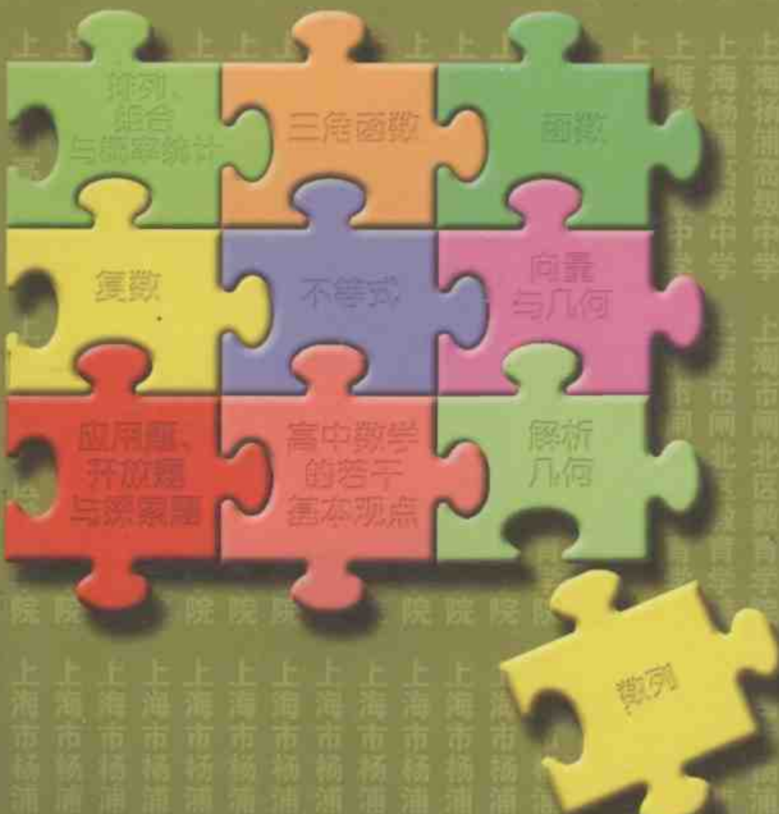
高中数学专题精讲

复数

主编：熊　斌　冯志刚
编著：周建新



中国出版集团
東方出版中心

高中数学专题精讲

复　　数

主编　熊　斌　冯志刚

编著　周建新

中国出版集团
东方出版中心

高中数学专题精讲

复　数

主　编：熊　斌　冯志刚
编　著：周建新

出版发行：东方出版中心
地　　址：上海市仙霞路 335 号
电　　话：021—62596195
邮政编码：200336
印　　刷：华东师范大学印刷厂
开　　本：890×1240 毫米 1/32
字　　数：2300 千字
印　　张：77
版　　次：2004 年 9 月第 1 版第一次印刷
ISBN7－80186－213－9

定　　价：100.00(共 10 册)
本册定价：10.00 元

高中数学专题精讲
编委会

主编 熊 斌 冯志刚

编委 （按姓氏笔画）

王元庆 冯志刚 朱永庆 况亦军
杨德胜 孟小龙 周建新 周 珺
张进兴 柯新立 曹建华 舒国樑
熊 斌 潘 宁

序 言

近年来，新课标，新教材在中小学中被越来越多地采用，中学教材出现了“一纲多本”，“一标多本”的多元化格局。在这些众多的教材中，虽然教材的形式有所不同，编排的顺序有所不同，但是万变不离其宗的是教材的知识内容和能力要求。基于这样的原因，我们组织了一批长期在教学第一线的特级教师和高级教师编写了这套《高中数学专题精讲》，“专题精讲”针对性强，可完整、系统、深入地把这一专题的内容讲透彻，实现知识和能力的升华和突破，另外，内容讲述的空间较大，综合性强，很少受到教材变动的影响。

这套丛书由如下10本书组成：《函数》，《不等式》，《三角函数》，《复数》，《数列（数列、数学归纳法）》，《向量与几何》，《解析几何》，《排列、组合与概率统计》，《应用题、开放题与探索题》，《高中数学的若干基本观点》。它们涵盖了高中数学的所有内容。

每一本书以讲为单位编写，根据本讲的要求，分若干小节，每一小节中都有以下栏目：

知识梳理与方法点拨　主要着重介绍该节的基础知识及相关的拓展知识以及该类问题一般的解题方法和特别的方法。构建知识体系和方法体系。

重点、难点、高考考点　介绍该节的重点、难点和高考考点。

典型例题精讲　选择经典考题和作者原创或改编的典型问题，分析解题思路和主要步骤，并给出详细的解答，以达到举一反三，触类旁通。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

