青年自学读物

三角

SAN JIAO

辽宁省工科院校
“初等数学”编写组编

辽宁人民出版社

·青年自学读物·

三　　角

辽宁省工科院校“初等数学”编写组编

辽宁人民出版社
一九七三年·沈阳

三　角

辽宁省工科院校"初等数学"编写组编

*

辽宁人民出版社出版
(沈阳市南京街6段1里2号)
辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：7 5/8
字数：150,000 印数：1—110,000
1973年11月第1版 1973年11月第1次印刷
统一书号：7090·25 定价：0.62元

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

自然科学是人们争取自由的一种武装。人们为着要在社会上得到自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会进行社会革命。人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

出 版 说 明

为了适应广大青年自学政治和科学文化知识的需要，我们计划编辑出版一套青年自学读物。

辽宁省工科院校“初等数学”编写组编的“初等数学”就是选入青年自学读物的一种，其余将陆续出版。

编 者 的 话

编写这套“初等数学”的目的是帮助读者较系统地学习初等数学的基本知识，掌握准确而较熟练的运算方法，培养应用初等数学知识分析问题与解决问题的能力，提高自学和自己研究问题的能力。

遵照毛主席关于**“教材要彻底改革”**的指示，我们在编写过程中，力求贯彻政治与业务的统一，理论与实践相结合，以及少而精和便于自学等原则。由于我们对毛主席的教育革命思想学习得不好，书中一定会有缺点和错误，诚恳希望工农兵学员、革命教师及广大读者批评指正。

这套“初等数学”，分《代数》、《几何》、《三角》、《平面解析几何》四个分册出版，做为辽宁省各工科院校工农兵学员的文化补习教材，也适于各条战线的广大青年自学参考。

这套“初等数学”是在辽宁省教育局的领导下，经省内各工科院校共同研究讨论，由东北工学院负责执笔编写的。参加的院校有大连工学院、大连海运学院、大连铁道学院、大连轻工学院、大连水产专科学校、鞍山钢铁大学、阜新煤矿学院、抚顺化工学院、沈阳机电学院。此外，还有哈尔滨

工业大学、吉林工业大学、长春地质学院、沈阳气压机厂“七·二一”工人大学、沈阳市沈河区教师学校、沈阳冶金机械学校、沈阳有色金属学校等单位应邀参加了本书的审查工作，谨致谢意。

辽宁省工科院校“初等数学”编写组

一九七三年六月

目　　录

三角知识是广大劳动人民在长期的生产实践中，经常解决关于三角形的问题，不断总结经验，逐步积累起来的。它在生产实践和科学实验中有着广泛的应用.

三角所研究的主要问题是：三角形的解法，三角函数的性质以及它们的应用.

本着"实践——理论——实践"的原则，在讲述这部分内容时，我们力求从实践中引出概念，然后上升到理论，并应用于实践. 因此，对于如何把实际问题归纳成三角问题以及如何把所学的三角知识运用到实际中去，在学习时都应予以充分的注意.

第一章　锐角三角函数和直角三角形解法

恩格斯在《自然辩证法》中指出："任何一个三角形都可以分成两个直角三角形。"直角三角形不仅简单，而且非常有用. 因此，我们首先研究直角三角形的问题.

第一节　锐角三角函数

1·1　两个具体问题

在解决实际问题时，经常遇到有关三角形的计算问题.

这样就逐渐形成了三角函数的概念，现举例说明如下：

首先介绍两个在测量上常用的名词：

仰角与俯角 观测某物体时，视线和水平线的夹角，按视线在水平线的上方或下方，分别叫做仰角或俯角（图1—1）．

问题1 某大队劈山凿石，引水上山，在一个山坡下的河边修建了一座扬水站．已测出山的坡长 AB 为39米，从点 A 观测点 B 的仰角为32°．为了选择适当扬程的水泵，需要知道出水口的高度 BC 和水平距离 AC（图1—2①）．

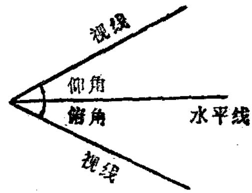

图 1—1

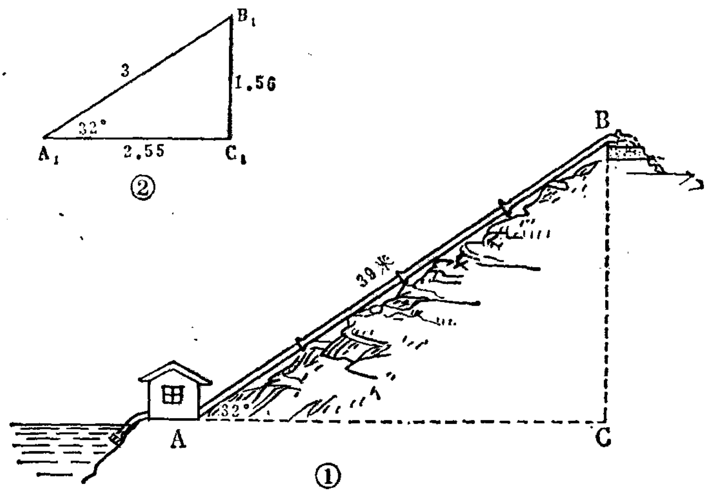

图 1—2

解：这个问题可以归结为：已知直角三角形的斜边和一个锐角，怎样去求它的两个直角边？要是能够知道这个直角三角形的直角边与斜边的比值的话，那么这个问题就能够解决。根据相似三角形的关系，这些比值是不难确定的，确定这些比值的具体作法如下：

