大专院校数学系学生的良师益友。

我个人作为近年来参与我国数学教育研究队伍中的一员,见到我国斯界同道的创作和成就,感到无限欢欣,倍受鼓舞。我在逾古稀之年,仍愿追随青年教育家们之后,在开拓我国数学教育理论研究方面,做些微薄贡献。

近年来,我国在数学教育研究方面发展迅速,这在我国数学教育史上,是前所未有的。近10年来,数学教育方面的专著、丛书已有多种出版,这是十分可喜的现象。数学大师陈省身教授预言“21世纪我国将成为数学大国”的愿望,是指日可待的。而这也正需要我们的加倍努力,在数学教育理论方面的研究多做贡献。

蔡道法同志专著出版之际,特表祝贺之意,述怀以为序。

目 录

第一章 绪论	1
第一节 数学教育心理学的研究对象	1
第二节 学习数学教育心理学的意义	4
第二章 掌握数学知识过程的心理分析	7
第一节 掌握数学知识过程的心理结构	7
第二节 感知与数学知识的摄取	10
第三节 思维与数学知识的理解	31
第四节 记忆与数学知识的巩固	143
第五节 技能与数学知识的应用	158
第三章 数学能力的培养	174
第一节 观察能力的培养	176
第二节 运算能力的培养	186
第三节 逻辑思维能力的培养	192
第四节 空间想象能力的培养	202
第四章 数学学习中智力的发展	206
第一节 关于智力的概述	206
第二节 发展思维的广阔性	208
第三节 发展思维的深刻性	226
第四节 发展思维的灵活性	231
第五节 发展思维的敏捷性	239
第六节 发展思维的创造性	241
第五章 数学学习中的非智力因素	255

第一节	非智力因素及其在数学学习中的重要意义.....	255
第二节	情感与数学学习.....	257
第三节	兴趣与数学学习.....	261
第四节	动机与数学学习.....	267
第五节	意志与数学学习.....	272
第六节	数学学习中的逆反心理及其防止方法.....	278
第六章	数学教学方法的选择与数学学习方法的指导.....	281
第一节	数学教学方法的选择.....	281
第二节	数学学习方法的指导.....	286

第一章 绪 论

第一节 数学教育心理学的研究对象

一、心理学、教育心理学和数学教育心理学

数学教育心理学是研究数学教育中的心理学问题，是教育心理学的一个组成部分。

心理学是研究人的心理现象发生、发展及其规律的科学。所谓心理现象，就是心理过程和个性心理特征的总称。其中，心理过程是指人的心理活动产生和变化的经过，它包括认识过程、情感过程和意志过程。

认识过程是人们认识事物的心理过程。从感觉、知觉到思维，还有想象、记忆都属于对客观事物在认识中的不同形式，都叫认识过程。

情感过程则是指人在认识事物时对待事物的态度的体验其产生、发展的心理过程。

当人们根据主、客观的条件，提出一定的目的，并有意识地克服种种困难，去达到既定目的的这种心理过程，称作意志过程。

情感和意志都是在认识的基础上产生的，认识是最基本的心理过程。情感和意志则对认识产生重要的影响，它能有力地提高认识的效率。

由于各人的先天条件和后天条件的不同，造成人们的知识、经验等等不同，形成诸如智力、能力、气质、性格等方面的差异，这些人的心理活动上的种种差异构成了各人的心理特点，在个体身上

经常地、稳定地表现出来的心理特点,称之为个性心理特征。

人的心理现象,也就是人的精神现象,这些精神现象是人们在实践活动时客观现象中的各种事和物通过感官反映到人的大脑中产生的。因此,心理学的研究是以物质为基础的:人的大脑和客观现实。它既要研究脑的机能,又要研究客观现实怎样通过大脑而转化为主体意识。可见,心理学既是一门自然科学,又是一门社会科学;它既是理论科学,又是应用科学。普通心理学以理论为主,各个分支则偏于应用。

