模糊复分析理论基础

● 马生全　著

科学出版社
www.sciencep.com

模糊复分析理论基础

马生全　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书较系统地介绍了模糊复分析理论的全貌，其中包含了作者在模糊复分析理论方面的有关成果．绪论扼要地介绍了模糊复分析学研究的基本思路及目前已取得的主要成果；第1章是预备知识;第2章专题介绍了实模糊数的概念、模糊数的运算及性质、几种特殊的模糊数及有关运算、模糊数的模糊距离、模糊数的模糊极限及其性质、模糊数空间及其有关重要性质；第3章介绍了模糊复集与模糊复数、复模糊集与复模糊数的概念及其性质等；第4章介绍了复模糊集值函数的基本概念与性质、复模糊函数的连续性、复模糊集值函数的基本概念与性质、模糊复数值映射的不动点研究、复模糊集值函数的微分、模糊值函数的曲线和曲面积分、复模糊集值函数的积分、复 Fuzzy 测度与复 Fuzzy 积分、复 Fuzzy 值复 Fuzzy 积分、复模糊函数在光滑曲线上的积分；第5章介绍了模糊复级数理论；第6章对模糊复分析理论的相关问题的研究进展作了介绍．

本书可作为高等学校数学专业的本科高年级选修课教材，以及基础数学和应用数学专业的硕士专业课教材，也可供从事数学研究的科技人员阅读参考．

图书在版编目(CIP)数据

模糊复分析理论基础/马生全著．—北京：科学出版社，2010
ISBN 978-7-03-027046-7
Ⅰ. 模…　Ⅱ. 马…　Ⅲ. 模糊数学-复分析　Ⅳ. O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 045968 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：赵桂芬
责任印制：钱玉芬／封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2010年4月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2010年4月第一次印刷　印张：14
印数：1—2 500　字数：270 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

作 者 简 介

马生全，教授，硕士生导师．1962 年 2 月出生，回族，中共党员．1985 年 6 月毕业于西北民族大学数学系数字专业，1985 年 7 月～2006 年 6 月在西北民族大学数学系从事教学与科研工作，2001 年评为甘肃省优秀专家，2003 年评为教授，2004～2006 年任西北民族大学计算机科学与信息工程学院院长，2006 年荣获“中国信息化建设优秀学术带头人”称号；2006 年 7 月调入海南师范大学数学系从事教学和科研工作．兼任中国运筹学会模糊信息与工程专业委员会常务理事，中国系统工程学会模糊数学与模糊系统专业委员会理事，国际一般系统论中国模糊信息与模糊工程学会常务理事．在国内外各类学术刊物发表论文 80 多篇，近年在国际权威刊及国内核心期刊发表论文 30 多篇，其中被 SCI, EI, ISTP 检索 8 篇，出版著作两部，获得省级科研奖励 5 项，主持完成教育部、国家民委重点科研项目两项，国际合作(与加拿大渥太华大学)项目一项，主持省级科研项目两项．

研究方向：模糊系统理论及其应用；数量经济学；民族区域经济发展．

序　　言

模糊复分析是一个可能出现应用奇彩而在数学上又甚为繁难的新垦区，经过开拓者们 20 年的艰辛研究，其基本轮廓已然显现．马生全教授所著《模糊复分析理论基础》一书的出版，可算是这个新分支逐渐走向成熟的一个标志．

经典数学的模糊化往往会被人看成是琐碎的平移性工作，模糊复分析的工作却不是平庸的．在什么地方以及用什么方式模糊化？能否在保持数学严谨性的前提下建立具有运用可行性的理论系统？这是模糊复分析所要面临的问题．正确的选择既要求有数学的广度和深度，更需要有战略性的眼光．马生全教授在这一领域中多年探索，在不少方面，尤其是在模糊可测函数等方面作出了领先的研究．按照他本人的构思，概括并提升了国内外同领域的最新成果，总结性地写成了此书，为模糊复分析勾画出了一个完整而系统的轮廓，思路清晰，论述简明严谨，值得我们反复阅读．

汪培庄 谨识

2009 年 10 月 12 日

前　言

自 1965 年美国 California 大学 L. A. Zadeh 提出模糊集以来, 在世界各国模糊学者的共同努力下, 模糊数学理论及其应用研究取得了长足的发展, 模糊数学已成为一个具有广泛应用的新学科, 其中, 模糊实分析学的研究, 在模糊数学界前辈吴从炘先生的带动下, 其理论已相当深入.

模糊复分析学是模糊分析学的一个新的分支学科. 从 1989 年 J. J. Buckley (Mathematics Department, University Of Alabama at Birmingham, U S A) 在国际权威刊物*Fuzzy Sets and Systems*上首次发表论文 "Fuzzy complex numbers" 开始, 国内外学者们才开始了解到模糊复数的概念, 并引起了学者们的关注, 特别是其理论在模糊动力系统理论、模糊随机系统理论中的应用引起了学者们的广泛兴趣. 然而由于模糊复分析是一门新学科, 目前才处于发展阶段, 其理论研究目前还不完善, 需要深入研究发展. 模糊复分析理论的发展将在模糊系统理论, 尤其是模糊动力系统理论中有着广泛的应用, 并在计算机智能化领域中有着广阔的应用前景.

