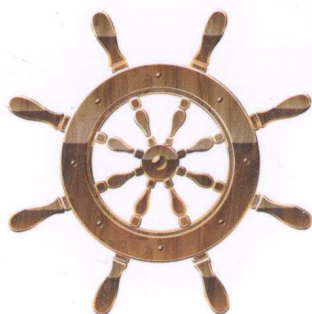


TURING

图灵新知

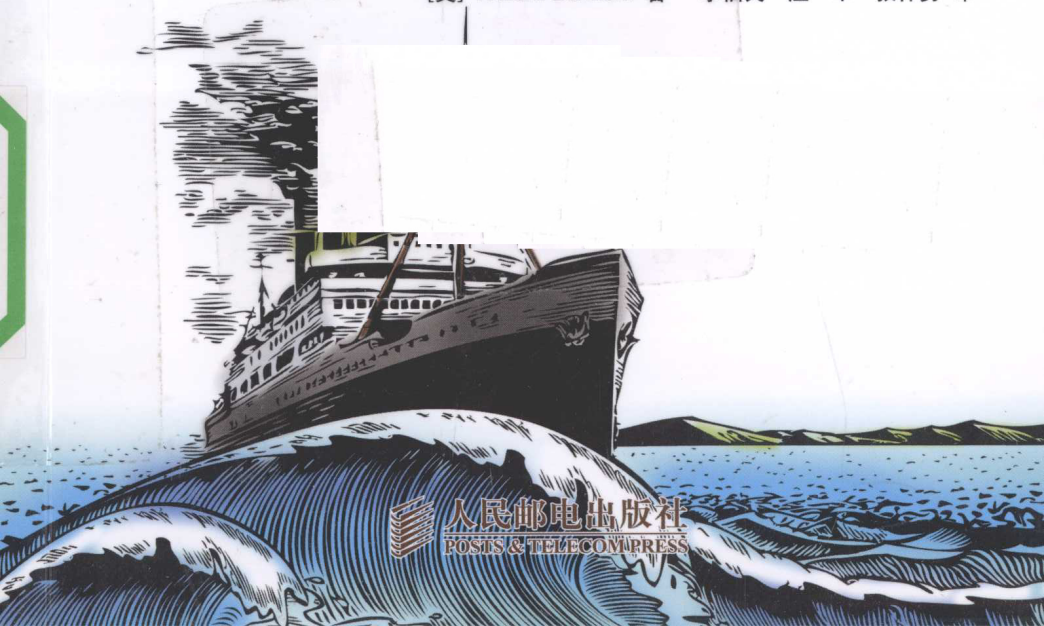
The Calculus Gallery  
Masterpieces from Newton to Lebesgue



# 微积分的历程

从牛顿到勒贝格

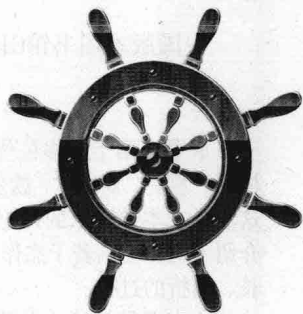
[美] William Dunham 著 李伯民 汪军 张怀勇 译



人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

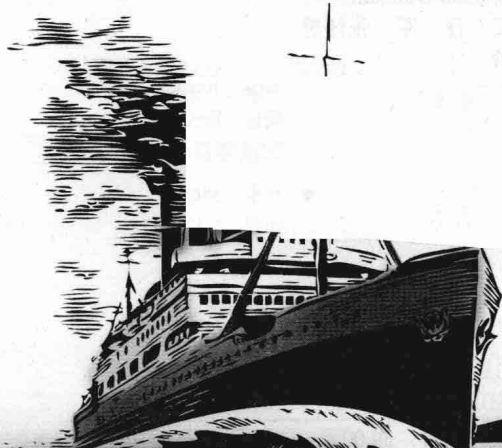
图灵新知



# 微积分的历程

从牛顿到勒贝格

[美] William Dunham 著 李伯民 汪军 张怀勇 译



人民邮电出版社  
北京

## 图书在版编目 (C I P) 数据

微积分的历程：从牛顿到勒贝格 / (美) 邓纳姆 (Dunham, W.) 著；李伯民，汪军，张怀勇译。—北京：人民邮电出版社，2010.8

(图灵新知)

