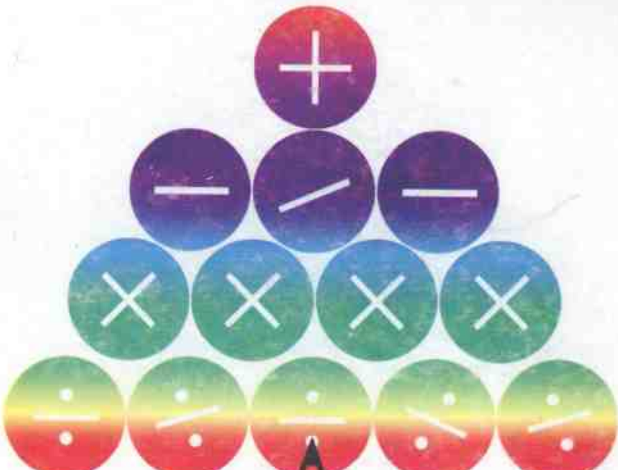
古今中外著名算题趣谈及详解

汤服成 蒋廷炉 编著



广西师范大学出版社

古今中外著名算题趣谈及详解

汤服成
蒋廷炉 编著

广西师范大学出版社

内容简介

本书收集了古今中外50个著名的且富有趣味性的算题，文字叙述上集知识性与趣味性于一体，让青少年读者在轻松愉快的情境下学到知识，品味到数学的思维方法和它的奇巧妙趣。

本书是具有小学高年级程度以上的青少年的有益课外读物。

古今中外著名算题趣谈及详解

汤服成　蒋廷炉　编著

广西师范大学出版社出版发行　　邮政编码:541001

(广西桂林市中华路36号)

柳州日报印刷厂印刷

*

开本:787×1092　1/32　印张:6.75　字数:146千字

1997年9月新一版　　1997年9月第一次印刷

印数:00001—10000册

ISBN　7-5633-1749-X/G·1400

定价:6.00元

前　言

数学是“科学的基础，认识的工具，思维的体操”。宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。从当前世界发展的大趋势来看，各门学科的数学化是当代科学发展的明显特征。正如马克思所说，一种科学只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了。

但是，由于数学本身高度的抽象性、严谨的逻辑性和思维的奇特性，不少人，特别是青少年学生，并不因为数学的重要而重视、进而热爱这门学科。相反，他们认为数学深奥难懂，枯燥无味，以至望而生畏，甚至最后放弃数学学习。至于说到因学习不得法而事倍功半的更是大有人在。

《古今中外著名算题趣谈及详解》收集了古今中外50个著名且富有趣味的算题，并归为五类。所谓趣谈，就是集知识性、趣味性于一体。所谓详解，就是使这些表面高深的问题的解法，注入现代数学所必需的、课本上又体现出来的数学思维，让小学、初中的学生都能看懂。写这本小册子，旨在从名题入手，激发兴趣，在轻松愉快的情境下学到知识，从乐中品味到数学的思维和它的奇巧妙趣，引导广大青少年学生步入生机盎然、妙趣横生的数学百花园。本书还希望对开拓高中学生、高等师范院校数学专业的学生的视野和数学思维也有一定的帮助。

作者上述的意愿能否如愿以偿，还当聆听读者的心声。

由于本书探究的大部分问题是古代与外国的名题，为尊重历史，我们对原题中使用的古代和外国的度量和货币单位均保持原貌，但在文中均加以注释，特此说明。

本书写作过程参阅了数以百计的书刊杂志，恕不能一一罗列，仅在此向这些作者致以衷心的谢意。

编　者

目　录

一、古题趣谈

二、巧思妙算

五、世界名题

一、古题趣谈

1. 百鸡百钱

我国古代数学书《张邱建算经》中有如下问题，也就是著名的百鸡百钱问题。大意是：

公鸡1只值钱①5，母鸡1只值钱3，小鸡3只值钱1。今有钱100，买鸡100只。问公鸡、母鸡、小鸡各买几只？

关于这个“百鸡百钱问题”还流传着下面一个故事哩！

在我国南北朝的时候，京城里有个卖鸡的张老老，所生一子，天资聪颖，勤学不怠。到十二三岁，已经博览群书，尤其富有算术的天才。邻居每遇疑难问题，或是钱银上发生纠纷，都由他一言解决。因此大家都叫他张神童，逐渐传扬开去，不久就远近闻名了。当朝的老丞相爱才若渴，一天，听人谈到张神童的算法，心中很是不信，当下想了一个方法要去试探他，于是唤他的仆人去打听张老老卖的鸡是什么价钱。不多时仆人回答说：“公鸡每只卖钱五文，母鸡每只卖钱三文，小鸡每三只卖钱一文。”老丞相就拿出一百文钱，命仆人去给张老老，叫他尽这一百文钱把三种鸡配成一百只，不多不少，明天送来。张老老暗想：这实在是一个难题，然而又不敢违命，当时只好一口答应。等到收市后，就开始把三种鸡配起

