

考研必备

名师提点

考研数学 快捷解题

方法

(数学一适用)

◎ 陈启浩 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

名师提点考研数学快捷解题方法 (数学一适用)

陈启浩 编著



机械工业出版社

本书精选了作者从多年的教学过程中总结来的快捷解题方法，共百余种。本书内容适合参加硕士生入学考试“数学一”科目的学生，包含了高等数学、线性代数和概率论与数理统计三部分的知识。通过对本书的学习和体会，期望能够使读者解决问题的思路更加开阔，对知识的运用更加灵活，对数学知识的本质有更清楚的认识。

图书在版编目 (CIP) 数据

名师提点考研数学快捷解题方法 (数学一适用) / 陈启浩编著. —北京: 机械工业出版社, 2010.4

ISBN 978-7-111-30235-3

I. ①名… II. ①陈… III. ①高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 055186 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 韩效杰 责任编辑: 韩效杰 封面设计: 赵颖喆

责任校对: 张晓蓉 责任印制: 李 妍

北京振兴源印务有限公司印刷

2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 29 印张 · 718 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-30235-3

定价: 46.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心: (010) 88361066

门户网: <http://www.cmpbook.com>

销售一部: (010) 68326294

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售二部: (010) 88379649

读者服务部: (010) 68993821

封面无防伪标均为盗版

前言

数学不仅要求精准,而且要求快捷.

快捷是人们的追求,也是正在奋力备战硕士研究生考试的广大学生的渴望,他们在掌握了一定的考研数学(高数、线代及概率统计)基础知识和经过一定量的习题训练后,渴望能掌握一些快捷解题方法.据了解,听过快捷解题方法讲座、接受过快捷解题方法训练的考生,思路开阔,思维敏捷,解题水平比一般考生高出许多,高分者往往非他们莫属.

为了满足广大考研学子的需要,最近,我将长期教学生涯中积累的一些快捷解题方法经过精选,整理成书,并在机械工业出版社领导和编辑的大力支持下出版面世.深信通过本书的阅读,必将使考研学生在较短时间内,在解题能力方面有较大幅度的提高.

全书共有 116 个快捷解题方法,认真阅读、仔细品味定会使你感到,许多原本很复杂繁难的问题,现在可以轻松获解.下面列出书中的三个快捷方法,让读者先睹为快:

• 数列单调性的快捷判别法 •

当数列 $\{x_n\}$ 由 x_1 和递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ ($n=1, 2, \dots$) 确定时,通常总是利用数列极限存在准则“如果 $\{x_n\}$ 单调不减有上界或单调不增有下界,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在”判别 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在. $\{x_n\}$ 的有界性是容易确定的,但当递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ ($n=1, 2, \dots$) 比较复杂,特别递推式中含有参数时, $\{x_n\}$ 的单调性就不易判别,而用以下方法却能快捷地得到 $\{x_n\}$ 的单调性结论:

将 $f(x_n)$ 中的 x_n 改为 x 得 $f(x)$. 如果 $f(x)$ 单调不减(例如 $f'(x) \geq 0$),则当 $x_1 \leq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调不减;当 $x_1 \geq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调不增.

• 抽象矩阵可逆性判别与逆矩阵计算的快捷方法 •

设 A 是 n 阶矩阵,它满足 $f(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n E = O$ (其中 E 是 n 阶单位矩阵, O 是 n 阶零矩阵),则要判别 $A - dE$ (d 是常数)是否为可逆矩阵,可按以下方法快捷地得到:

记 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$. 如果 $f(d) = a \neq 0$,则 $A - dE$ 可逆,且

$$(A - dE)^{-1} = -\frac{1}{a}h(A),$$

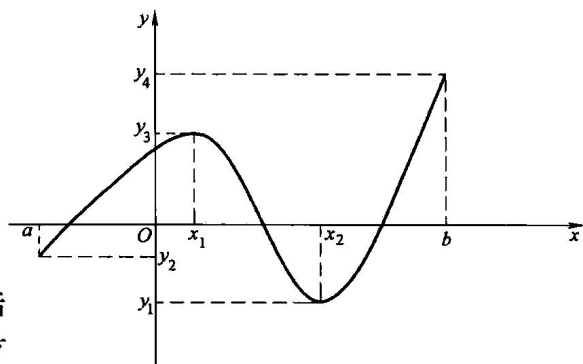
其中 $h(x)$ 是满足 $f(x) - a = (x - d)h(x)$ 的多项式;如果 $f(d) = 0$,则 $A - dE$ 不可逆.