书名原文: The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue

ISBN 978-7-115-23217-5

I. ①微… II. ①邓… ②李… ③汪… ④张… III. ①微积分—普及读物 IV. ①O172-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第118829号

## 内 容 提 要

本书介绍了十多位优秀的数学家：牛顿、莱布尼茨、伯努利兄弟、欧拉、柯西、黎曼、刘维尔、魏尔斯特拉斯、康托尔、沃尔泰拉、贝尔、勒贝格。然而，这不是一本数学家的传记，而是一座展示微积分宏伟画卷的陈列室。作者选择介绍了历史上的若干杰作（重要定理），优雅地呈现了微积分从创建到完善的漫长、曲折的过程。

本书兼具趣味性和学术性，对基础知识的要求很低，可作为本科生、研究生和数学工作者的微积分补充读物，更是数学爱好者的佳肴。

图灵新知

## 微积分的历程：从牛顿到勒贝格

- 
- ◆ 著 [美] William Dunham
  - 译 李伯民 汪 军 张怀勇
  - 责任编辑 明永玲
  - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号  
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn  
网址 <http://www.ptpress.com.cn>  
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
  - ◆ 开本：880×1230 1/32  
印张：8.375  
字数：213千字 2010年8月第1版  
印数：1-4 000册 2010年8月北京第1次印刷  
著作权合同登记号 图字：01-2009-3881号

---

ISBN 978-7-115-23217-5

定价：29.00元

读者服务热线：(010)51095186 印装质量热线：(010)67129223

反盗版热线：(010)67171154

# 版 权 声 明

Original edition, entitled *The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue* by William Dunham, ISBN: 978-0-691-13626-4, published by Princeton University Press. Copyright © 2005 by Princeton University Press.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from Princeton University Press.

Simplified Chinese translation copyright © 2010 by Posts & Telecom Press.

本书简体中文版由普林斯顿大学出版社授权人民邮电出版社独家出版。未经出版者许可，不得以任何方式复制本书内容。

仅限于中华人民共和国境内（香港、澳门特别行政区和台湾地区除外）销售发行。

版权所有，侵权必究。

## 译 者 序

伟大的思想家恩格斯曾经精辟地指出：“在一切理论成就中，未必有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看成人类精神的最高胜利了。”20 世纪最著名的数学家之一冯·诺伊曼称“微积分是现代数学取得的最高成就，对它的重要性怎样估计也是不会过分的。”

微积分的思想可以追溯到久远的古代，从两千多年前一直到中世纪，东西方不断有人试图用某种分割的策略解决像计算面积和求切线这样的问题。但是，这种方法必须面对如何分割和分割到什么程度的问题，也就是人们后来才意识到的难以捉摸的“无穷小”量和“极限”过程的问题。人们经历了漫长的岁月也终究未能取得突破。最后，牛顿和莱布尼茨这两位先驱在前人工作的基础上创立了微分法和积分法，并且发现它们是一种对立统一的方法（这种对立统一表现为微积分“基本定理”），再经伯努利兄弟和欧拉的改进、扩展和提高，上升到了分析学的高度。早期的微积分由于缺乏可靠的基础，很快陷入深重的危机之中。随后登上历史舞台的数学大师柯西、黎曼、刘维尔和魏尔斯特拉斯挽救难于既倒，赋予了微积分特别的严格性和精确性。然而，随着应用的扩大和深化，各种复杂和深奥的问题层出不穷，不断在分析学界引起混乱，导致微积分再度走向危机。到这时，数学家们才发现，严格性与精确性其实只解决了逻辑推理本身这个基础问题，而逻辑推理所依存的理论基础才是更根本也更难解决的问题。最终，当现代数学天才康托尔、沃尔泰拉、贝尔和勒贝格把严格性与精确性同集合论与艰深的实数理论结合起来以后，创建微积分的过程才终于到达终点。