① 我国古代使用的货币是铜钱，单位是“文”，公鸡一只值钱5，意思是公鸡每只5文钱。

来。但是左配右配，总是配不成。正在无计可施的时候，他的儿子来了，问起情由，才知道是这样的一件事。于是安慰着父亲，叫他不要着急，明天总有办法。张神童当晚经过仔细研究，果然找到了答案。第二天选出了“公鸡 4 只，母鸡 18 只，小鸡 78 只”叫他父亲送到相府。老丞相拿来一算：4 只公鸡值钱二十文，18 只母鸡值钱五十四文，78 只小鸡值钱二十六文，共计 100 只鸡，恰巧值钱一百文。心里一高兴，立刻又拿一百文钱给张老老，叫他明天再送一百只鸡来，不过三种鸡的只数要换一种方法搭配。张老老口头答应着，心里很是担忧，垂头丧气地回到家，忙和儿子商量。儿子说：“你明天拿 8 只公鸡，11 只母鸡，81 只小鸡送去就是了。”第二天张老老依言送去，老丞相一算，又是一点不错。心里一高兴，又给张老老一百文钱，要再另配一百只鸡。张老老暗想：这回恐怕是无法应付了。不料他的儿子又检出“公鸡 12 只，母鸡 4 只，小鸡 84 只”叫父亲送去。老丞相一算，又丝毫不错，很是佩服，连忙问张老老是谁人配成的。张老老只得照实说了。老丞相立即召张神童来，授他官职。后来张神童年纪渐大，曾发明通分简法，级数算法等，著了一部书名叫《张邱建算经》。上面说的“百鸡百钱问题”也载在这部书中。

故事讲完了。现在我们来研究一下这类题的解答方法：

(Ⅰ)算术方法

用纯粹的算术眼光来观察这百鸡题，却是一个普通的混合比例题。因为 100 只鸡值钱一百文，平均每只就值钱一文。所以就它们损益（即亏盈）的数可以求得混合量的比，再用配分法来分配得下表：

平均价	品　名	原　价	比　较	混合量的比					
1文	公鸡	5文	损4文	1	1	2	1	3	…
	母鸡	3文	损2文	1	2	1	3	1	…
	小鸡	$\frac{1}{3}$文	益$\frac{2}{3}$文	9	12	15	15	21	…

上表应这样理解，若每只公鸡、母鸡都作一文卖，亏损$4+2=6$(文)，但小鸡也作一文卖，每只可盈益$\frac{2}{3}$文，现要盈益6文，才能亏盈抵消，所以，应当有小鸡$6\div\frac{2}{3}=9$只。才能亏盈相抵，混合量的比应为$1:1:9$. 于是依照这连比来把100只鸡分成3份。但是鸡的只数必须是整数，而$1+1+9=11$，不是100的约数，所以这个连比不适用。另行推求，得$3:1:21$就对了。

因为$3+1+21=25$，而25是100的约数，所以

$$\text{公鸡有：}100\text{只}\times\frac{3}{25}=12\text{只，}$$

$$\text{母鸡有：}100\text{只}\times\frac{1}{25}=4\text{只，}$$

$$\text{小鸡有：}100\text{只}\times\frac{21}{25}=84\text{只.}$$

若把混合量的比逐次推求下去，一定还可以得两个适用的连比：$2:9:39$，$8:11:81$. 按照这些连比计算，就可得上面故事中张神童所作的另两个答案：公鸡4只，母鸡18只，小鸡78只；或公鸡8只，母鸡11只，小鸡81只。