• (一维)连续型随机变量函数的概率密度的快捷算法 •

设 x 是连续型随机变量,其概率密度为 $f_x(x)$,则 $y = g(x)$ 在 $f_x(x) \neq 0$ 的区间 (a, b) 内可导,但不是单调时,要计算 $Y = g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$,通常需先由分布函数的定义算出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ (当 $Y = g(X)$ 较复杂时, $F_Y(y)$ 是不易算得的),然后对 $F_Y(y)$ 求导算出 $f_Y(y)$. 但利用下面方法可快捷计算 $f_Y(y)$:

先确定 $y = g(x)$ 在 (a, b) 内的单调区间,例如 (a, x_1) , (x_1, x_2) 及 (x_2, b) ,如下图所示,记 $y = g(x)$ 在上述各个单调区间上的反函数分别为 $x = h_1(y)$ ($y_2 < y < y_3$), $x = h_2(y)$ ($y_1 < y < y_3$) 以及 $x = h_3(y)$ ($y_1 < y < y_4$),则

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h_1(y)] | h_1'(y) |, & y_2 < y < y_3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ + \begin{cases} f_X[h_2(y)] | h_2'(y) |, & y_1 < y < y_3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ + \begin{cases} f_X[h_3(y)] | h_3'(y) |, & y_1 < y < y_4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$



书中的每个快捷方法都分【简介】与【活用】两部分，在【简介】中简明扼要地介绍方法要点，并在必要处给出证明；在【活用】中通过典型的例子具体说明【简介】中所述的方法的运用。有些快捷方法中还有第三部分——【延伸】，它将【简介】中所述的方法作了某些扩张，使得该方法具有更广泛的应用性。

由于水平有限，书中疏漏和不足之处恐难幸免，恳请广大读者和同行指正。

陈启浩识于北京

目 录

前言

第一部分 高等数学

第一章 一元函数微分学	2
001 数列单调性的快捷判别法	2
002 由数列极限定义的函数表达式的快捷算法	6
003 等价无穷小的快捷寻找法	9
004 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限的快捷算法	14
005 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的快捷算法	19
006 $x \rightarrow \infty$ 时, $\infty - \infty$ 型未定式极限的快捷算法	21
007 $0 \cdot \infty$ 型未定式极限的快捷算法	23
008 曲线的非铅直渐近线的快捷算法	27
009 分段函数导数的快捷算法	29
010 形如 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f[u(x)] - f[u(x_0)]}{g[v(x)] - g[v(x_0)]}$ 的 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限的快捷算法	34
011 函数 $g(x) f(x) $ 不可导点的快捷算法	37
012 反函数不可导点的快捷算法	39
013 初等函数导数的快捷算法	40
014 初等函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的高阶导数 $f^{(n)}(x_0)$ 的快捷算法	42
015 初等函数高阶导数的快捷算法	47
016 平面曲线切线的快捷算法	50
017 存在 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	53
018 存在 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	55
019 存在 ξ , 使得 $G[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$ 的有关命题的快捷证明法 (I)	57
020 存在 ξ , 使得 $G[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$ 的有关命题的快捷证明法 (II)	59
021 存在 ξ , 使得 $G[\xi, f(\xi), f'(\xi), f''(\xi)] = 0$ 的有关命题的快捷证明法	63
022 存在 ξ , 使得 $f''(\xi) \leq k$ (常数) 的有关命题的快捷证明法	66
023 恒等式的快捷证明法	68
024 分段函数极值的快捷算法	70
025 函数最值的快捷算法	73
026 由函数图形确定导函数图形或由导函数图形确定函数性态的快捷方法	76
027 函数不等式的快捷证明法	79
028 方程 $f(x) = 0$ 实根个数的快捷判定法	84
第二章 一元函数积分学	88
029 计算不定积分时, 变量代换的快捷选定法	88
030 利用分部积分快捷计算不定积分方法	93
031 真分式不定积分的快捷算法	96

