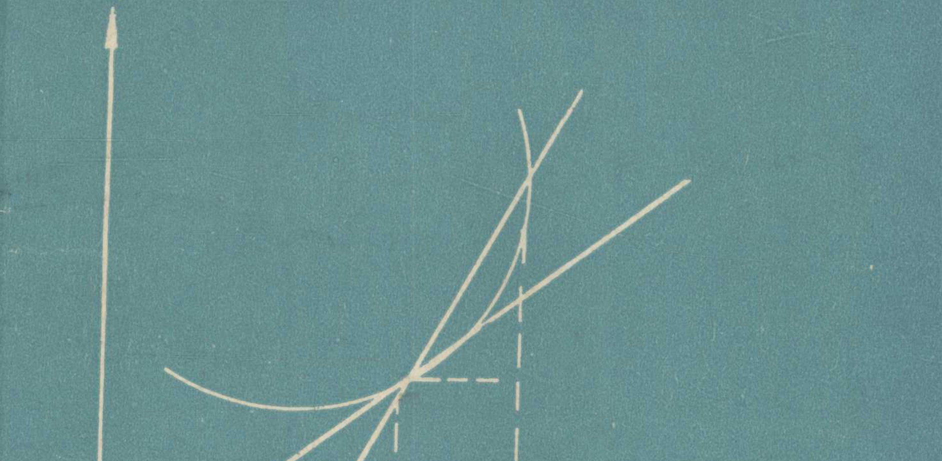
微积分

主　编　管九锡
副主编　梁化英　吴以永　王兰英



河海大学出版社

微 积 分

主　编　管九锡
副主编　梁化英　胡以永　王兰英
参　编　何　青　马彦春　张福生
　　　　刘崇军　郭金锥　韩士生

河海大学出版社

微 积 分

管九锡 主编

出版发行：河海大学出版社
印　　刷：武进第三印刷厂
开本850×1168 1/32 印张12.062 字数314千字
1991年8月第1版　　1991年8月第1次印刷
印刷 1-6000 册

ISBN 7-5630-0235-9/O·29
定价：5.00元

前　　言

《微积分》、《线性代数与线性规划》、《概率论与数理统计》是由吉林商专、辽宁商专、河北商专、河南商专、陕西商专、江苏商专、马鞍山商专、广西商专协作编写的一套教材，供经济类专科学校经济数学课程的教学之用，也可为经济类各专业的大专函授、夜大学及职业大专用作教材或教学参考书。

随着我国社会主义建设的发展和改革开放的不断深化，经济数学方法的应用已日益广泛和深入。我们根据目前各校的经济数学教学大纲和各有关专业的教学计划，对过去曾使用过的协编教材进行了讨论和研究，结合几年来的教学实践，重新编写了这套教材。

本教材保留了高等数学的系统性、逻辑性，根据专科教学的特点，力求深入浅出、通俗易懂，並加强了实际应用的内容，使读者在掌握基本理论知识和基本方法的同时，得到分析、解决一些实际问题的能力。

《微积分》由管九锡任主编，梁化英、胡以永，王兰英任副主编，参加编写的还有何青、马彦春、张福生、刘崇军、郭金锥、韩士生。

由于编者水平有限，如有不当或错误，请使用本教材的读者不吝赐教。

编　者

1991年5月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

本章作为微积分的基础知识，主要介绍函数、极限和连续等基本概念，着重阐述极限的意义及其运算方法。

§1.1　实数的绝对值

实数是有理数和无理数的总称，在微积分学中所研究的数都是实数．在讨论问题时还经常需要用到实数的绝对值及其性质。因此，我们在开始学习这门课程的时候，首先复习一下绝对值的概念和它的性质。

一．绝对值

一个实数x的绝对值，记作$|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

$|x|$的几何意义：$|x|$表示数轴上点x到原点之间的距离。根据绝对值的定义，容易得出下面基本性质：

（1）$|x|\geqslant 0$；

（2）$|x|=\sqrt{x^2}$；

（3）$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

（4）若$a>0$，则$|x|<a$表示开区间$(-a, a)$，$|x|\leqslant a$表示闭区间$[-a, a]$；

（5）若$b>0$，则$|x|>b$表示两个无穷区间的并集为$(-\infty, -b)\cup(b, +\infty)$；$|x|\geqslant b$表示两无穷区间的并集为$(-\infty,$