教育心理学是心理学的一个分支,它是研究教育过程中的各种心理现象及其发展、变化规律的科学。

教育心理学蕴含丰富的内容,包括对学生进行智力教育、道德教育过程的心理分析;学生学习过程的心理分析及教师应具备的心理品质;直至学校管理的心理研究,……。它主要由差异心理、学习心理、德育心理和教师心理四大部分组成。

数学教育心理学与教育心理学关系密切,教育心理学是研究教育过程中人的心理活动的一般规律,而数学教育心理学则研究数学教育过程中的人的心理活动规律。两者的关系是一般和特殊的关系。

数学教育心理学以教育心理学为自己的理论基础,运用教育心理学的理论去分析、解决数学教育过程中出现的问题,从这个意义上讲,数学教育心理学着重于应用。

数学教育心理学又是教育心理学的事实依据,它以数学教育心理方面所特有的知识和事实丰富了教育心理学的内容。

二、数学教育心理学研究的内容

数学教育心理学是研究数学教育过程中人的心理活动规律。数学教育过程包含数学与教育两个方面的内容。对于数学教学,斯托利亚尔([前苏联])在《数学教育学》一书中指出:“数学教学是数学活动(思维活动)的教学”,而不能是数学知识(数学结果)的教学。现代教学论则进一步认为,数学教学的任务应该是形成和发展学生的具有思维特点的智力活动结构。可见,对数学教学的

要求已提到了一个新的高度。

从我国实际出发,现行《全日制中学数学教学大纲》指出,中学数学教学目的是“使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必须的数学基础知识和基本技能,培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力,以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力。要培养学生对数学的兴趣,激励学生为实现四个现代化学好数学的积极性,培养学生的科学态度和辩证唯物主义的观点。”将这段话中的教学任务概括一下,就是通常所说的“学好双基,培养能力,发展智力”。这段关于教学目的的叙述,实际上已涉及了一部分数学教育目的:培养兴趣、激发动机、树立观点。

为了达到大纲上提出的要求,需要我们探索数学教育的规律,这种探索可以通过多种渠道来进行。例如,可以从数学的发明过程与数学学习过程的一致性作为出发点进行探索,就可按照:动机、意向阶段,猜想、发现阶段,论证、整理阶段和知识应用阶段这四个阶段的结构来进行。而数学教育心理学则是用教育心理学的原理和方法,从数学学习过程的心理分析着手,研究数学知识、技能的获得,数学能力的培养等过程的心理机制,研究数学学习动机的激发,数学学习兴趣的培养等过程的心理机制。以及为达到大纲要求的教学方法和学习方法进行选择和指导。

具体说来,数学教育心理学所研究的主要内容有以下几个方面:

1. 学生在掌握数学知识过程中心理活动的规律和影响数学学习的心理障碍;
2. 学生在数学能力培养过程中的心理活动规律;
3. 学生在数学智力发展过程中的心理活动规律;
4. 非智力因素对数学学习所产生的影响的心理分析;
5. 数学教学方法与数学学习方法的选择与指导。

从以上关于研究内容的概述中可以看出,侧重点是对数学学习方面的研究,这是由于教学过程中,学生是主体,“教”应为“学”

服务。但要使学生学好,教师又必须教好。因此,研究学生的数学学习心理规律又是为了使教师在教学中发挥好主导作用。在数学教育心理学中以这种辩证的观点,使“学”与“教”得到统一。这正是本书不称《数学学习心理学》而称为《数学教育心理学》之缘由。

第二节 学习数学教育心理学的意义

由于数学教育心理学是揭示数学教育过程中人的心理活动规律的,作为中学数学教师只有掌握这些规律,才能很好地完成数学教育任务,因而需要学习数学教育心理学。具体说来,学习数学教育心理学的意义有以下两点。