作锐角 $\angle B_1A_1C_1 = 32°$。在 A_1B_1 边上取 $A_1B_1 = 3$ 厘米（不一定非取 3 厘米不可，适当长度就行），再作 $B_1C_1 \perp A_1C_1$，交 A_1C_1 边于 C_1 点（图1—2②）。这样便得到一个直角 $\triangle A_1B_1C_1$，且

$$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC.$$

量出 $B_1C_1 = 1.56$ 厘米，$A_1C_1 = 2.55$ 厘米，由此算出 $\triangle A_1B_1C_1$ 的直角边与斜边之比为

$$\frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \frac{1.56}{3} = 0.52,$$

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{2.55}{3} = 0.85.$$

由于 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$，所以

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

根据更比定理，得

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}.$$

$$\therefore \quad BC = AB \cdot \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = 39 \times 0.52 = 20.28 \text{（米）},$$

$$AC = AB \cdot \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = 39 \times 0.85 = 32.15 \text{（米）}.$$

答：出水口的高度为 20.28 米，出水口到扬水站的

水平距离为 32.15 米。

问题 2　某地开发煤田时，要在A点打一口斜井．这口斜井与地面成 25° 的倾角，直达煤田的B点．已知B点在地面上C点的正下方，且 $CB=400$ 米，问A点与C点的距离AC是多少？（图 1 — 3 ①）

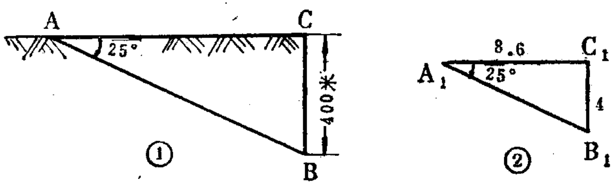

图　1 — 3

解：这个问题可以归结为：已知直角三角形的一个锐角和一个直角边，求另一个直角边．要是能够知道这个直角三角形的两条直角边的比值，那么这个问题就能够解决．仿照问题 1 的解法，作一个直角 $\triangle A_1B_1C_1$，使 $\angle C_1A_1B_1=25°$，$B_1C_1=4$ 厘米（图 1 — 3 ②）．量出 $A_1C_1=8.6$ 厘米，由此算出

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1}=\frac{8.6}{4}=2.15.$$

$$\because\quad \triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC,$$

$$\therefore\quad \frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}.$$

从而得

$$AC=BC\cdot\frac{A_1C_1}{B_1C_1}=400\times2.15=860\ (\text{米}).$$

答：A点到C点的距离是860米。

由此可见，直角三角形的两边之比是解决实际问题的关键．但是，如果每解决一个问题，都要画一个三角形来计算两边之比，不但费时间，而且也不够精确．因此，从实际的需要出发，必须进一步讨论两边之比的问题．

1·2 锐角三角函数的定义

在以下的讨论中，为了方便起见，我们用大写字母A、B、C分别表示一个直角三角形的三个顶点，同时也表示相应的三个角度，且用C表示其中的直角．用小写字母a、b、c分别表示BC、AC、AB各边的长度．此外，对A角说，BC边叫做A角的对边，AC边叫做A角的邻边（图1—4）．

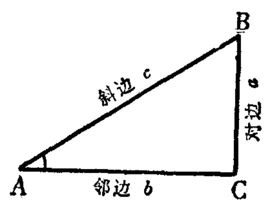

图 1—4

从几何里知道，当锐角A的大小固定时，直角$\triangle ABC$的大小虽然可以改变，但它的形状却固定了．因此，它的三边a、b、c中的任意两边之比就固定了．它们的比共有六个：

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b};$$

$$\frac{c}{a},\ \frac{c}{b},\ \frac{b}{a}.$$

后三个比是前三个比的倒数．由于这些比是解决有关实际问题的关键，故分别定义如下：

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{A\text{的对边}}{\text{斜　边}}$ 叫做A角的正弦，记作$\sin A$，

$\dfrac{b}{c}=\dfrac{A\text{的邻边}}{\text{斜　边}}$ 叫做A角的余弦，记作$\cos A$，

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{A\text{的对边}}{A\text{的邻边}}$ 叫做A角的正切，记作$\operatorname{tg}A$，

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{A\text{的邻边}}{A\text{的对边}}$ 叫做A角的余切，记作$\operatorname{ctg}A$，

$\dfrac{c}{b}=\dfrac{\text{斜　边}}{A\text{的邻边}}$ 叫做A角的正割，记作$\sec A$，

$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\text{斜　边}}{A\text{的对边}}$ 叫做A角的余割，记作$\csc A$.

即

$$\left.\begin{aligned}
\sin A&=\frac{a}{c}=\frac{A\text{的对边}}{\text{斜　边}},\\
\cos A&=\frac{b}{c}=\frac{A\text{的邻边}}{\text{斜　边}},\\
\operatorname{tg}A&=\frac{a}{b}=\frac{A\text{的对边}}{A\text{的邻边}},\\
\operatorname{ctg}A&=\frac{b}{a}=\frac{A\text{的邻边}}{A\text{的对边}},\\
\sec A&=\frac{c}{b}=\frac{\text{斜　边}}{A\text{的邻边}},\\
\csc A&=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜　边}}{A\text{的对边}}.
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

正弦、余弦、正切、余切、正割和余割统称A角的三角函数。其中前四个用得较多，是我们研究的重点。

例 1　已知直角三角形的斜边$c=13$，A角的对边$a=12$，试求A角的各三角函数。