032	通过配置 $\int g(x) dx$, 快捷计算不定积分 $\int f(x) dx$ 的方法	101
033	不定积分 $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$ 的快捷算法	104
034	巧用换元积分法与分部积分法计算定积分的快捷方法	108
035	利用被积函数奇偶性和周期性快捷计算定积分方法	111
036	定积分值所在范围的快捷估计法	116
037	积分上限函数导数的快捷算法	120
038	被积函数为分段函数的积分上限函数表达式的快捷算法	122
039	卷积型积分的快捷算法	129
040	利用定积分快捷计算和式极限方法	133
041	在包含有 $f(x)$ 的定积分的条件下, 存在 ξ , 使得 $G[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$ 的有关命题的快捷证明法	136
042	存在 ξ , 使得 $G[\xi, f(\xi), \int_a^{\xi} f(t) dt] = 0$ 的有关命题的快捷证明法	139
043	定积分不等式的快捷证明法	141
044	平面图形面积的快捷算法	146
045	X 型 (或 Y 型) 平面图形 D 绕平行于 x 轴 (或 y 轴) 但不穿过 D 的直线旋转一周而成的旋转体体积的快捷算法	150
046	立于斜轴上的曲边梯形旋转一周而成的旋转体体积的快捷算法	153
第三章 多元函数微分学		158
047	二重极限不存在的快捷判别法	158
048	二元函数可微性的快捷判别法	160
049	二元函数偏导数与二阶偏导数的快捷算法	163
050	由 $z = z(x, y)$ 的全微分计算 $z = z(x, y)$ 的快捷方法	169
051	曲面切平面的快捷算法	172
052	二元函数条件极值的快捷算法	175
053	有界闭区域上二元连续函数最值的快捷算法	180
第四章 多元函数积分学		185
054	二重积分的快捷算法	185
055	卷积型二重积分的快捷算法	189
056	变积分区域上二重积分的快捷算法	191
057	二重积分取值范围的快捷估计法	195
058	三重积分的快捷算法	196
059	二次积分积分次序的快捷更换法	202
060	与旋转轴异面的线段所产生的旋转曲面方程与相关旋转体体积的快捷算法	206
061	空间曲线参数化的快捷方法	208
062	关于弧长的曲线积分的快捷算法	211
063	关于坐标的平面曲线积分的快捷算法	216
064	关于坐标的空间曲线积分的快捷算法	224
065	两类曲线积分的快捷转换法	230
066	关于面积的曲面积分的快捷算法	233
067	关于坐标的曲面积分的快捷算法	237
068	两类曲面积分的快捷转换法	247
069	闭曲面围成的立体体积的快捷算法	251

070 曲面面积的快捷算法	254
第五章 无穷级数与常微分方程	257
071 正项级数收敛性的快捷判别法	257
072 任意项级数收敛性的快捷判别法	262
073 抽象级数收敛性的快捷证明法	266
074 幂级数收敛域的快捷算法	269
075 函数幂级数的快捷展开法	274
076 幂级数和函数的快捷算法	279
077 级数和的快捷算法	283
078 傅里叶级数或正、余弦级数和函数的快捷算法	287
079 一阶微分方程快捷求解法	292
080 二阶微分方程的快捷求解法	295
081 右端函数为分段函数的一阶线性微分方程的快捷求解法	298
082 方程 $y(x) = \int_0^x g[x, y(t)]dt + h(x)$ 的快捷求解法	303

第二部分 线性代数

第六章 矩阵与向量	310
083 矩阵式的快捷算法	310
084 数字矩阵逆矩阵的快捷算法	313
085 抽象矩阵可逆性判别与逆矩阵计算的快捷方法	317
086 分块矩阵或经由初等变换后的矩阵的转置、求逆及伴随矩阵的快捷算法	320
087 向量组线性相关性的快捷判别法	323
088 向量组的极大线性无关组的快捷算法	327
089 有关矩阵秩问题的快捷证明法	330
第七章 线性方程组	333
090 由线性方程组的有解性确定其中参数的快捷方法	333
091 两个线性方程组同解的快捷判别法	339
092 两个线性方程组公共解的快捷算法	342
093 矩阵方程的快捷求解法	345
094 有关线性方程组问题的快捷证明法	350
第八章 矩阵特征值与特征向量, 二次型	353
095 矩阵特征值与特征向量的快捷算法	353
096 由矩阵 A 的特征值与特征向量计算 A 中参数的快捷方法	360
097 矩阵可否相似对角化的快捷判别法	364
098 矩阵特征值与特征向量问题的快捷证明法	372
099 由可逆线性变换化二次型为标准形的快捷方法	374
100 由二次型 f 的标准形确定 f 中的参数或 f 的表达式的快捷方法	381
101 有关正定二次型或正定矩阵问题的快捷证明法	386