一、有助于建立辩证唯物主义世界观

辩证唯物主义世界观是由知识、观点、信念和理想等因素所构成,任何科学知识对于形成辩证唯物主义世界观都是必不可少的,通过数学教育心理学的学习,可以获得一系列的科学知识,如数学教育与心理发展的关系,学生掌握数学知识过程中的心理活动规律,数学思维的形成与发展,直觉思维形成的辩证唯物主义理解,数学学习动机的激发等等,这些科学知识都有助于辩证唯物主义世界观的形成。

此外,数学教育心理学结合数学本身特点阐明了辩证唯物主义认识论,并科学地而非唯心地阐述了数学能力的形成、思维品质的实质;辩证地分析了内因和外因、主体和客体、能动和受动、知识和能力、知识结构和认知结构一系列概念的相互关系。这些,对于建立辩证唯物主义世界观都是十分必要的。

二、有助于提高数学教育质量

数学教育质量的提高不能依赖于经验,因为经验具有局限性与偶然性,属于认识的低水平。只有把数学教育建立在教育科学理论上,数学教育质量的提高才有可靠的保证,这可以从以下几个方面说明。

(一)可以加强教学教育的针对性

正如古希腊哲学家、教育家苏格拉底(Socrates)所说的那样,“教师在课堂上讲了些什么并非不重要,但学生想了些什么更重要千万倍”。要使数学教育收到预期的效果,必须要知道学生在学习数学时想些什么,这就需要我们掌握学生学习数学时的心理活动规律。另外,数学教育是一项充满辩证精神的工作,学习数学教育心理学可以掌握不同年龄学生的思维特点以及个性心理特征,以便针对具体情况,因材施教,使数学教育取得成效。

(二)可以加强教学教育的规律性——预见性和主动性

要做好一件事,必须知道这件事的发生、发展规律,只有按照这些客观规律去办事,才能达到预期的效果。同样,学生的数学学习有其客观规律,在掌握数学知识时,从知识的摄取到理解,再进一步巩固直至应用,都有其相应的心理活动。这些心理活动来自客观现实的反映,有其不以人们的意志为转移的客观规律。学习数学教育心理学,掌握这些客观规律,就能提高数学教育效果。在现实生活中,我们可以看到,有的教师在课外不惜加班加点给学生补课,留大量作业,但却不能收到满意的教学效果。有的教师不加重学生负担,看来也不费太大的劲,却收效显著。这里除了其他因素以外,主要原因是是否掌握了学生的心理活动规律。成功的教学不仅要求教师具有足够的知识、技能等条件,还要根据学生学习数学时的心理发展规律和心理特点,采取种种做法,使他们愿意学,听得懂,记得住,用得好。因此,教师就要在教学活动中自觉地运用数学教育心理学的知识,根据学生学习动机、兴趣形成的特点和规律,提高学生学习数学的自觉性和积极性。根据学生观察的特点和思维的规律去组织教材,选择教学方法,指导学生更好地掌握知识和技能。根据学生的记忆特点和规律进行练习和复习,使学生记得快、记得牢、记得准,获得巩固的知识。这样,既能使学生学好数学“双基”,又能培养、发展他们的数学能力和智力,教学质量当然也就提高了。

做任何工作都要争取主动,避免被动。要做到主动,就要具有

预见性。教师运用数学教育心理学的知识，按照客观的心理规律从事数学教育，就能预见学生在学习数学时的心理活动，可以顺应这些心理活动的规律使学生的数学学习朝着既定目标前进，从而使数学教育在以学生为主体的前提下，充分发挥教师的主导作用——预见性和主动性。这也就显示出数学教育心理学——数学教育科学理论的重大作用。