关于模糊复分析理论研究方面, 作者曾根据自己几年来的研究, 综合国内外研究者的工作, 于 2001 年由民族出版社出版了一本《模糊复分析》. 除此之外, 迄今为止, 国内外还没有一本介绍该理论的专门著作. 现在看来原作《模糊复分析》在内容上还是不成体系, 只是该理论的一些初步认识, 在理论体系上还不够系统, 现时过 8 年之多, 虽然说模糊复分析理论的研究发展目前还不够完善, 但较 8 年前还是有新的进展. 为了使该理论进一步发展, 有必要总结其前期的研究成果, 及时地让更多的研究者了解该学科的发展状况, 作者决定将本书呈现给对此感兴趣的读者, 抛砖引玉, 试图引起更多学者的兴趣, 共同深入研究, 推动模糊复分析理论的发展.

本书可以认为是原作的更新版本, 在内容和写作格式上较原作都有较大的更新, 增加了近年来作者的很多最新研究成果, 有些内容还是首次与读者见面, 特别是其中增加了一些有关问题研究动态的评论, 可使读者对相关问题的研究思路受到启发. 在每个章节后面都附有参考文献, 这为读者提供了方便.

本书试图用不大的篇幅, 较系统地介绍迄今为止国内外有关模糊复分析理论研究的最新成果, 用简练的语言介绍目前该理论研究的主要成果. 在写作方式上, 尽量较全面地陈述主要结果, 为了节省篇幅, 许多定理省略其证明过程, 有兴趣的读者可参考相关参考文献.

全书共 6 章. 绪论对模糊复分析学的发展作了简单的概述, 扼要地介绍了模糊复分析学研究的基本思路及目前已取得的主要成果; 第 1 章是预备知识, 主要是为

了介绍后面的相关内容而做的必要准备, 介绍了模糊集的概念及运算、模糊集的分解定理与表现定理, 并简要介绍了模糊代数和模糊拓扑学的基本概念; 第 2 章专题介绍了实模糊数的概念、运算及性质、几种特殊的模糊数及有关运算、模糊数的模糊距离、模糊数的模糊极限及其性质、模糊数空间及其有关重要性质, 并介绍了模糊数排序方法和一个应用实例; 第 3 章介绍了模糊复分析的基本概念, 包括模糊复集与模糊复数、复模糊集与复模糊数概念, 以及它们的表现形式及相关运算性质, 特别介绍了有界闭复模糊数集及其性质、Fuzzy 复数值映射及其不动点性质, 为第 4 章打下基础; 第 4 章介绍了模糊复分析学基础理论和方法, 包括复模糊集值函数的基本概念与性质、复模糊函数的连续性、复模糊集值函数的基本概念与性质、模糊复数值映射的不动点研究、复模糊集值函数的微分、模糊值函数的曲线和曲面积分、复模糊集值函数的积分、复 Fuzzy 测度与复 Fuzzy 积分、复 Fuzzy 值复 Fuzzy 积分、复 Fuzzy 可测函数的新讨论、复模糊函数在光滑曲线上的积分, 特别介绍的 4.10 节的内容是目前作者的最新成果, 是第一次与读者见面的; 第 5 章介绍了模糊复级数理论, 包括 Fuzzy 集序列的极限及其运算法则、实 Fuzzy 数序列的收敛性、实 Fuzzy 数序列的收敛性、实 Fuzzy 数项级数概念及性质、实 Fuzzy 数项级数收敛性判别法则、区间值函数与模糊值函数项级数的收敛性、复 Fuzzy 数项级数及其收敛性、复模糊值函数级数及其收敛性等; 第 6 章对模糊复分析理论的相关问题的研究进展作了介绍, 首先简要介绍了模糊数系的发展, 其次介绍了模糊测度与模糊积分理论的发展现状, 并对模糊复分析进一步的研究课题进行了讨论.

本书的出版得到了海南师范大学学术著作出版项目以及海南师范大学数学与统计学院重点学科的资助.

我国著名模糊数学家、模糊数学界前辈汪培庄先生对本书的写作给予了耐心指导, 并为本书写了序言, 在此致以诚挚的谢意.

本书在写作过程中得到了海南师范大学张诚一教授的鼓励和支持, 研究生李德源、李娟、陈梅琴、黄亦男、王强、王冷等在资料整理、书稿的编辑排版等方面做了大量的工作, 作者在此表示感谢.

由于作者水平所限, 疏漏及不足在所难免, 敬请读者批评指正.

马生全

2009 年 10 月 3 日

于海南师范大学

目　录

绪论　模糊复分析学发展概要

0.1　模糊复分析学发展概要

自 1965 年美国 California 大学 L. A. Zadeh 教授提出模糊集合以来, 在世界各国模糊学者的共同努力下, 模糊数学理论及其应用研究取得了长足的进步, 模糊数学业已成为一个具有广泛应用的新学科, 其中, 模糊实分析学的研究在模糊数学界前辈吴从炘的带动下, 理论已相当深入. 模糊复分析学是模糊分析学的一个新的分支学科, 其发展将在模糊系统理论, 尤其是模糊动力系统理论中有着广泛的应用, 并在计算机智能化领域中有着广泛的应用前景.