第三部分 概率论与数理统计

第九章 随机事件概率计算	392
102 分层应用全概率公式快捷计算随机事件概率的方法	392

103	条件概率的快捷算法	394
104	利用抽签原理快捷计算随机事件概率的方法	397
第十章	随机变量及其分布	401
105	(一维)随机变量分布函数与分布律或概率密度的快捷换算法	401
106	(一维)连续型随机变量函数的概率密度的快捷算法	406
107	与正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 有关问题的快捷算法	410
108	两个连续型随机变量独立性的快捷判定法	413
109	二维连续型随机变量的两类条件概率的快捷算法	416
110	二维连续型随机变量函数的概率密度的快捷算法	421
第十一章	随机变量的数字特征	427
111	将离散型随机变量 X 表示成若干个随机变量之和, 快捷计算 X 的数字特征方法	427
112	利用常用随机变量的数字特征快捷计算连续型随机变量 X 的数字特征方法	431
113	与二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 有关问题的快捷算法	436
第十二章	数理统计	442
114	来自正态总体的样本统计量分布的快捷确定法	442
115	样本统计量数字特征的快捷算法	446
116	非正态总体未知参数置信区间的快捷算法	451
参考文献		454

第一部分 高等数学

第一章

一元函数微分学

001

数列单调性的快捷判别法

【简介】

当数列 $\{x_n\}$ 由 x_1 和递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ ($n=1, 2, \dots$) 确定时, 通常总是利用数列极限存在准则 (II):

“如果数列 $\{x_n\}$ 单调不减有上界或单调不增有下界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在”

判别 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在. 其中 $\{x_n\}$ 的单调性判别通常使用以下两种方法:

1. 如果 $x_{n+1} - x_n \geq 0$ (≤ 0) ($n=1, 2, \dots$), 则 $\{x_n\}$ 单调不减 (单调不增);

2. 如果 $\{x_n\}$ 是正项数列, 则当 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ (≤ 1) 时, $\{x_n\}$ 单调不减 (单调不增).

但是当递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ ($n=1, 2, \dots$) 比较复杂, 特别递推式中含有参数时, 应用上述两种方法不易判定 $\{x_n\}$ 的单调性. 下面结论给出了判断 $\{x_n\}$ 单调性的快捷方法:

将 $f(x_n)$ 中的 x_n 改为 x 得 $f(x)$. 如果 $f(x)$ 单调不减 (例如 $f'(x) \geq 0$), 则当 $x_1 \leq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调不减; 当 $x_1 \geq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调不增.

证明: 以 $x_1 \leq x_2$ 为例给出证明, 当 $x_1 \geq x_2$ 时同样可证.

由于 $f(x)$ 单调不减, 所以当 $x_1 \leq x_2$ 时, $f(x_1) \leq f(x_2)$, 即 $x_2 \leq x_3$, 从而 $f(x_2) \leq f(x_3)$, 即 $x_3 \leq x_4$. 依次类推得 $x_n \leq x_{n+1}$ ($n=4, 5, \dots$), 所以 $\{x_n\}$ 单调不减.

注 数列极限存在准则有两个, 除本段开头所述的 (II) 之外, 还有 (I):

设有数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$, 如果 $y_n \leq x_n \leq z_n$ ($n=1, 2, \dots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

【活用】

例 001.1 设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n=1, 2, \dots$).

(1) 证明: 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 (1) 由 $0 < x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} \leq \frac{1}{2}[x_n + (3-x_n)] = \frac{3}{2}$ ($n=1, 2, \dots$) 知 $\{x_n\}$ 有上界.

记 $f(x_n) = \sqrt{x_n(3-x_n)}$, 将其中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x) = \sqrt{x(3-x)}$ ($0 < x \leq \frac{3}{2}$). 由

于 $f'(x) = \frac{\frac{3}{2} - x}{\sqrt{x(3-x)}} \geq 0 \left(0 < x \leq \frac{3}{2}\right)$ 及 $x_3 - x_2 = \sqrt{x_2(3-x_2)} - x_2 = \frac{2x_2\left(\frac{3}{2} - x_2\right)}{\sqrt{x_2(3-x_2)} + x_2} \geq 0$, 所以, 数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 单调不减, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

(2) 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 令 $n \rightarrow \infty$ 对所给递推式两边取极限得

$$A = \sqrt{A(3-A)}, \text{ 即 } A = \frac{3}{2}, 0$$

由于 $A \geq x_2 > 0$, 所以 $A = \frac{3}{2}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$.