(三)可以促使教师的自身素质得到改善，从而促进数学教育质量的提高

一个数学教师，能在学生中具有较高的威信，是使数学教育取得良好效果的一个重要因素。教师在学生中的威信是教师的学识、品格、能力、教育艺术等各方面在学生心理上所引起的信服、尊敬的反应态度。教师对教育工作所具有的认识、感情、能力等都有其个人特点，这就决定每个教师对学生进行指导的态度、方式也就各具特色，从而使学生对教师的反应态度也各不相同。对于一位威信高的教师，学生就乐意接受其教育和要求，愿意并努力学好他所教的学科。一位数学教师，只有成为善于运用自己的智慧、品格、真诚的爱生感情和高超的教育艺术的人，才能做好数学教育工作。学习数学教育心理学可以帮助我们做到这一点，因为掌握了数学教育心理学，既增加了自己的学识，又可以用心理学知识去客观地分析学生和自己的心理特点，以及在心理上存在的优缺点，这就有助于确定自己在数学教育等各方面改进和努力的方向，使自己成为学生的表率，并根据学生的情况，更好地运用数学教育这门艺术。

第二章 掌握数学知识过程的心理分析

对于学生学习数学的首要要求就是使学生学好数学基础知识。而对数学知识的掌握是一个相当复杂的过程，它必须通过一系列的认识活动才能实现。从心理学角度研究掌握数学知识的过程，意即揭示这个过程的动态结构及其规律，从而了解它是由哪些环节构成的，这些环节的核心心理因素是什么，它们之间存在着怎样的关系，是如何进行联系的。这就是本章所阐述的内容。

第一节 掌握数学知识过程的心理结构

一、知识及知识的掌握

(一) 知识的涵义

知识是人类在长期实践活动中经验的结晶，是人类对客观事物认识的总和。

从心理学角度而言，知识都是事物的特征(属性)与联系(关系)的反映，都是由表象和概念两个系列组成的。表象是曾经作用于人的事物在人脑中留下的形象。概念则是人脑对客观事物本质属性的反映。它既是人们进行思维活动的形式，又是思维的结果。

表象是在感知的基础上形成的，而在表象的基础上又形成各种概念。

中学数学教学大纲提及的数学基础知识，应包括数学概念、数学命题和数学方法这三个方面的内容。其中，数学概念则是数学知识的最小“单位”。

(二)知识的作用

中学数学教学大纲中提及的“学好从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必须的数学基础知识和基本技能”，其中数学基本技能的形成，是以数学知识为基础的，只有把数学知识应用于解决实际问题，才能形成数学基本技能。

以“因式分解”为例，进行因式分解的方法有“提取公因式法”、“分组分解法”、“公式法”、“待定系数法”、“综合除法”等等。要形成因式分解的熟练技能，就意味着要能正确、熟练、灵活、综合地使用这些公式，这当然要以掌握有关的知识为前提。如果对于以下这类情形都分辨不清其正误，那就根本谈不上“技能”二字：

(1) 认为 $x^2 - 4 + 3x + 6 = (x+2)(x-2) + 3(x+2)$ 已化成(实际上是出现)乘积的形式，因此已将左式进行了因式分解；

(2) 以为 $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = 4\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}(3x+3)(3x-3) = \dots$ 中每一个等号的右边，都是 $x^2 - 1$ 的一种因式分解，仅是不同的表示形式而已；

(3) 以为 $x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$,

$$x - y = x\left(1 - \frac{y}{x}\right)$$

都属于将 $x - y$ 进行因式分解所得的不同表示形式。

上述数例皆因对“多项式因式分解”的定义理解错误所致。概念不清势必导致解决实际问题时产生错误，这就妨碍了技能的形成。

同样，数学知识也是形成数学能力的基础。数学能力是在掌握数学知识和技能的过程中形成和发展起来的，如果缺乏必要的数学知识，就不可能进行相应的活动，也就不存在相应的能力。当然，数学能力并不是自发地随着数学知识的增加而提高，两者也不是成正比的，知识多并不等同于能力强，通常讲的“高分低能”即说明了这一点。