关于模糊复分析分支的研究工作, 从 1989 年 Buckley[1] (Mathematics Department, University Of Alabama at Birmingham, U S A) 在国际权威刊物*Fuzzy Sets and Systems* 上首次发表论文 "Fuzzy complex numbers" 开始, 国内外一些学者才开始了解到模糊复数的概念, Buckley 先后对模糊复数的运算、模糊复函数及其运算进行了进一步的讨论. 1991 年、1992 年, Buckley[2,3] 又对模糊复函数的微分与积分问题从一个侧面进行了讨论, 其思路已向建立模糊复分析学结构延伸, 但国内外对此问题的系列研究涉入人员甚少, 致使该学科的发展受到了极大的影响. 1993 年, 张跃和王光远[4] 在其著作《模糊随机动力系统》中以区间数为基础对模糊复集、复模糊集、模糊复数、复模糊数、模糊复函数等概念进行了全面讨论, 采用复数域 $\mathbf{C}$ 到 $[0,1]$ 上的映射给出模糊复集合概念, 利用正规模糊复集合给出了模糊复数 (fuzzy complex number) 的一般概念, 并结合模糊集的截集性质给出了模糊复数的四则运算. Buckley[1] 则采用映射的观点给出了模糊复数的分析定义, 把运算看成一种映射, 利用模糊数学的扩张原理给出了模糊复数的分析运算. 张跃和王光远[4] 利用实模糊数构造复模糊集, 建立了复模糊集的包含、相等、交、并、截等基本运算, 取得了以复模糊集的分解定理、表现定理、扩张原理为代表的一系列重要结论. 1996 年以来, 马生全等[5~8] 根据以上模糊复数的定义得到了一些模糊复数的运算性质, 在 Buckley 的分析定义下, 深刻研究了模糊复数的表现形式.

关于模糊复积分理论, 不论是国际还是国内的研究, 其工作都比较少, 模糊复积分理论的发展目前尚不成熟. 1990~1991 年, Buckley 首次研究了模糊复积分法. 1992 年在*Fuzzy Sets and Systems* 上发表了重要论文 "Fuzzy complex analysis II:Integration[3]", 全面研究了复平面上可求长曲线到模糊复数集间的模糊复映射的模糊围道积分. 1993 年, 张跃和王光远[4] 利用区间值函数给出了复模糊集值函数

积分概念, 对一元复区间值函数、多元复区间值函数、一元复集值函数、多元复集值函数的积分问题进行了讨论. 1996 年, 仇计清等[9] 首先研究了复模糊测度概念, 以此为基础对复模糊可测函数给出了复模糊积分概念, 其概念实际上是两类特殊成对出现的广义三角模 $S[x,y]=\min\{x,y\}$ 和 $S[x,y]=xy$ 意义下的广义模糊积分在复域上的推广. 1998 年, 仇计清等[17] 对复数域 $\mathbf{C}$ 中所有非空紧凸子集所成类在 Hausdroff 度量生成的拓扑意义下, 结合强可测函数给出了复平面上光滑有向曲线上的复模糊函数的积分概念. 2001 年, 马生全[5] 综合实分析与区间分析方法较全面讨论了模糊复积分问题. 2002 年, 马生全[13] 结合 Buckley[3] 的观点, 从模糊映射的角度讨论了模糊复围道积分问题.

近年来, 马生全在以上这些研究工作的基础上, 对模糊复分析学的基本问题展开了系列研究, 从模糊复数集到模糊复函数, 讨论了模糊复函数的极限、连续、可微、积分等问题[5,10,12,14], 初步建立了模糊复级数理论的基本概念 (参见文献 [5, 11~13, 14, 15]), 基本形成了模糊复分析学的理论框架 (参见文献 [5]).

0.2　模糊复分析学研究的基本思路及已取得成果简介

0.2.1　模糊复数的建立及其运算

1989 年, Buckley 引入模糊复数概念标志着模糊复分析研究的开始. 模糊复数作为模糊复分析学研究的最基本概念, 其建立有以下两种方式.

(1) Buckley[1] 用隶属函数的分析性质按下列形式给出:

设映射 $\tilde{Z}:\mathbf{C}\to[0,1]$, 称 $\tilde{Z}$ 为模糊复数当且仅当 $\tilde{Z}(z)$ 连续, Z_α 是开的、有界的、连通且单连通的, $Z_1=\{z|\tilde{Z}(z)=1\}\neq\varnothing$ 是紧的、弧连通且单连通的, 其中, $Z_\alpha=\{z\in\mathbf{C}|\tilde{Z}(z)\geqslant\alpha\}$ 为 $\tilde{Z}$ 的 α 截集, $\forall\alpha\in(0,1]$.