例 001.2 设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{a-1+x_n}{1+x_n} (n=1, 2, \dots)$, 其中 a 是不超过 2 的常数. 求使数列 $\{x_n\}$ 收敛的 a 的值, 并计算此时的 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记为 A , 则令 $n \rightarrow \infty$ 对递推式两边取极限得 $A = \frac{a-1+A}{1+A}$, 即 $A^2 = a-1$. 由此可知, 当 $a < 1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在. 下面考虑 $1 \leq a \leq 2$ 时的 $\{x_n\}$ 的收敛性.

由 $0 < x_{n+1} = 1 + \frac{a-2}{1+x_n} \leq 1 (n=1, 2, \dots)$ 知 $\{x_n\}$ 既有上界又有下界.

记 $f(x_n) = 1 + \frac{a-2}{1+x_n}$, 将其中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x) = 1 + \frac{a-2}{1+x} (0 < x \leq 1)$. 由于 $f'(x) = \frac{2-a}{(1+x)^2} \geq 0 (0 < x \leq 1)$, 所以, 由

$$x_2 - x_1 = \frac{a-1+x_1}{1+x_1} - x_1 = \frac{(a-1)-x_1^2}{1+x_1} \begin{cases} \geq 0 & 0 < x_1 \leq \sqrt{a-1}, \\ < 0 & x_1 > \sqrt{a-1} \end{cases}$$

知, 当 $0 < x_1 \leq \sqrt{a-1}$ 时 $\{x_n\}$ 单调不减; 当 $x_1 > \sqrt{a-1}$ 时 $\{x_n\}$ 单调减少. 因此, 当 $1 \leq a \leq 2$ 时, $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a-1}$.

例 001.3 设二元函数 $F(x, y) = \frac{1}{2x}\varphi(y-x)$, 且 $F(1, y) = \frac{y^2}{2} - y + 5$. 又设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = F(x_n, 2x_n) (n=1, 2, \dots)$.

(1) 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 (1) 由 $F(1, y) = \frac{\varphi(y-1)}{2}$ 及 $F(1, y) = \frac{y^2}{2} - y + 5$ 得 $\frac{\varphi(y-1)}{2} = \frac{y^2}{2} - y + 5$, 即 $\varphi(y) = y^2 + 9$, $F(x, y) = \frac{1}{2x}[(y-x)^2 + 9]$. 因此 $\{x_n\}$ 的递推式为

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 9) (n=1, 2, \dots). \quad (1)$$

由递推式知 $x_{n+1} \geq \frac{1}{2x_n} \cdot 2\sqrt{x_n^2 \cdot 9} = 3 (n=1, 2, \dots)$, 即 $\{x_n\}$ 有下界.

记 $f(x_n) = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 9)$, 将其中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x) = \frac{1}{2x}(x^2 + 9)$. 由于 $f'(x) =$

$\frac{x^2-9}{2x^2} \geq 0$ ($x \geq 3$), 所以由

$$x_3 - x_2 = \frac{1}{2x_2}(x_2^2 + 9) - x_2 = \frac{9 - x_2^2}{2x_2} \leq 0$$

知 $\{x_n\}$ 单调不减. 因此, $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则由 $x_n \geq 3$ ($n = 2, 3, \dots$) 知 $A \geq 3$. 令 $n \rightarrow \infty$ 对递推式 (1) 的两边取极限得

$$A = \frac{1}{2A}(A^2 + 9), \text{ 即 } A = 3, -3 \text{ (不合题意, 舍去).}$$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

例 001.4 设 $a > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, 且 $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{a}$.

解 由 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ 及 $x_2 = x_1(2 - ax_1) \leq \frac{1}{a}$ (由于 $y = x(2 - ax)$ 的最大值为 $\frac{1}{a}$), 即 $0 < x_2 \leq \frac{1}{a}$. 由此可得 $0 < x_3 = x_2(2 - ax_2) \leq \frac{1}{a}$. 依次类推得 $0 < x_n \leq \frac{1}{a}$ ($n = 4, 5, \dots$), 即 $\{x_n\}$ 有界.

记 $f(x_n) = x_n(2 - ax_n)$, 将其中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x) = x(2 - ax)$ ($0 < x \leq \frac{1}{a}$). 由于 $f'(x) = 2a\left(\frac{1}{a} - x\right) \geq 0$ ($0 < x \leq \frac{1}{a}$), 所以由

$$x_3 - x_2 = x_2(2 - ax_2) - x_2 = ax_2\left(\frac{1}{a} - x_2\right) \geq 0$$

知数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 单调不减. 因此 $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A \geq x_2 > 0$. 令 $n \rightarrow \infty$ 对所给递推式两边取极限得 $A = A(2 - aA)$. 解此方程得 $A = \frac{1}{a}, 0$ (不合题意, 舍去), 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{a}$.