$-b] \cup [b, +\infty)$。

关于绝对值的运算，有以下四个性质：

（1）和的绝对值不大于各项绝对值的和，

即 $$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

事实上，由 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$，$-|y| \leqslant y \leqslant |y|$，

两式相加得 $-(|x| + |y|) \leqslant x+y \leqslant (|x| + |y|)$。

又由性质(4)可得 $|x+y| \leqslant |x| + |y|$。

应用数学归纳法，可以证明有限项和的绝对值，不大于各项绝对值的和。

（2）差的绝对值不小于各项绝对值的差，即

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|.$$

事实上，由 $|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y|$，

即 $|x| \leqslant |x-y| + |y|$，

移项后得 $|x| - |y| \leqslant |x-y|$。

（3）乘积的绝对值等于各项绝对值的乘积。

即 $$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

（4）商的绝对值等于被除数和除数绝对值的商。

即 $$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad (y \neq 0).$$

运算性质(3)、(4)由乘法和除法的意义是显然的，故不赘述。

二．邻域

由绝对值的几何意义我们知道，$|x-a|$ 表示数轴上点 x 到点 a 的距离。根据绝对值基本性质(4)，$|x-a| < \delta$（其中实数 $\delta > 0$）可写成不等式 $a-\delta < x < a+\delta$，它表示数轴上开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，（如图1.1）。

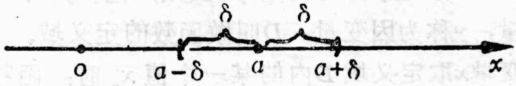


图 1.1

定义 设a和δ是两个实数，且$\delta>0$，则满足不等式$|x-a|<\delta$的实数x的全体称为点a的δ邻域。点a叫做邻域的中心，δ叫做邻域的半径。

例如 $|x-3|<\frac{1}{2}$，表示以点$a=3$为中心，以$\frac{1}{2}$为半径的邻域，也就是开区间(2.5, 3.5)。

在微积分中还常常用到空心邻域。在上述定义中，满足不等式$0<|x-a|<\delta$的实数x的全体称为点a的δ空心邻域。即下列开区间的并集：$(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\delta)$，(如图1.2)。

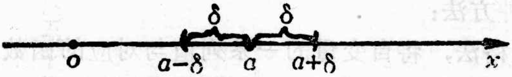


图 1.2

例如 $0<|x-1|<0.1$，即以点$a=1$为中心，半径为0.1的空心邻域，也就是两开区间的并集：$(0.9,\ 1)\cup(1,\ 1.1)$。

§1.2 函数的概念及其性质

函数是微积分学的研究对象，函数的概念是现实世界中各种变量关系的数学抽象。

一．函数的定义

定义 在某一变化过程中，如果对于变量x的某个范围D内的每一个值，按照某一对应法则，变量y都有唯一确定的值

和它对应，那么变量y称为变量x的函数，记作$y=f(x)$。其中x称为自变量，y称为因变量，D叫做函数的定义域。

当自变量x取定义域D内的某一个值x_0时，函数的对应值叫做函数y当自变量x取x_0值时的函数值。函数值用记号：$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$表示，函数值的全体叫做函数的值域，用字母Z表示。

例如，函数$f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$，它的定义域$D=\{x\mid x\in R$，且$x\neq\dfrac{1}{2}\}$，值域$Z=\{x|\ x\in R$，且$x\neq 2\}$，当$x=0$时，函数值$f(0)=1$，当$x=-\dfrac{1}{2}$时，函数值$y|_{x=-\frac{1}{2}}=0$。当$x=\dfrac{1}{2}$时函数$f(x)$无意义，通常称为没有定义。

在函数定义中，用何种方法表示函数，并没有加以限制，常用的有三种方法：

（一）表格法，将自变量的一系列值与对应的函数值列成表格。例如，平方表、对数表、三角函数表等。

（二）图示法，在直角坐标系中将自变量x和因变量y之间的对应法则，用曲线来表示。

（三）公式法，就是用数学表达式来表示自变量x和因变量y之间对应法则的方法。今后，我们所讨论的函数，一般都是用公式法表示的。

二．分段函数

用公式法表示函数时，有时需要考虑自变量在定义域的不同范围内用不同的数学式子表示同一个函数，用这种方法表示的函数称为分段函数。分段函数有着广泛的应用，现举例如下：

例1　某运输公司规定货物的吨公里运价为：若不超过100

公里，每公里K元；100公里以上又不超过200公里，每增加1公里为$\frac{4}{5}K$元；超过200公里，每增加1公里为$\frac{3}{5}K$元．试把运价M和里程S之间的函数关系用公式法表示出来．