总的说来，数学知识的作用是为了在进行数学活动时加以

定向。因为在做一件事时，如果不了解这件事的情形、性质以及其他事情的关联，即不知道与这件事有关的知识，那就无法确定如何去做，也就做不好。

因此，中学数学教学大纲把学好数学基础知识列作要求中的第一条，其缘由就是由于它是掌握数学技能，培养数学能力的基础，是为数学活动的开展确定方向。

(三)知识的掌握

知识的掌握，即知识的占有，而知识的占有意味着自己已能用知识来分析和解决问题。

掌握知识的过程，一般说来，对学生是学习知识，对教师则是传授知识。学习与传授是掌握知识过程中不可分割的两个不同方面。在这个过程中，学生是主体，教师是主导。

通常，人的学习是人在社会实践中以语言为中介，主动掌握社会与个体的经验的活动。学生的学习则是一种特殊的学习，它是在学校和教师有计划、有目的的指导下，通过与成人不同的实践方式，掌握前人积累的经验的过程。

学生的数学学习是一个复杂的心理过程，它既与认识过程有关，也与意向过程(动机、兴趣、情感和意志等)有关。作为数学教师，只有深入地了解这个过程及其规律性，才能做好数学教学工作。

从信息论的观点来看，知识是由信息转化而来的，学生掌握数学知识的过程，也就是信息的输入、编码、储存、检索、输出和反馈的过程。

二、掌握数学知识过程的心理结构

学生掌握数学知识的过程，一般是由知识的摄取、知识的理解、知识的巩固、知识的应用等基本环节构成的。在这个过程中，学生的各种心理因素处在不同关系之中，又各自发挥它们应有的作用，其中每一个环节都有一个核心心理因素相对应，可由以下模式图(图 2-1)表示。

从这个模式图可以看到，掌握数学知识过程的心理结构是由

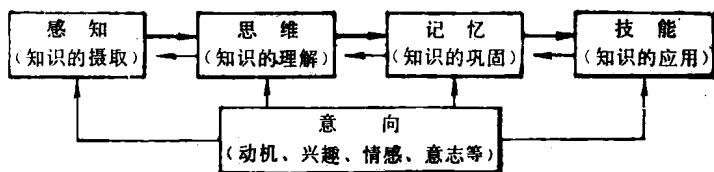


图 2-1

感知、思维、记忆、技能等四种心理因素构成，各自属于相应的环节之中，它们紧密联系而又互相区分，每一个环节具有相对独立性，作为一个过程来看，就具有一定的程序性，但需要说明的是，它们之间并非单向联系而是相互影响的。这是由于人们在进行心理活动时，必然有多种心理因素参与，相互协调，这里的“环节”中的心理因素，是一个“核心”心理因素。如在进行记忆活动时，需要感知与思维的同时参与，而当知识的应用形成技能后，反过来有助于知识的巩固，而巩固的知识又起到进一步加深理解知识的作用，原有知识的理解则有助于新知识的摄取。当然，这种相互影响有强弱之分，并不等价。在模式图中用箭头的粗细加以区别。

对于这四个环节都起制约作用的是学习意向，即动机、兴趣、情感、意志等，将对每个环节中的心理因素起重大的影响。比如，强制而缺少自己意愿的学习、缺乏兴趣的学习，都将严重地影响对数学知识的掌握，我们可以看到一些数学成绩差的高中学生，常常是由于在初中对数学产生逆反心理而造成的。而有一些聪明的学生由于害怕困难缺乏意志以使数学成绩大为下降，也不乏其例。

第二节 感知与数学知识的摄取

一、数学知识的摄取

人们对一切事物的认识，都以感性认识为始，继而才能进入理性认识。感知所积累的感性材料，是理性认识的基础。因此，感知是认识客观世界的起点。人们对客观世界的反映，又都是从具体事物的个别属性开始的，从这个意义上来说，感知是一切知识的源泉。