基于以上概念, 把运算看成一种映射, 对 $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 的任一映射 $f(z_1,z_2)=w$, 经扩张原理将其推广到 $\tilde{C}\times\tilde{C}$ 到 $\tilde{C}$ 的映射 $f(\tilde{Z}_1,\tilde{Z}_2)=\tilde{W}$, 其隶属函数为

$$W(w)=\sup\{\pi(z_1,z_2)|f(z_1,z_2)=w\},\quad \pi(z_1,z_2)=\min\{Z_1(z_1),Z_2(z_2)\}$$

其中, $z_1,z_2,w\in\mathbf{C}$. $\tilde{C}$ 表示 $\mathbf{C}$ 上的全体模糊集, $\tilde{Z}_1,\tilde{Z}_2\in\tilde{C}$, $Z_1(z_1),Z_2(z_2)$ 分别表示 $\tilde{Z}_1,\tilde{Z}_2$ 的隶属函数, 从而建立了模糊复数的运算 (四则运算是其一种特例), 依此来研究模糊复数的运算性质.

(2) 张跃和王光远[4] 用模糊复集给出下列概念:

把复数域 $\mathbf{C}$ 到 [0,1] 的映射 $\tilde{Z}:\mathbf{C}\to[0,1]$ 称模糊复集合. 用 $\tilde{Z}(z)$ 表示模糊复集 $\tilde{Z}$ 的隶属函数. $Z_\alpha=\{z\in\mathbf{C}|\tilde{Z}(z)\geqslant\alpha\}$ 为 $\tilde{Z}$ 的 α 截复集. 称 $\tilde{Z}$ 是凸模糊复集当且仅当 Z_α 是 $\mathbf{C}$ 上的凸复集. 称 $\tilde{Z}$ 为正规的当且仅当 $\{z\in\mathbf{C}|\tilde{Z}(z)=1\}\neq\varnothing$, 称复数域 $\mathbf{C}$ 上的正规凸模糊复集为模糊复数, $\forall\alpha\in(0,1]$.

0.2.2 复模糊集与复模糊数

1. 复模糊集

张跃和王光远[4] 采用 $\mathbf{R}$ 上实模糊数, 从形式上定义了复模糊集 (complex fuzzy sets) 合. 用 $F(\mathbf{R})$ 表示 $\mathbf{R}$ 上全体实模糊数, $\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in F(\mathbf{R})$. 称 $\tilde{Z} = \tilde{X} + \mathrm{i}\tilde{Y}$ 为复模糊集, 其隶属函数记为 $\tilde{Z}(\cdot)$, $\tilde{Z}(\cdot) = \tilde{X}(\cdot) \wedge \tilde{Y}(\cdot)$, 其 α 截集仍记为 Z_α,

$$Z_\alpha = (\tilde{X} + \mathrm{i}\tilde{Y})_\alpha = X_\alpha + \mathrm{i}Y_\alpha = \{z = x + \mathrm{i}y | x \in X_\alpha, y \in Y_\alpha\}$$

$$Z_{\underset{\cdot}{0}} = \mathrm{supp}\tilde{Z} = \mathrm{supp}\tilde{X} + \mathrm{i}\,\mathrm{supp}\tilde{Y} = \{z = x + \mathrm{i}y | x \in \mathrm{supp}\tilde{X}, y \in \mathrm{supp}\tilde{Y}\}$$

称为 $\tilde{Z}$ 的支复集, 其中, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}, X_\alpha, Y_\alpha$ 分别为 $\tilde{X}, \tilde{Y}$ 的 α 截集.

用 $C^F(\mathbf{C})$ 表示 $\mathbf{C}$ 上的全体复模糊集, 其交、并运算规定为

$$\tilde{Z}_1 = \tilde{X}_1 + \mathrm{i}\tilde{Y}_1, \tilde{Z}_2 = \tilde{X}_2 + \mathrm{i}\tilde{Y}_2, \quad \tilde{X}_j, \tilde{Y}_j \in F(\mathbf{R}), j = 1, 2$$

则对 $\forall z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C}$,

$$(\tilde{Z}_1 \bigcap \tilde{Z}_2)(z) \triangleq (\tilde{X}_1 \bigcap \tilde{X}_2)(x) \wedge (\tilde{Y}_1 \bigcap \tilde{Y}_2)(y) = (\tilde{X}_1(x) \wedge \tilde{X}_2(x)) \wedge (\tilde{Y}_1(y) \wedge \tilde{Y}_2(y))$$

$$(\tilde{Z}_1 \bigcup \tilde{Z}_2)(z) \triangleq (\tilde{X}_1 \bigcup \tilde{X}_2)(x) \wedge (\tilde{Y}_1 \bigcup \tilde{Y}_2)(y) = (\tilde{X}_1(x) \vee \tilde{X}_2(x)) \wedge (\tilde{Y}_1(y) \vee \tilde{Y}_2(y))$$

从而得到复模糊集的分解定理、表现定理及扩张定理如下:

定理 0.2.1[4] (分解定理 I) 若 $\tilde{Z} = \tilde{X} + \mathrm{i}\tilde{Y}$ 为 $\mathbf{C}$ 上的复模糊集, 则

(1) $\tilde{Z} = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha Z_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha (X_\alpha + \mathrm{i}Y_\alpha) \triangleq \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha X_\alpha + \mathrm{i} \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha Y_\alpha$;

(2) $\tilde{Z} = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1)} \alpha Z_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1)} \alpha (X_{\underset{\cdot}{\alpha}} + \mathrm{i}Y_{\underset{\cdot}{\alpha}}) \triangleq \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1)} \alpha X_{\underset{\cdot}{\alpha}} + \mathrm{i} \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1)} \alpha Y_{\underset{\cdot}{\alpha}}$;

(3) 若 Q 为 $[0,1]$ 中有理点集, 则 $\tilde{Z} = \bigcup\limits_{\alpha \in Q} \alpha Z_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in Q} \alpha Z_{\underset{\cdot}{\alpha}}$.