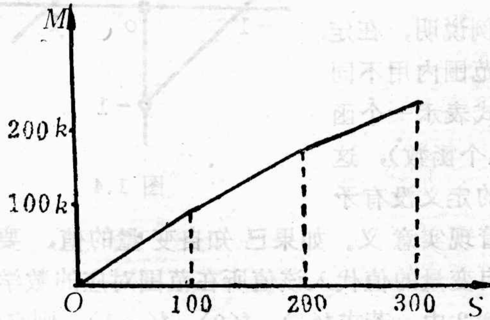


图 1.3

解：依题意，M和S之间的函数关系为：

$$M=\begin{cases} KS \\ 100K+(S-100)\frac{4}{5}K \\ 100K+100\times\frac{4}{5}K+(S-200)\frac{3}{5}K \end{cases}$$

$$=\begin{cases} KS, & 0\leqslant S\leqslant 100 \\ 100K+(S-100)\frac{4}{5}K, & 100<S\leqslant 200 \\ 180K+(S-200)\frac{3}{5}K, & S>200 \end{cases}$$

这个分段函数的图形，如图1.3所示．

例2　作出下面函数的图形：

$$y=\begin{cases} -x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -x+1, & x>0 \end{cases}.$$

解：当$x<0$时，是直线$y=-x-1$；当$x=0$时，是原点；当$x>0$时，是直线$y=-x+1$，如图1.4所示。

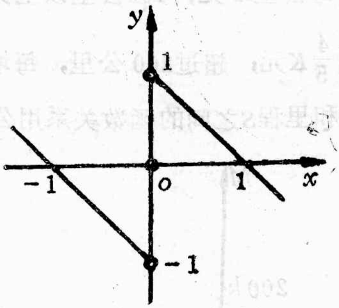


图 1.4

以上两例说明，在定义域的不同范围内用不同的数学表达式表示一个函数(而不是几个函数)，这不仅与函数的定义没有矛盾，而且有着现实意义。如果已知自变量的值，要求函数值时，只需将自变量的值代入该值所在范围对应的数学表达式中即可求得。例2中，若求$f(1)$，$f(0)$，$f(-1)$。则它们分别为$f(1)=-1+1=0$，$f(0)=0$，$f(-1)=-(-1)-1=0$。这个函数的定义域为一切实数，即$D=R$。

三。经济现象中的函数关系

在社会经济现象中，也存在很多变量，如产量、价格、利润、成本、收入、投资、消费等等。在经济问题的研究过程中，一个经济量是和多种因素相关的。当我们用抽象的数学方法来研究经济量之间的数量关系时，要从实际出发，找出其主要因素，而对其次要因素，或略去不计，或者假定保持不变，这样便将问题简化为只含一个自变量或者二个自变量的函数关系。下面介绍几个经济现象中常用的函数关系。

1．需求函数

需求关系在经济理论中相当重要，消费者需要某种商品，一般地说，一定的价格适应一定的购买能力。价格提高，购买力降低；价格降低，购买力提高。于是就产生商品的需求量与价格的关系。

设Q表示某商品的需求量，P表示该商品的价格。则需求函数便可记为：$Q=f(P)$。

由经济理论和日常实践知识可知：需求量随价格的增加而减少，故需求函数是一减函数.如图1.5所示。

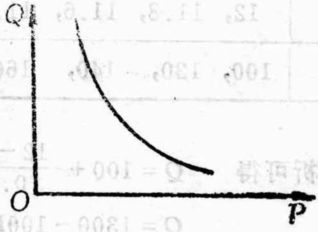


图 1.5

2. 利润函数

一般来说，总收益减去总成本就是利润。设R表示总收益，C表示总成本，L表示利润。则利润函数通常表示为：

$$L=R-C.$$

总成本包括两个部分：固定成本和可变成本。固定成本是在一定限度内不随产量的变化而变化的费用，通常用常数来表示，又称间接费用；可变成本是随产量Q的变化而变化的费用，如原材料费、燃料费、劳动力支出费等，又称直接费用。所以总成本是产量Q的函数记作：$C=C(Q)$，且是一个递增函数。