本书把建立微积分的崎岖历程中发生的重大事件和出现的杰出人物，一一展现在读者面前。不过，作者的意图不在于单纯地叙述历史，也不在于讲解微积分知识和描绘数学家的传奇故事，而是要展现创建微积分的过程中的思想，揭示曲折的过程和最终的结果之间的必然联系，不仅让读者领略到大师们所取得的那些不可企及的成就，更让读者体会到他们付出的艰辛劳动。

作者 William Dunham 教授是知名的数学图书作家，写过不少优秀的高端数学科学读物，曾经荣获很多重要奖项。

在本书翻译中，我们力求减少差错和保持原书格调，但是限于我们自身的专业修养和文字水平，加上书中涉及大量史料和多种文字的引文，疏误之处在所难免，不当之处，敬请读者指正。

译者

2010年4月

## 致 谢

本书是在穆伦堡学院 1932 级讲座教授基金资助下写成的。我非常感谢穆伦堡学院给我提供这次机会，同样感谢 Tom Banchoff（布朗大学）、Don Bonar（丹尼森大学）、Aparna Higgins（代顿大学）和 Fred Rickey（西点军校）支持我的基金申请。

在本书的写作过程中，我得到计算机奇才 Bill Stevenson 的大力帮助，穆伦堡学院数学科学系的朋友和同事们也鼎力相助，他们是 George Benjamin, Dave Nelson, Elyn Rykken, Linda McGuire, Greg Cicconetti, Margaret Dodsen, Clif Kussmaul, Linda Luckenbill 以及新近退休的 John Meyer，作为我的坚强后盾，他们从开始就对这个项目寄予厚望。

在本书的写作中我用到了穆伦堡学院 Trexler 图书馆的资料，该馆工作人员 Tom Gauphan, Martha Stevenson 和 Karen Gruber 给予我非常有价值的帮助。我还利用了李亥大学 Fairchild-Martindale 图书馆以及普林斯顿大学 Fine Hall 图书馆的珍贵藏书。

在这项重要工作中，家人是我动力的源泉，他们给予我特别的支持，在此我要对 Brendan 和 Shannon，对我的母亲，以及对 Ruth Evans, Bob Evans 和 Carol Dunham 深致爱意和感激之情。

我还要感谢南方大学的法语教授 George Poe，他在排查费解图形时所做的探测工作足以令奥古斯丁·杜邦感到羡慕<sup>①</sup>。同样要感谢韦斯特蒙特大学的 Russell Howell，他再次证明了，要是没有成为一位杰出的数学

---

① 杜邦是爱伦·坡的推理小说中的神探。——译者注

## 2 | 微积分的历程：从牛顿到勒贝格

教授的话，他也可以成为一名优秀的数学编辑。

在把我的手稿转变成书的过程中，应该感谢几位参与者。他们中有 Alison Kalett, Dimitri Karetnikov, Carmina Alvarez, Beth Gallapher 和 Gail Schmitt，尤其是普林斯顿大学出版社高级数学编辑 Vikie Kearm，她非常专业和友好地监督了整个过程。

最后，要感谢我的妻子和同事 Penny Dunham。她为本书制作了插图，并对书的内容选择提出了有益的建议。她的参与使本书的写作得以顺利完成，而她的出现则让我们共度的 35 个春秋变得非常愉快。

W. Dunham

于宾夕法尼亚州于阿伦敦



# 目 录

前言 .....	1
第 1 章 牛顿 .....	7
广义二项展开式 .....	8
逆级数 .....	11
《分析学》中求面积的法则 .....	14
牛顿的正弦级数推导 .....	18
参考文献 .....	22
第 2 章 莱布尼茨 .....	24
变换定理 .....	27
莱布尼茨级数 .....	35
参考文献 .....	40
第 3 章 伯努利兄弟 .....	41
雅各布和调和级数 .....	43
雅各布和他的垛积级数 .....	47
约翰和 $x^x$ .....	52
参考文献 .....	57
第 4 章 欧拉 .....	59
欧拉的一个微分 .....	60