自我检测 提供了与该部分内容有关的习题，注重精练，循序渐进，以利于学生巩固强化。

自我检测参考答案与提示 对自我检测中的试题作出提示或解答，切实提高学生的学习效果。

引申与拓广 主要介绍该节教材中没有涉及到的，但在解题中需要用到的基础知识和方法，以便快速、有效地提高学生分析问题解决问题的能力。

能力测试 这一节的一个综合测试，内容包括引申与拓广的部分。给学生的一个综合练习，检测一下自己对这一节内容的掌握情况。

能力测试参考答案与提示 能力测试试题的提示与参考答案。

《高中数学专题精讲》力求体现最新的教改精神和新课标的要求，通过对高中数学中的重点知识举行深入、细致的分析和讲解，使得学生能够解决学习中的困难，提高分析问题和解决问题的能力，使自己的数学能力有进一步的提升。

我们衷心希望广大教师和学生对本套丛书的编写提出宝贵的建议和意见。

《高中数学专题精讲》编委会

目　录

第一讲　复数的概念及向量表示

§1.1　数的概念的发展和复数的概念

知识梳理与方法点拨

一、数的概念的发展

实践是检验真理的唯一标准.数的概念的发展也是由实践产生的.在人们计数和运算过程中,要用到各种类型的数,而当所有类型的数都不能适应时,人们总会扩展思维,发展新的类型的数.

现在世界上通用的数字1、2、3、4、5、6、7、8、9、0,最早是古代印度人使用的,后来经过阿拉伯人的不断改进,演变成今天的阿拉伯数字.由这些数字可以表示最简单的数即正整数,记为**N**.

后来人们发现很多数量具有相反的意义,例如上升与下降、前进与后退、增大与减小等,于是就产生了负数的概念.正整数(记为$\mathbf{N}^*$)、零、负整数组成了整数,记为**Z**.

人们又发现,仅仅能表示整数是不够的,例如5个人分4件东西,每个人应得多少呢?分数于是应运而生了.分数都可以表示为整数与整数相除的形式,人们统称整数和分数为有理数.他们认为这些数才是直观的,有道理的数.有理数记为**Q**.

但是,在2500年前希腊的毕达哥拉斯学派有一个学生叫希帕索斯,他在求1和2的比例中项时,发现没有一个能写成整数比的数来表示它.如果设这个数为x,则有$x^2=2$.于是,无理数就在这种需求下产生了.人们陆续发现了一些无理数如π、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$等,有理数和无理数统称为实数,记为**R**.

进入十七世纪,人们以为数的概念的发展已经完美了,但像$x^2=-1$这样的方程的解如何表示呢?实数是无法表示的.法国数学家笛卡尔在1637年已提出了实数和虚数的概念,但用$i=\sqrt{-1}$表示虚数的单位即单位虚根是十八世纪著名的数学家欧拉的贡献.后来人们在这基础上把实数和虚数结合起来,记为$a+bi(a、b\in\mathbf{R})$的形式,称为复数,记为**C**.

二、复数的有关概念

设 $z = a + bi(a、b \in \mathbf{R})$,则

1. a 称为 z 的实部,b 称为 z 的虚部,记为 $\mathrm{Re}(z) = a$,$\mathrm{Im}(z) = b$.
2. 当 $b = 0$ 时,z 为实数.
3. 当 $b \neq 0$ 时,z 为虚数.
4. 当 $a = 0, b \neq 0$ 时,z 为纯虚数.
5. 仅当两个复数为实数时,两个复数才能比较大小.

三、复数相等的充要条件

设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$,其中 $a、b、c、d$ 为实数,则 $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$, $b = d$.特别地,$z_1 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

重点、难点、高考考点

重点:理解数的概念的发展过程,掌握复数的有关概念,熟记复数相等的充要条件.

难点:灵活运用复数的有关概念和复数相等的充要条件解题.

考点:复数相等的充要条件.

典型例题精讲

[例1]　判断下列各命题是否正确:

(1) 若 $b \in \mathbf{R}$,则 bi 为纯虚数.

(2) 实数之和仍为实数,虚数之和仍为虚数.

(3) $4i > 3i$.

(4) 实数与虚数之和仍为虚数.

解题策略　要判断上述命题,必须掌握复数的有关概念.

解　(1) 该命题是错误的.若 $b = 0$,则 $bi = 0$ 为实数.

(2) 该命题是错误的.实数之和仍为实数,但虚数之和可以为实数,例如 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$,则 $z_1 + z_2 = 2$ 为实数,而不是虚数.

(3) 此命题是错误的.只有实数才能比较大小,虚数间不能比较大小.

(4) 此命题是正确的.设 $z_1 = a + bi$,$z_2 = c$,其中 $a、b、c \in \mathbf{R}, b \neq 0$,即 z_1 为虚数,z_2 为实数,$z_1 + z_2 = (a + c) + bi$,它的虚部为 $b \neq 0$,故 $z_1 + z_2$ 为虚数.