定理 0.2.2[4] (分解定理 II) 设 $\tilde{Z} = \tilde{X} + \mathrm{i}\tilde{Y}$ 为 $\mathbf{C}$ 上的复模糊集, 记 $P(\mathbf{C})$ 为 $\mathbf{C}$ 上幂集, 令

$$H : [0, 1] \to P(\mathbf{C}), \quad \alpha \to H(\alpha)$$

满足

$$Z_{\underset{\cdot}{\alpha}} = X_{\underset{\cdot}{\alpha}} + \mathrm{i}Y_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq Z_\alpha = X_\alpha + \mathrm{i}Y_\alpha$$

则

(1) $\tilde{Z} = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha H(\alpha)$;

(2) $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow H(\alpha_1) \subseteq H(\alpha_2)$;

(3) $Z_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda<\alpha} H(\lambda), \alpha \in (0,1]$;

(4) $\underset{\cdot}{Z_\alpha} = \bigcup\limits_{\lambda>\alpha} H(\lambda), \alpha \in [0,1)$.

令

$$H : [0,1] \to P(\mathbf{C}), \quad \alpha \to H(\alpha) = H_1(\alpha) + \mathrm{i}H_2(\alpha)$$

满足

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow H(\alpha_1) = H_1(\alpha_1) + \mathrm{i}H_2(\alpha_1) \supseteq H(\alpha_2) = H_1(\alpha_2) + \mathrm{i}H_2(\alpha_2)$$

则称 H 为 $\mathbf{C}$ 上的复集合套. 用 $C^U(\mathbf{C})$ 表示全体 $\mathbf{C}$ 上复集合套的全体.

定理 0.2.3[4] (复模糊集的表现定理)　令

$$T : C^U(\mathbf{C}) \to C^F(\mathbf{C})$$

$$H \to T(H) \triangleq \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H(\alpha) \triangleq \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H_1(\alpha) + \mathrm{i}\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H_2(\alpha)\right)$$

$$\triangleq T(H_1) + \mathrm{i}T(H_2)$$

则 T 是 $C^U(\mathbf{C})$ 到 $C^F(\mathbf{C})$ 的满射且

(1) $T(H)_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq T(H)_\alpha, \alpha \in [0,1]$;

(2) $T(H)_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda<\alpha} H(\lambda), \alpha \in (0,1]$;

(3) $T(H)_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcup\limits_{\lambda>\alpha} H(\lambda), \alpha \in [0,1)$.

定理 0.2.4[4] (复模糊集合的扩张定理)　U, V 为两个复集合, 设映射

$$f : U \subseteq \mathbf{C} \to V \subseteq \mathbf{C}, \quad z = f(z) = w = u + \mathrm{i}v$$

则 f 可诱导出一个 $C^F(U)$ 到 $C^F(V)$ 的映射及 $C^F(V)$ 到 $C^F(U)$ 的映射,

(1) $\forall \tilde{D} \in C^F(U)$, $\tilde{E} \in C^F(V)$,

$$f : C^F(U) \to C^F(V), \quad \tilde{D} \to f(\tilde{D}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha f(D_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,1)} \alpha f(D_{\underset{\cdot}{\alpha}})$$

$$f^{-1} : C^F(V) \to C^F(U), \quad \tilde{E} \to f^{-1}(\tilde{E}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha f^{-1}(E_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,1)} \alpha f^{-1}(E_{\underset{\cdot}{\alpha}})$$

(2) $\forall \tilde{D} \in C^F(U)$,

$$f(\tilde{D}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha f(H_D(\alpha)), \quad f^{-1}(\tilde{E}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha f^{-1}(H_E(\alpha))$$

其中, $D_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H_D(\alpha) \subseteq D_\alpha$, $E_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H_E(\alpha) \subseteq E_\alpha$.

2. 复模糊数

复模糊集 $\tilde{Z} = \tilde{X} + \mathrm{i}\tilde{Y} \in C^F(\mathbf{C})$ 在 $\mathbf{C}$ 上是凸的当且仅当 $Z_\alpha = X_\alpha + \mathrm{i}Y_\alpha$ 为 $\mathbf{C}$ 上的凸复集, $\forall \alpha \in (0,1]$.

称 $\tilde{Z}$ 为正规复模糊集当且仅当 $\{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C} | \tilde{Z}(z) = \tilde{X}(z) \wedge \tilde{Y}(z) = 1\} \neq \varnothing$.