## 2 | 微积分的历程：从牛顿到勒贝格

欧拉的一个积分 .....	62
$\pi$ 的欧拉估值 .....	63
引人注目的求和 .....	67
伽玛函数 .....	72
参考文献 .....	76
<b>第 5 章 第一次波折 .....</b>	<b>78</b>
参考文献 .....	86
<b>第 6 章 柯西 .....</b>	<b>87</b>
极限、连续性和导数 .....	88
介值定理 .....	91
中值定理 .....	94
积分和微积分基本定理 .....	97
两个收敛判别法 .....	102
参考文献 .....	107
<b>第 7 章 黎曼 .....</b>	<b>109</b>
狄利克雷函数 .....	112
黎曼积分 .....	114
黎曼病态函数 .....	121
黎曼重排定理 .....	126
参考文献 .....	129
<b>第 8 章 刘维尔 .....</b>	<b>131</b>
代数数与超越数 .....	132
刘维尔不等式 .....	136

刘维尔超越数 .....	141
参考文献 .....	145
<b>第 9 章 魏尔斯特拉斯</b> .....	<b>146</b>
回到基本问题 .....	148
四个重要定理 .....	158
魏尔斯特拉斯病态函数 .....	160
参考文献 .....	170
<b>第 10 章 第二次波折</b> .....	<b>171</b>
参考文献 .....	181
<b>第 11 章 康托尔</b> .....	<b>182</b>
实数的完备性 .....	183
区间的不可数性 .....	186
再论超越数的存在 .....	190
参考文献 .....	195
<b>第 12 章 沃尔泰拉</b> .....	<b>196</b>
沃尔泰拉病态函数 .....	198
汉克尔的函数分类 .....	200
病态函数的限度 .....	204
参考文献 .....	210
<b>第 13 章 贝尔</b> .....	<b>211</b>
无处稠密集 .....	212
贝尔分类定理 .....	215
若干应用 .....	219

4   微积分的历程：从牛顿到勒贝格	
贝尔的函数分类 .....	225
参考文献 .....	228
<b>第 14 章 勒贝格</b> .....	<b>230</b>
回归黎曼积分 .....	231
零测度 .....	232
集合的测度 .....	239
勒贝格积分 .....	243
参考文献 .....	250
<b>后记</b> .....	<b>252</b>

# 前 言

20 世纪杰出的数学家约翰·冯·诺伊曼 (1903—1957) 在论述微积分时写道：“微积分是现代数学取得的最高成就，对它的重要性怎样估计也是不会过分的。”<sup>①</sup>

今天，在微积分出现 3 个多世纪之后，它依然值得我们这样赞美。微积分俨如一座桥梁，它使学生们通过它从基础性的初等数学走向富于挑战性的高等数学，并且面对令人眼花缭乱的转换，从有限量转向无限量，从离散性转向连续性，从肤浅的表象转向深刻的本质。所以，英语中通常在微积分一词 *calculus* 前面郑重地加上定冠词 “the”，冯·诺伊曼在上述评价中就是这样做的。“the calculus” (微积分) 这种称谓同 “the law” (定律) 相似，用 “the” 特指微积分是一个浩如烟海的、独立存在且令人敬畏的科目。

一如任何重要的智力探索过程，微积分有着五彩斑斓的发展史和光怪陆离的史前史。西西里岛锡拉丘兹城的阿基米德 (大约公元前 287—公元前 212) 曾用我们现在所知的一种最早的方法求出某些几何图形的面积、体积和表面积。在漫长的 800 余年后，法国数学家皮埃尔·德·费马 (1601—1665) 采用一种非常现代的方法确定了曲线的切线斜率和曲线下面区域的面积。他们以及其他许许多多著名的前辈数学家们把微积分推上了历史舞台。

不过，这不是一本描写数学先驱们的书。不言而喻，微积分在很大

---

<sup>①</sup> John von Neumann, *Collected Works*, vol.1, Pergamon Press, 1961, p.3.