【延伸】

如【简介】中所述, 当数列 $\{x_n\}$ 由 x_1 和递推式 $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) 确定时, 考虑 $\{x_n\}$ 的收敛性往往都是应用数列极限存在准则 (II). 但当 $f(x)$ 单调不减 (例如 $f'(x) \leq 0$) 时, 不能直接使用本方法确定 $\{x_n\}$ 的单调性 (实际上, 此时 $\{x_n\}$ 不具有单调性), 此时可以将 $\{x_n\}$ 划分成若干个子数列, 例如 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$, 然后分别对这两个子数列应用本方法, 判别单调性, 进而分别对这两个子数列应用数列极限存在准则 (II), 如果它们有相同的极限 A , 则 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

例 001.5 设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 容易看到 $0 < x_n < 3$ ($n = 1, 2, \dots$), 即 $\{x_n\}$ 既有上界又有下界.

记 $f(x_n) = 2 + \frac{1}{x_n}$, 将其中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ ($0 < x < 3$). 由于 $f'(x) =$

$-\frac{1}{x^2} < 0$, 因此将 $\{x_n\}$ 划分成两个子数列 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$.

(1) 对于 $\{x_{2n-1}\}$ 有递推式 $x_1 = 2$ 和 $x_{2n+1} = 2 + \frac{1}{x_{2n}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_{2n-1}}} = 2 + \frac{x_{2n-1}}{2x_{2n-1} + 1}$, 即

$$x_{2n+1} = 2 + \frac{x_{2n-1}}{2x_{2n-1} + 1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

记 $y(x_{2n-1}) = 2 + \frac{x_{2n-1}}{2x_{2n-1} + 1}$, 将其中的 x_{2n-1} 改为 x 得函数 $y(x) = 2 + \frac{x}{2x+1} \quad (0 < x < 3)$.

由于 $y'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} > 0$, 所以由 $x_1 < x_3$ 知 $\{x_{2n-1}\}$ 单调增加. 因此 $\{x_{2n-1}\}$ 收敛.

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = A$, 令 $n \rightarrow \infty$ 对式 (1) 的两边取极限得 $A = 2 + \frac{A}{2A+1}$. 解此方程得 $A = 1 + \sqrt{2}$,

$1 - \sqrt{2}$. 由 $x_{2n-1} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$ 知 $A = 1 - \sqrt{2}$ 不合题意. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = 1 + \sqrt{2}$.

(2) 对于 $\{x_{2n}\}$ 有递推式 $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_{2n+2} = 2 + \frac{1}{x_{2n+1}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_{2n}}} = 2 + \frac{x_{2n}}{2x_{2n} + 1}$, 即

$$x_{2n+2} = 2 + \frac{x_{2n}}{2x_{2n} + 1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

这个递推式在形式上与式 (1) 相同, 所以由 $x_2 > x_4$ 知 $\{x_{2n}\}$ 单调减少, 因此 $\{x_{2n}\}$ 收敛. 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = B$, 令 $n \rightarrow \infty$ 对式 (2) 的两边取极限得 $B = 2 + \frac{B}{2B+1}$. 解此方程得 $B = 1 + \sqrt{2}$,

$1 - \sqrt{2}$. 由 $x_{2n} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$ 知 $B = 1 - \sqrt{2}$ 不合题意. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = 1 + \sqrt{2}$.

由以上计算知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + \sqrt{2}$.

例 001.6 设 $x_1 = \frac{a}{2} \quad (0 \leq a \leq 1)$, $x_{n+1} = \frac{a}{2} - \frac{x_n^2}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 容易看到, $x_1 = \frac{a}{2}$, $0 \leq x_n \leq \frac{a}{2} \quad (n = 2, 3, \dots)$, 所以 $\{x_n\}$ 既有上界又有下界.

记 $f(x_n) = \frac{a}{2} - \frac{x_n^2}{2}$, 将其中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x) = \frac{a}{2} - \frac{x^2}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{a}{2})$. 由于 $f'(x) = -x \leq 0$, 因此将 $\{x_n\}$ 划分成两个子数列 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$.