总收益R，它也是产量Q的函数，且等于产品单价P与产量Q的乘积，即$R=P\cdot Q$。

在经济理论中，通常认为企业是以利润最大为其目标的。因此，利润函数$L=R(Q)-C(Q)$被称为企业的目标函数。

此外，还有生产函数、效用函数等等，不再一一赘述。

例3 某服装厂生产童装连衣裙，每件售价为12元，每天可售出100件. 如果在一定的降价范围内，每件售价每次降低0.2元，则每次可多售出20件，试求市场需求量与价格的函数关系。

解：设市场需求量为Q，单价为P。根据题意可知，该商品售出件数的增加量与售价的降低成比例。由此便得到Q与P

是线性函数关系，列表如下：

P	12，11.8，11.6，11.4，11.2，……
Q	100，120，140，160，180，……

由题意分析可得 $$Q = 100 + \frac{12-P}{0.2} \times 20,$$

即 $$Q = 1300 - 100P.$$

例4　某工厂生产某种产品，最高年产量为100吨，固定成本为18000元，每生产一吨产品的成本为1150元。预测市场上每年可销售此种产品90吨，其销售总收入R是产量Q的函数为

$$R = R(Q) = \begin{cases} 3650Q, & 0 \leqslant Q \leqslant 90 \\ 3650Q - \dfrac{1}{100}Q^2, & 90 < Q \leqslant 100 \end{cases}.$$

试求该工厂年产量为Q吨时的总利润？

解：设总成本为C，则年产量为Q吨时的总成本为：

$$C = 18000 + 1150Q(\text{元}).$$

又设总利润为L，因为$L = R - C$，

所以 $$L = \begin{cases} 2500Q - 18000(\text{元}), & 0 \leqslant Q \leqslant 90 \\ 2500Q - \dfrac{1}{100}Q^2 - 18000(\text{元}), & 90 < Q \leqslant 100 \end{cases}.$$

四．函数的几种特性

1．函数的有界性

设函数$y = f(x)$在X（为函数定义域的全部或部分）内有定义，如果存在一个正数M，对于任意一个$x \in X$，能使对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)| \leqslant M.$$

则称函数$f(x)$在X内有界；反之，如果这样的M不存在，则称

函数$f(x)$在X内无界。

例如，函数$\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内有界，因为存在$M=1$，使得$|\sin x| \leq 1$，直观地说，$y=\sin x$的图形介于直线$y=-1$与$y=1$这两条平行线之间。又如，函数$y=(1+x)^{-2}$在区间$(-\infty, -1)$及$(-1, +\infty)$内都是无界的。

2．函数的单调性

如果函数$y=f(x)$在区间(a, b)内有定义，对于(a, b)内任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，不等式

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或}f(x_1)>f(x_2))$$

恒成立，则称函数$y=f(x)$在(a, b)内是单调增加的（或单调减少的）。单调增加和单调减少函数统称为单调函数。

类似地，可以定义在无限区间内函数的单调增加或单调减少。

但是，并非任何一个函数在其定义域内不是单调增加的，就是单调减少的。例如函数$y=x^2$的定义域为$(-\infty, +\infty)$，它在整个定义域内就不是单调的。因为它在区间$(-\infty, 0)$内是单调减少的，而在区间$(0, +\infty)$内却是单调增加的。

3．函数的奇偶性

如果函数$y=f(x)$对于其定义域内的任何x都满足$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；如果函数$y=f(x)$对于其定义域内的任何x都满足$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$是奇函数。

例如，$y=x^2$是偶函数，因为$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$；而$y=x^3$是奇函数，因为$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$。

我们已经知道，偶函数的图形是关于y轴对称的，而奇函数的图形是关于原点对称的。

但是，并非任何一个函数不是偶函数，就是奇函数。例如，$y=x^2-2x$，$y=\sin x-\cos x$等，它们既不是奇函数，也不是偶函数。

4．函数的周期性