程度上应归功于以往的数学家，恰如现代艺术在很大程度上应归功于过去的艺术家一样。但是，一座专题博物馆——例如现代艺术博物馆——并不需要用一间又一间陈列室去展览对后世有影响的前现代艺术作品。就是说，这样一种博物馆的展览可以从中期开始。所以，对于展示微积分创建的历程，我想也可以这样做。

因此，我将从 17 世纪的两位学者艾萨克·牛顿（1642—1721）和戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（1646—1716）开始，正是他们两人促成了微积分的降生。莱布尼茨在 1684 年的一篇文章中率先发表了他的研究成果，文章的标题中包含一个拉丁词 *calculi*（一种计算系统），这个词后来就用来指代这门新生的数学分支。第一本教科书在十几年之后面世，微积分（*the calculus*）的名称在书中被确定下来。

其后几十年，其他几位数学家先承接了挑战。在这些先驱者中，最杰出的人物当推雅各布·伯努利（1654—1705）和约翰·伯努利（1667—1748）兄弟二人，以及举世无双的莱昂哈德·欧拉（1707—1783）。在他们的研究成果中有成千上万的页面涉及最高品位的数学，研究范围扩展到包罗极限、导数、积分、无穷序列、无穷级数以及其他许许多多主题在内的各个方面。这个四处延伸的题材带有一个称为“分析学”的总标题。

由于复杂性的日益增加，有关基本逻辑的各种困难问题也接踵而至。尽管微积分强大力又具有实用价值，但是它建立在一种不牢靠的基础之上。这使数学家们认识到，需要按照欧几里得几何的模型，采用一种精确和严格的方式重建这门学科。这样一项紧迫的任务是由 19 世纪的分析学家奥古斯丁·路易·柯西（1789—1857）、格奥尔格·弗雷德里希·贝尔哈德·黎曼（1826—1866）、约瑟夫·刘维尔（1809—1852）和卡尔·魏尔斯特拉斯（1815—1897）完成的。这几位数学大师以前所未有的热忱工作着，他们不辞艰辛，确切地定义了所用的术语，并且一一证明了到

那时为止被数学界毫无争议地接受的各种结果。

但是，一些问题的解决，推开了另外一些问题的大门——这是在科学发展中经常发生的事情。在 19 世纪下半叶，数学家们利用这些逻辑上严密的工具构造出大量奇特的反例，对它们的认识让分析学具有了空前的普遍性和抽象性。我们从格奥尔格·康托尔（1845—1918）的集合论以及后来的维托·沃尔泰拉（1860—1940）、勒内·贝尔（1874—1932）和亨利·勒贝格（1875—1941）等学者的成就中，可以明显看出这种趋势。

到 20 世纪初，分析学已经汇聚成包含无数概念、定义、定理和实例的一座宝库——并且发展为一种独具特色的思维方式，因此确立了它作为一个至高无上的数学体系的地位。

我们要从这座宝库中取出一批样品，目的是考察上面提到的那些数学家获得的成果，并且以一种忠实于原貌同时又让当今读者能够理解的方式展现出来。我将探讨那些能够说明微积分在其形成年代的发展状况的定理，认识那些最卓越的天才创建者们。简言之，本书是一部翻开这段令人神往的历史的“重要定理”集。

为了达到这个目标，我仅限于介绍少数有代表性的数学家的工作。首先我要坦诚披露：对于人物的安排是由本人的鉴赏倾向决定的。本书收入像牛顿、柯西和魏尔斯特拉斯这样一些数学家，他们会出现在任何一本类似的书中。选入另外一些数学家，如刘维尔、沃尔泰拉和贝尔等人，更多地是出于我个人的喜好。至于其他一些数学家，如高斯、波尔查诺和阿贝尔，他们则不在我的考虑之列。