对于 $\{x_{2n-1}\}$ 有递推式 $x_1 = \frac{a}{2}$,

$$x_{2n+1} = \frac{a}{2} - \frac{x_{2n}^2}{2} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{x_{2n-1}^2}{2} \right)^2. \quad (1)$$

记 $g(x_{2n-1}) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{x_{2n-1}^2}{2} \right)^2$, 将其中的 x_{2n-1} 改为 x 得函数 $g(x) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{x^2}{2} \right)^2 \quad (0 \leq x \leq \frac{a}{2})$. 由于 $g'(x) = \left(\frac{a}{2} - \frac{x^2}{2} \right) x \geq 0$, 所以由 $x_1 \geq x_3$ 知 $\{x_{2n-1}\}$ 单调不增. 因此 $\{x_{2n-1}\}$ 收敛. 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = A$, 令 $n \rightarrow \infty$ 对式 (1) 的两边取极限得 $A = \frac{a}{2} -$

$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{A^2}{2} \right)^2$. 该方程在 $\left[0, \frac{a}{2} \right]$ 上有唯一解, 记为 c , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = c$.

对 $\{x_{2n}\}$ 有递推式 $x_2 = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8}$,

$$x_{2n+2} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{x_{2n}^2}{2} \right)^2 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2)$$

这个递推式在形式上与式 (1) 相同, 所以由 $x_2 \leq x_4$ 知 $\{x_{2n}\}$ 单调不减. 因此 $\{x_{2n}\}$ 收敛. 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = B$, 令 $n \rightarrow \infty$ 对式 (2) 的两边取极限得 $B = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{B^2}{2} \right)^2$. 由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = c$.

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. 令 $n \rightarrow \infty$ 对递推式 $x_{n+1} = \frac{a}{2} - \frac{x_n^2}{2} (n=1, 2, \dots)$ 的两边取极限得 $c = \frac{a}{2} - \frac{c^2}{2}$. 解此方程得 $c = \sqrt{1+a} - 1, -\sqrt{1+a} - 1$ (由于它不在 $\left[0, \frac{a}{2} \right]$ 内, 舍去). 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c = \sqrt{1+a} - 1$.

注 关于 A 的方程 $A = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{A^2}{2} \right)^2$ 在 $\left[0, \frac{a}{2} \right]$ 上有唯一解的证明:

记 $\varphi(A) = A - \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{A^2}{2} \right)^2$, 则 $\varphi(A)$ 在 $\left[0, \frac{a}{2} \right]$ 上连续, 且 $\varphi(0) = -\frac{a}{2} + \frac{a^2}{8} \leq 0$, $\varphi\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} \right)^2 \geq 0$, 且 $\varphi'(A) = 1 - \left(\frac{a}{2} - \frac{A^2}{2} \right) A = \frac{1}{2} (2 - aA + A^3) > \frac{1}{2} \left(2 - \frac{a^2}{2} \right) > 0$, 所以方程 $\varphi(A) = 0$, 即 $A = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{A^2}{2} \right)^2$ 在 $\left[0, \frac{a}{2} \right]$ 上有唯一解.

002

由数列极限定义的函数表达式的快捷算法

【简介】

设数列与参数 x 有关, 记其通项为 $\varphi(n, x)$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x)$ 定义了 x 的函数 $f(x)$, 即

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x).$$

一般 $f(x)$ 是分段函数, 其表达式的快捷算法如下:

(1) 利用诸如下列结论将数列各项 $\varphi(n, x)$ 的公共定义域划分成若干个区间: 在 $n \rightarrow \infty$ 时,

如果 $\left| \frac{x}{a} \right| < 1$, 则 $\left(\frac{x}{a} \right)^n \rightarrow 0$, 如果 $\left| \frac{x}{a} \right| > 1$, 则 $\left(\frac{a}{x} \right)^n \rightarrow 0$;

如果 $0 < a < 1$, 则 $a^n \rightarrow 0$, 如果 $a > 1$, 则 $\left(\frac{1}{a} \right)^n \rightarrow 0$;

如果 $x < 0$, 则 $n^x \rightarrow 0$, 如果 $x > 0$, 则 $\frac{1}{n^x} \rightarrow 0$, 等.

(2) 在每个区间和分界点处计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x, n)$, 如此即可确定 $f(x)$ 的表达式.