称复数域 $\mathbf{C}$ 上的正规凸复模糊集 $\tilde{Z} = \tilde{X} + \mathrm{i}\tilde{Y}$ 为 $\mathbf{C}$ 上的复模糊数.

利用复模糊集的扩张原理, 将复数域 $\mathbf{C}$ 上的代数运算 $*$,

$$* : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad (z_1, z_2) \to w = z_1 * z_2$$

扩张到复数域 $\mathbf{C}$ 上的复模糊集间的相应运算

$$* : C^F(\mathbf{C}) \times C^F(\mathbf{C}) \to C^F(\mathbf{C}), \quad (\tilde{E}, \tilde{D}) \to \tilde{E} * \tilde{D} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha(E_\alpha * D_\alpha)$$

其中,

$$E_\alpha * D_\alpha = \{w | \exists (z_1, z_2) \in E_\alpha \times D_\alpha, z_1 * z_2 = w\}$$

$$(\tilde{E} * \tilde{D})(w) = \bigvee_{z_1 * z_2 = w} (\tilde{E}(z_1) \wedge \tilde{D}(z_2))$$

(如 “$+, -, \cdot, \div$” 四则运算, 即为其中一种特例).

对有界闭复模糊数有下列表现定理:

定理 0.2.5[4] 设 $H : (0,1] \to I(\mathbf{C}) = \{Z = X + \mathrm{i}Y | X, Y \in I(\mathbf{R})\}$, $I(\mathbf{R})$ 为 $\mathbf{R}$ 上的全体区间数,

$$\alpha \to H(\alpha) = [X_\alpha^-, X_\alpha^+] + \mathrm{i}[Y_\alpha^-, Y_\alpha^+] \neq \varnothing$$

满足

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \quad [X_{\alpha_1}^-, X_{\alpha_1}^+] + \mathrm{i}[Y_{\alpha_1}^-, Y_{\alpha_1}^+] \supseteq [X_{\alpha_2}^-, X_{\alpha_2}^+] + \mathrm{i}[Y_{\alpha_2}^-, Y_{\alpha_2}^+]$$

则

(1) $\tilde{Z} = \bigcup\limits_{\alpha \in (0,1]} \alpha H(\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in (0,1]} \alpha[X_\alpha^-, X_\alpha^+] + \mathrm{i} \bigcup\limits_{\alpha \in (0,1]} \alpha[Y_\alpha^-, Y_\alpha^+] \in C_0^F(\mathbf{C})$;

(2) $\tilde{Z}_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H(\alpha_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [X_{\alpha_n}^-, X_{\alpha_n}^+] + \mathrm{i} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [Y_{\alpha_n}^-, Y_{\alpha_n}^+]$,

其中, $\alpha \in (0,1]$, $\alpha_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)\alpha$.

0.3 模糊复分析学的基础研究

模糊复分析学研究的最基本概念是复模糊集值函数, 它是模糊复分析学研究的主要对象. 只有对复模糊集值函数的概念、基本运算、基本性质等有了较深入的了解, 才能深入地研究模糊复分析学的基本问题.

0.3.1 复模糊集值函数概念

设 Ω 是平面或空间的一可度量几何体, 映射

$$\bar{f}:\Omega\to\bar{R},\quad P\mapsto\bar{f}(P)=[f^-(P),f^+(P)],\forall P\in\Omega$$

称为 Ω 上的区间值函数. 若 $P_0\in\Omega,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $P\in U(P_0,\delta)\bigcap\Omega$ 时有 $d(\bar{f}(P),\bar{f}(P_0))<\varepsilon$, 则称 $\bar{f}$ 在 P_0 点连续, 其中, $U(P_0,\delta)=\{P|\rho(P,P_0)<\delta\}$ 为 P_0 的 δ 邻域. $\bar{f}=[f^-,f^+]$ 在 Ω 上连续的充要条件为 f^- 及 f^+ 在 Ω 上均连续.

映射 $\tilde{f}:\Omega\to\tilde{R},P\mapsto\tilde{f}(P)$($\tilde{R}$ 为 $\mathbf{R}$ 上实模糊数集) 称为 Ω 上的模糊值函数, 其 λ 截函数记为 f_λ,

$$f_\lambda:\Omega\to\bar{R},\quad P\mapsto f_\lambda(P)\triangleq(\tilde{f}(P))_\lambda\triangleq[f_\lambda^-(P),f_\lambda^+(P)]$$

由分解定理有

$$\tilde{f}(P)\triangleq\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda f_\lambda(P)\triangleq\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[f_\lambda^-(P),f_\lambda^+(P)]$$

对 $\forall\lambda\in(0,1],f_\lambda$ 在 Ω 上连续, 称模糊值函数 $\tilde{f}$ 在 Ω 上分层连续, 简称 $\tilde{f}$ 在 Ω 上连续.