同样，我讨论的某些定理是数学文献的所有读者都熟知的，尽管它们原有的证明对于不精通数学史的人而言是离奇的。莱布尼茨 1673 年关于“莱布尼茨级数”几乎不被人们承认的推导，以及康托尔 1874 年关于连续统不可数性的鲜为人知的首次证明，就属于这种情况。另外一些定理虽然在数学上是司空见惯的，但是很少出现在现代教科书中——这里

我所指的是像魏尔斯特拉斯构造的处处连续而无处可微的函数的结果，当他在 1872 年把这个结果提交给柏林科学院时引起了数学界的震惊。至于我的某些选择，我承认，是十分怪异的。例如书中包含欧拉对积分  $\int_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} dx$  的估值，这不过是为了展现这位数学家在分析学方面的奇才。

书中的每一个结果，从牛顿的正弦级数的推导，到伽玛函数的表示，再到贝尔的分类定理，都处于所在时代的研究前沿。总的说来，它们记录了分析学随着时间的演进过程，以及参与者在风格和实质上的变化。这种演进是引人瞩目的，因为可以将勒贝格 1904 年的一个定理同莱布尼茨 1690 年的一个定理之间的差别，比拟为现代文学同英国古典英雄史诗《贝奥武甫》之间的区别。尽管如此，我仍然相信每个定理都显示出值得我们关注甚至赞美的独创性——这一点是至关重要的。

自然，打算凭借考察几个定理来刻画分析学的特征，犹如试图通过采集几点雨滴来描绘一场雷雨的特征，所表达的观念不可能全面。为了担负这样一项任务，作者必须采纳某些恰当的限制作为准则。

我的准则之一是避免贪大求全，去写一部描写分析学发展进程的全面的历史书。无论如何，这是一项过于宏大的任务，何况已经出版了许多论述微积分发展的著作。我所喜爱的一些书籍已在正文中明确提出，或者作为资料列入参考文献。

第二条准则是把多元微积分和复分析排除在外。这样做或许是一种令人遗憾的选择，不过我相信是正确的。据此把这本书的内容被置于某种可以控制的范围内，从而增添叙述的连贯性。此种限制同时把对读者背景的要求降低到最低程度，因为一本只讨论一元实分析的书，能够理解它的读者将是最广泛的。

这就提出预备知识的问题。针对本书面对的读者，我写进许多技术



细节，所以只要具备最基本的数学知识就能理解书中的定理。某些早期的结果要求读者有毅力看完不止一页的代数运算。至于后期的某些结果则需要纯粹抽象的判别能力。一般而言，我不会对数学上缺乏勇气的人推荐此书。

同时，为力求达到简明扼要，同一本标准的教科书不同，我采用比较随意的写法。我的本意是想让这本书对于那些或多或少具备大学数学程度的读者，或者那些没有被随处可见的积分或  $\varepsilon$  符号吓倒的读者来说，更容易接受。我的目标是使预备知识刚好够用于理解所述主题，但是又不能再少。要是不这样做，将会使内容索然寡味，无法达到我的更大目标。

所以说这首先不是一本数学家的传记，也不是一部微积分的历史，更不是一册教科书。事实上，尽管在书中我有时记述传记材料，有时探讨某个主题同另一个主题之间的联系的历史，而且有时也采用教科书的方式介绍新奇的（或者久已被遗忘的）概念，我仍要指出这一点。不过我最初的动机是很简单的：同读者分享分析学的丰富历史中为人们喜闻乐见的某些结果。

同时，这引起我作最后一点说明。

在多数学科中存在一种传统，那就是研究卓越的先驱们的主要著作，那些先驱乃是学科领域中被称作“大师”的杰出人物。学文学的学生要拜读诗人和剧作家莎士比亚的作品；习音乐的学生需聆听作曲家巴赫的乐曲。然而在数学界，如果说这样一种传统不是完全没有的话，那么至少也是非常罕见的。本书是想使这种局面得以改观。不过我不打算把它写成一部微积分的历史，而必须把它作为展示微积分宏伟画卷的陈列室。

为了这一目的，我汇集了若干杰作，只不过它们不是绘画大师伦勃朗或者凡高创作的油画，而是欧拉或者黎曼证明的定理。这样一座陈列