【活用】

例 002.1 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} (x > 0)$, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

解 由于数列通项 $\frac{\ln(e^n + x^n)}{n}$ 中出现 e^n 和 x^n , 将它们合并为 $\left(\frac{x}{e}\right)^n$, 按 $0 < \frac{x}{e} < 1$ 与 $\frac{x}{e} > 1$ 划分 $(0, +\infty)$ (数列各项的公共定义域).

当 $0 < \frac{x}{e} < 1$, 即 $0 < x < e$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left[1 + \left(\frac{x}{e}\right)^n\right]}{n} = 1$;

当 $\frac{x}{e} > 1$, 即 $x > e$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} = \ln x + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left[1 + \left(\frac{e}{x}\right)^n\right]}{n} = \ln x$;

当 $\frac{x}{e} = 1$, 即 $x = e$ (上述两个区间的边界点) 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2e^n)}{n} = 1$.

所以, $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < e, \\ 1 & x = e, \\ \ln x & x > e \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq e, \\ \ln x & x > e. \end{cases}$

例 002.2 使函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$ 连续, 问常数 a, b 必须满足什么条件?

解 由于数列通项 $\frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$ 中出现 $e^{n(x-1)} = (e^{x-1})^n$, 所以要按 $e^{x-1} < 1$ 与 $e^{x-1} > 1$ 划分 $(-\infty, +\infty)$ (数列各项的公共定义域).

当 $e^{x-1} < 1$, 即 $x < 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{1} = ax + b$;

当 $e^{x-1} > 1$, 即 $x > 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)}}{e^{n(x-1)}} = x^2$;

当 $e^{x-1} = 1$, 即 $x = 1$ (上述两个区间的边界点) 时, $f(x) = \frac{1}{2}(1 + a + b)$.

于是, $f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 1, \\ \frac{1}{2}(1 + a + b) & x = 1, \\ x^2 & x > 1. \end{cases}$

要使 $f(x)$ 连续, 必须有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1), \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = \frac{1}{2}(1 + a + b),$$

由此得到 $\begin{cases} a + b = 1, \\ \frac{1}{2}(1 + a + b) = 1, \end{cases}$ 即 a, b 必须满足 $a + b = 1$.

例 002.3 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$, 问 a, b 取何值时, $f(x)$ 在 $(-\infty,$

$+\infty$) 上连续.

解 由于数列通项 $\frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 中出现 x^{2n} 与 x^{2n+1} , 所以要按 $|x| < 1$ 与 $|x| > 1$ 划分 $(-\infty, +\infty)$ (数列各项的公共定义域).

$$\text{当 } |x| < 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = ax^2 + bx;$$

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{x^{2n}} = x;$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{1}{2}(1 + a + b);$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } f(x) = \frac{1}{2}(-1 + a - b).$$

$$\text{于是 } f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & |x| < 1, \\ x & |x| > 1, \\ \frac{1}{2}(1 + a + b) & x = 1, \\ \frac{1}{2}(-1 + a - b) & x = -1. \end{cases}$$

由此可知, 当 a, b 满足

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{1}{2}(-1 + a - b), \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}(1 + a + b), \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} -1 = a - b, \\ 1 = a + b \end{cases}$$

时, $f(x)$ 在点 $x = -1, 1$ 处连续, 从而在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 于是当 $a = 0, b = 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

例 002.4 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的连续性.

解 显然 $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$. 下面考虑 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f(x)$ 的表达式.

由于数列通项 $\sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}}$ 中出现 $(2x)^n$ 与 x^{2n} , 所以按 $\frac{2x}{x^2} < 1$ 与 $\frac{2x}{x^2} > 1$ 划分 $(0, +\infty)$.

当 $\frac{2x}{x^2} < 1$, 即 $x > 2$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^{2n}} = x^2$ (由于 $n \rightarrow \infty$ 时, $2 + (2x)^n$ 与 x^{2n} 比较可以忽略不计);

当 $\frac{2x}{x^2} > 1$, 即 $0 < x < 2$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n}$ (由于 $n \rightarrow \infty$ 时, x^{2n} 与 $2 + (2x)^n$ 比较可以忽略不计).

下面计算 $(0, 2)$ 内的 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n}$. 由于数列通项 $\sqrt[n]{2 + (2x)^n}$ 中出现 $(2x)^n$, 所以按 $0 < 2x < 1$ 与 $2x > 1$ 划分 $(0, 2)$:

当 $0 < 2x < 1$, 即 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ (由于 $n \rightarrow \infty$ 时, $(2x)^n$ 与 2 比较可以忽略不计);