记 $\mathbf{R}$ 为实数域, $\mathbf{C}$ 为复数域, $F_0(\mathbf{R})$ 为 $\mathbf{R}$ 上的有界闭模糊数全体, $C_0^F(\mathbf{C})$ 为 $\mathbf{C}$ 上的有界闭复模糊数全体, $I(\mathbf{C})$ 为 $\mathbf{C}$ 上的闭复区间数全体. $T\subseteq\mathbf{R}$, 称

$\tilde{A}:T\to F_0(\mathbf{R}),\ t\to\tilde{A}(t)$ 为 T 上的实模糊集值函数;

$\tilde{Z}:T\to C_0^F(\mathbf{C}),\ t\to\tilde{Z}(t)=\tilde{X}(t)+\mathrm{i}\tilde{Y}(t)$ 为 T 上的复模糊集值函数;

$f:T\to I(\mathbf{R})=\{[x,y]|x,y\in\mathbf{R},x\leqslant y\},\ t\to f(t)=[f^-(t),f^+(t)]$ 为 T 上的实区间值函数, $f^-(t),f^+(t)$ 均为 T 上的实函数.

若 $g(t),h(t)$ 均为 T 上的实区间值函数, 则称 $f(t)=g(t)+\mathrm{i}h(t)$ 为 T 上的复区间值函数. T 上的模糊集值函数 $\tilde{g}(t)$ 的 α 截函数记为 $g_\alpha(t)$, 即

$$g_\alpha:T\to I(\mathbf{R}),\quad t\to g_\alpha(t)\triangleq(\tilde{g}(t))_\alpha,\forall\alpha\in(0,1]$$

T 上的复模糊集值函数 $\tilde{f}(t)=\tilde{g}(t)+\mathrm{i}\tilde{h}(t)$ 的 α 截函数记为 $f_\alpha(t)$, 即

$$f_\alpha:T\to I(\mathbf{C}),\quad t\to f_\alpha(t)\triangleq g_\alpha(t)+\mathrm{i}h_\alpha(t)\triangleq(\tilde{g}(t)+\mathrm{i}\tilde{h}(t))_\alpha,\forall\alpha\in(0,1]$$

定理 0.3.1[5] (1) $\tilde{f}(t)$ 为 T 上模糊集值函数的充要条件为对 $\forall\alpha\in(0,1]$, $\tilde{f}(t)$ 的 α 截函数 $f_\alpha(t)=[f_\alpha^-(t),f_\alpha^+(t)]$ 为 T 上的区间值函数, 并且

$$\tilde{f}(t)=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[f_\alpha^-(t),f_\alpha^+(t)\right]$$

其中,

$$f_\alpha^-(t)=\inf f_\alpha(t)=\inf\{x\in\mathbf{R}|\tilde{f}(t)(x)\geqslant\alpha\}$$
$$f_\alpha^+(t)=\sup f_\alpha(t)=\sup\{x\in\mathbf{R}|\tilde{f}(t)(x)\geqslant\alpha\}$$

(2) $\tilde{f}(t)=\tilde{g}(t)+\mathrm{i}\tilde{h}(t)$ 为 T 上的复模糊集值函数的充要条件为对 $\forall\alpha\in(0,1]$, $\tilde{f}(t)$ 的 α 截函数

$$f_\alpha(t)=g_\alpha(t)+\mathrm{i}h_\alpha(t)=[g_\alpha^-(t),g_\alpha^+(t)]+\mathrm{i}[h_\alpha^-(t),h_\alpha^+(t)]$$

为 T 上的复区间值函数, 并且

$$\tilde{f}(t)=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[g_\alpha^-(t),g_\alpha^+(t)]+\mathrm{i}\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[h_\alpha^-(t),h_\alpha^+(t)]$$

其中,

$$g_\alpha^-(t)=\inf g_\alpha(t)=\inf\{x\in\mathbf{R}|\tilde{g}(t)(x)\geqslant\alpha\}$$
$$g_\alpha^+(t)=\sup g_\alpha(t)=\sup\{x\in\mathbf{R}|\tilde{g}(t)(x)\geqslant\alpha\}$$
$$h_\alpha^-(t)=\inf h_\alpha(t)=\inf\{y\in\mathbf{R}|\tilde{h}(t)(y)\geqslant\alpha\}$$
$$h_\alpha^+(t)=\sup h_\alpha(t)=\sup\{y\in\mathbf{R}|\tilde{h}(t)(y)\geqslant\alpha\}$$

0.3.2 复模糊集值函数的微分

复模糊集值函数的微分问题是模糊复分析学基础研究的最重要的问题之一, 其研究主要成果有以下两个方面.

1. 基于区间值函数的复模糊集值函数的微分

$T\subseteq\mathbf{R}$ 上的区间值函数 $f(t)=[f^-(t),f^+(t)]$, 如果 $f^-(t),f^+(t)$ 在 $t_0\in T$ 的导数 $f^{-'}(t_0),f^{+'}(t_0)$ 均存在, 则称 $f(t)$ 在 t_0 的导数存在且

$$f'(t_0)\triangleq[\min\{f^{-'}(t_0),f^{+'}(t_0)\},\max\{f^{-'}(t_0),f^{+'}(t_0)\}]$$

若 $f^{-'}(t_0)\leqslant f^{+'}(t_0)$, 则称 $f(t)$ 在 t_0 同序可导, 此时 $f'(t_0)=[f^{-'}(t_0),f^{+'}(t_0)]$; 若 $f^{-'}(t_0)\geqslant f^{+'}(t_0)$, 则称 $f(t)$ 在 t_0 反序可导, 此时 $f'(t_0)=[f^{+'}(t_0),f^{-'}(t_0)]$.