上法推得符合要求的三个不同的混合量的比，就可求得三个不同的答案。但是事实上要求得三个适用的连比，并非

容易。下面介绍方便一些的增减率加减法。

为此，我们先来研究张神童的三种答案的变化情况，发现公鸡的只数逐次多 4；母鸡的只数逐次少 7；小鸡的只数逐次多 3. 每次加多的鸡同减少的鸡都是 7 只，所以鸡的总数三次一样是 100 只。这是应该注意的一点。再有加多的 4 只公鸡和 3 只小鸡一共值钱 $5\text{文}\times 4+\frac{1}{3}\text{文}\times 3=21$ 文。减少的 7 只母鸡恰巧也是值钱 $3\text{文}\times 7=21$ 文，所以鸡的总价值三次都是一百文。这是应该注意的又一点。照此看来，这百鸡问题的答案，我们求到第一种之后，只要公鸡数加 4，母鸡数减 7，小鸡数加 3，就可以求到其余的答案。或先求到第三种答案，然后公鸡数减 4，母鸡数加 7，小鸡数减 3，也可求得其他的答案。这 4，7，3 我们可以称它做“增减率”。

再来研究一个问题，百鸡问题是否还有第四种答案呢？这很容易解决，用增减率加减就行了。现在把第三种答案增减如下：

公鸡 $12+4=16$ 只，母鸡 $4-7=-3$ 只，小鸡 $84+3=87$ 只，因鸡数不能是负数，所以这答案不适用。若继续进行，母鸡的只数终不能成正数。

再把第一种答案增减：

公鸡 $4-4=0$ 只，母鸡 $18+7=25$ 只，小鸡 $78-3=75$ 只，因为不能没有公鸡，所以这答案也不适用。若继续进行，公鸡的只数又成负数了。由此知道这个问题的答案再也没有第四种了。

（Ⅱ）代数解法

用代数眼光来观察百鸡问题，却是一个普通的不定方程

问题。因为未知数有三个，方程却只能列两个，所以答数也就不止一组了。

解：设公鸡 x 只，母鸡 y 只，小鸡 z 只，则公鸡共值钱 $5x$ 文，母鸡共值钱 $3y$ 文，小鸡共值钱$\frac{1}{3}z$文。得方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=100, & (1) \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100. & (2) \end{cases}$$

(2)×3－(1)得　　$14x+8y=200.$

$\therefore\quad 7x+4y=100.$　　(3)

观察(3)式，$4y$ 同 100 都是 4 的倍数，所以 x 一定也是 4 的倍数，从小到大地用 4 的倍数来代 x，同时求出 y 和 z 的值，列成下表：

x	4	8	12	16	20	…
y	18	11	4	-3	-10	…
z	78	81	84	87	90	…

表中只有前三组值是正整数，也正是本题的三种答案。

现用代数解法解下面类似的百钱买百货的古算题：

柑三梨四，一钱枣子买 14。百钱买百货，问柑、梨、枣各买几何？

题意是：柑子每个 3 文，梨子每个 4 文，枣子 1 文买 14 个。100 文钱可买柑、梨、枣各几个？

解：设买柑用钱 x 文，买梨用钱 y 文，买枣用钱 z 文。根据题意可得如下方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=100, & (1) \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+14z=100, & (2) \end{cases}$$

原方程组化为 $\begin{cases} 3x+3y+3z=300, & (3) \\ 4x+3y+168z=1200. & (4) \end{cases}$

(4)－(3)得　$x+165z=900$,

$\therefore\quad x=900-165z.$

由于 x，z 都是 0 至 100 之间的整数，

所以只能有　$z=5$. 因此

$$x=900-165\times5=75.$$

$$y=100-75-5=20.$$

$\therefore\quad \dfrac{x}{3}=\dfrac{75}{3}=25,\ \dfrac{y}{4}=\dfrac{20}{4}=5,\ 14z=14\times5=70.$

答：买柑 25 个，买梨 5 个，买枣子 70 个。

2. 和尚吃馒头

一百馒头一百僧，大僧三个更无争，小僧三人分一个，大小和尚各几人？

这是明朝程大位《算法统宗》中所载歌谣体算题之一。因为趣味颇浓，所以至今还流传在民间，而且被许多国家的书所收录。它的解法代表了一类问题的解法，现在学习它的解法还是很有必要的。

此题意是：有 100 个馒头和 100 个和尚，大和尚每人吃 3 个，三个小和尚分 1 个。问大、小和尚各有几人？

(Ⅰ)算术解法

方法 1　假定各人吃的馒头都增为原来的三倍，那么大

和尚一人吃九个，小和尚三人吃三个，一百人共吃馒头三百个。小和尚每人所吃馒头等于人数，大和尚每人所吃馒头比人数多 8. 今共吃馒头较人数多 200，200 是 8 的 25 倍，所以大和尚是 25 人，小和尚是 75 人。列式解答如下：