若 $\forall t\in T$, $f^{-'}(t),f^{+'}(t)$ 均存在, 则称

$$F(t)=f'(t)\triangleq[\min\{(f^{-'}(t),f^{+'}(t)\},\max\{f^{-'}(t),f^{+'}(t)\}]\triangleq[F^-(t),F^+(t)]$$

为 $f(t)$ 在 T 的区间值导函数, $f(t)$ 也称为 $F(t)$ 在 T 上的原函数.

令 $f(t)=g(t)+\mathrm{i}h(t)=[g^-(t),g^+(t)]+\mathrm{i}[h^-(t),h^+(t)]$ 为 T 上的复区间值函数，若 $g(t),h(t)$ 在 t_0 均可导，则称 $f(t)$ 在 $t_0\in T$ 点可导，并记为 $f'(t_0)=g'(t_0)+\mathrm{i}h'(t_0)$；若 $g(t),h(t)$ 在 T 上均可导，则称 $f(t)$ 在 T 上可导；若 $g(t),h(t)$ 在 T 上同序 (或反序) 可导，则称 $f(t)$ 在 T 上同序 (或反序) 可导.

T 上的复模糊集值函数 $\tilde{f}(t)=\tilde{g}(t)+\mathrm{i}\tilde{h}(t)$ 在 T 上可导当且仅当 $f_\alpha(t)=g_\alpha(t)+\mathrm{i}h_\alpha(t)$ 在 T 上可导，$\forall\alpha\in(0,1]$，并称

$$\tilde{F}(t)\triangleq\tilde{f}'(t)=\tilde{g}'(t)+\mathrm{i}\tilde{h}'(t)\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha(g_\alpha(t))'+\mathrm{i}\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha(h_\alpha(t))'$$

为 $\tilde{f}(t)$ 在 T 上的导函数，$\tilde{f}(t)$ 也称为 $\tilde{F}(t)$ 在 T 上的原函数. $\tilde{f}(t)=\tilde{g}(t)+\mathrm{i}\tilde{h}(t)$ 在 T 上同序 (或反序) 可导当且仅当 $f_\alpha(t)=g_\alpha(t)+\mathrm{i}h_\alpha(t)$ 在 T 上同序 (或反序) 可导.

定理 0.3.2[4]　设 $\tilde{f}(t)=\tilde{g}(t)+\mathrm{i}\tilde{h}(t)$ 为同序 (或反序) 可导的复模糊集值函数，则对 $\forall\alpha\in(0,1]$，$t\in T$，

$$f'_\alpha(t)=[g_\alpha^{-\prime}(t),g_\alpha^{+\prime}(t)]+\mathrm{i}[h_\alpha^{-\prime}(t),h_\alpha^{+\prime}(t)]\ (\text{或 }=[g_\alpha^{+\prime}(t),g_\alpha^{-\prime}(t)]+\mathrm{i}[h_\alpha^{+\prime}(t),h_\alpha^{-\prime}(t)])$$

且 $\tilde{f}'(t)\in C_0^F(\mathbf{C})$.

称 T 上的复模糊集值函数 $\tilde{f}(t)=\tilde{g}(t)+\mathrm{i}\tilde{h}(t)$ 在 T 上连续当且仅当 $f_\alpha(t)=g_\alpha(t)+\mathrm{i}h_\alpha(t)$ 是 T 上的连续复区间值函数，$\forall\alpha\in(0,1]$.

定理 0.3.3[4]　设 $\tilde{f}(t)=\tilde{g}(t)+\mathrm{i}\tilde{h}(t)$ 为 $T=[a,b]$ 上的连续复模糊集值函数，并且在 $[a,b]$ 上同序 (或反序) 可导，则

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t)&=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\int_\alpha^t g_\alpha(x)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\int_\alpha^t h_\alpha(x)\mathrm{d}x\\&\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\int_\alpha^t g_\alpha^-(x)\mathrm{d}x,\int_\alpha^t g_\alpha^+(x)\mathrm{d}x\right]+\mathrm{i}\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\int_\alpha^t h_\alpha^-(x)\mathrm{d}x,\int_\alpha^t h_\alpha^+(x)\mathrm{d}x\right]\\&\triangleq\int_\alpha^t\tilde{g}(x)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_\alpha^t\tilde{h}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

是 $\tilde{f}(t)=\tilde{g}(t)+\mathrm{i}\tilde{h}(t)$ 的同序 (或反序) 原函数，即 $\tilde{F}'(t)=\tilde{f}(t)$.

2.　基于映射观点下的复模糊集值函数的微分

Buckley[3] 于 1992 年从映射的角度给出了复模糊集值函数微分的较深刻的分析定义.

记 $\bar{R}$ 为实模糊数集，$\forall(a,b)\subset(-\infty,+\infty)$，令

$$F:(a,b)\to\bar{R},\quad F(t)=\bar{N}(t),\ a<t<b,\ \bar{N}(t)\in\bar{R},$$