$(100\times3-100)\div(3\times3-\frac{1}{3}\times3)=25$ ……… 大和尚数

$100-25=75$ ………………………………… 小和尚数

方法 2　假定和尚的人数变成了三倍，而馒头数不变，那么大和尚三人吃馒头三个，小和尚九人吃馒头一个，300 人共吃馒头一百个，大和尚数等于所吃馒头数，小和尚人数比所吃馒头数多 8. 今人数比共吃馒头数多 200，200 是 8 的 25 倍，所以小和尚共吃馒头 25 个，由此知小和尚有 75 人。列式解答如下：

$(100\times3-100)\div(3\times3-\frac{1}{3}\times3)=25$ …………………

………………………………………… 小和尚吃馒头数

$25\times3=75$ ………………………………… 小和尚数

$100-75=25$ ………………………………… 大和尚数

方法 3　大和尚 1 人吃 3 个，小和尚 3 人吃 1 个，合并起来得大小和尚共 4 人，合吃 4 个。现在大小和尚共 100 人，合吃 100 个。由此知大小和尚共 4 人，其中有大和尚 1 人（即占和尚总数的$\frac{1}{4}$)，所以大小和尚共 100 人中，必有大和尚 25 人（即 $100\times\frac{1}{4}$）。列算式解答如下：

$100\div(3+1)=25$ ……………………………… 大和尚数

$100-25=75$ ………………………………… 小和尚数

再给出下面更通俗的解法：

(1)假设 100 人全是大和尚,应吃馒头多少个?

$$3\times100=300(\text{个}).$$

(2)100 人全是大和尚应吃 300 个,现在只有 100 个,缺少了多少个?

$$300-100=200(\text{个}).$$

(3)为什么会少 200 个馒头呢?因为事实上 100 人不全是大和尚,其中还有小和尚,一个小和尚比大和尚少吃多少个?

$$3-\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}(\text{个}).$$

(4)现在用一个小和尚去调换一个大和尚,就能少吃 $2\frac{2}{3}$ 个,缺少的 200 个馒头必须用多少个小和尚去调换呢?

$$200\div2\frac{2}{3}=75(\text{人}).$$

(5)小和尚有 75 人,大和尚有多少人呢?

$$100-75=25(\text{人}).$$

列成综合算式计算:

小和尚有多少人?

$$(300-100)\div\left(3-\frac{1}{3}\right)=200\div2\frac{2}{3}=75(\text{人}).$$

大和尚有多少人? $100-75=25(\text{人}).$

(Ⅱ)代数解法

解:设大和尚有 x 人,则小和尚有$(100-x)$人.根据题意列得方程:

$$3x+\frac{1}{3}(100-x)=100.$$

即 $$9x+100-x=300.$$

解得 $x=25$(人).

$$100-25=75(\text{人}).$$

即大小和尚分别为 25 人和 75 人。

著名数学家欧拉的著作中记载着与此相似的百蛋问题：

两个农妇一共带着 100 个鸡蛋到市场去卖。两个人的蛋数不同，但卖得的钱数一样。这时第一个农妇对第二个说："如果你的鸡蛋换给我，我可以卖得 15 个铜币。"第二个农妇回答道："如果你的鸡蛋换给我，我就只能卖得 $6\frac{2}{3}$个铜币。"问她们每人各有鸡蛋多少个？

先用代数方法来解。

设第一个农妇有 x 个鸡蛋，则第二个农妇有 $(100-x)$ 个鸡蛋。两人的蛋互换就变成第一个农妇有 $(100-x)$ 个鸡蛋，第二个农妇有 x 个鸡蛋。

这时，第一个农妇可卖得 15 个铜币，所以她卖蛋的价钱是每个$\frac{15}{100-x}$(铜币)。同样可以算出第二个农妇卖蛋的价钱是每个 $6\frac{2}{3}\div x=\frac{20}{3x}$ (铜币)。

这样可算出实际她们卖蛋得的钱数：

第一个农妇 $\frac{15}{100-x}\cdot x$,

第二个农妇 $\frac{20}{3x}\cdot(100-x)$,

再由她们卖蛋所得钱数一样列出方程：

$$\frac{15}{100-x}\cdot x=(100-x)\cdot\frac{20}{3x},$$

化简，得 $x^2+160x-8000=0$,