[例2]　设 $x、y \in \mathbf{R}$,若 $(2x - 3) + 7i = 1 + (2y + 1)i$,求 x 和 y 的值.

解题策略 应用复数相等的充要条件即可列方程求出 x 和 y.

解 由复数相等的充要条件有

$$\begin{cases}2x-3=1,\\7=2y+1.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$$

点评 由两个复数(带参数)相等,即可列出两个方程,利用方程组即可求解参数,这是常用的解题方法.

[例 3] 是否存在实数 x,使 $(2x^2-5x+2)+(x^2-x-2)i=0$.

★★★

解题策略 由复数等于零的充要条件可列方程解出 x.

解 由 $(2x^2-5x+2)+(x^2-x-2)i=0$,有

$$\begin{cases}2x^2-5x+2=0, & ①\\x^2-x-2=0. & ②\end{cases}$$

★★★

由①解得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=2$,

由②解得 $x=-1$ 或 $x=2$.

故 x 可以取值为2.

点评 复数 $z=0$ 即等价于 z 的实部和虚部均为零,这个结论应用十分广泛,希望好好掌握.

★★★

[例 4] 若 $x、y\in\mathbf{R}$,$(3+i)x+(-2+2i)y-(1+11i)=0$,求 $z=x+yi$ 的值.

解题策略 首先要将方程写成实部与虚部之和的形式,再利用复数为零的充要条件解题.

解 由 $(3+i)x+(-2+2i)y-(1+11i)=0$,

有 $(3x-2y-1)+(x+2y-11)i=0$,

于是有

$$\begin{cases}3x-2y-1=0,\\x+2y-11=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=3,\\y=4.\end{cases}$$

点评　在处理复数相等的问题时，通常将复数写成实部与虚部之和的形式，这样可以充分应用复数相等的充要条件.

［例5］　已知 m 为实数，求 m 为何值时，$z = m^2 - 5m + 6 + (m^2 - m - 2)i$ 是(1) 纯虚数?(2) 虚数?(3) 实数?

★★★

解题策略　利用纯虚数、虚数、实数的定义和相关概念可求解 m.

解　(1)z 为纯虚数即

$$\begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0, & ① \\ m^2 - m - 2 \neq 0. & ② \end{cases}$$

由①得　$m = 2$ 或 $m = 3$,

由②得　$m \neq -1$ 且 $m \neq 2$,

故 $m = 3$.

★★★

(2) z 为虚数，即 $m^2 - m - 2 \neq 0$,

解得　$m \neq 2$ 且 $m \neq -1$.

(3) z 为实数，即 $m^2 - m - 2 = 0$,

解得　$m = 2$ 或 $m = -1$.

点评　在判断复数是否为纯虚数、实数时，要把充要条件列出来，而不能仅仅是必要条件，例如(1) 中②式就不可缺少.

★★★

［例6］　若方程 $x^2 - (4+i)x + (3 - ai) = 0$ 有实根，求实数 a 的值.

解题策略　由于方程有实根，我们不妨设实根为 x_0，代入方程，由复数相等的充要条件可解出 x_0 及 a.

解　设实根为 x_0，则 ${x_0}^2 - (4+i)x_0 + 3 - ai = 0$,

整理得　$({x_0}^2 - 4x_0 + 3) - (x_0 + a)i = 0$.

于是

$$\begin{cases} {x_0}^2 - 4x_0 + 3 = 0, & ① \\ x_0 + a = 0. & ② \end{cases}$$

由①解得　$x_0 = 1$ 或 $x_0 = 3$,

代入②有　$a = -1$ 或 $a = -3$.

点评　解复系数方程有一定难度，但题设已说明方程有实根，直接设实根代入方程更为简洁一些.

［例7］　已知 x、$y \in \mathbf{R}$，若 $z = (x^2 - 2x) + (4y - y^2 - 5)i$，且 $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$，求 x 和 y 的值.

解题策略　由 $\mathrm{Ke}(z) = \mathrm{Im}(z)$ 可列方程，进而求 x 和 y.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解 由 $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$，

有 $x^2-2x=4y-y^2-5$，

即 $(x-1)^2+(y-2)^2=0$，

于是有 $x=1, y=2$.

点评 一个方程本只可解一个未知数，但特殊方程可以解多个未知数.

[例 8] 已知 x 为实数，且 $(x-3)+(x^2-13x+40)i>4$，求 x 的值.

解题策略 两个复数比较大小，则仅有两个实数间能比较大小，故不等式左边为实数.

解 由 $(x-3)+(x^2-13x+40)i>4$，

有

$$\begin{cases} x-3>4, & ① \\ x^2-13x+40=0. & ② \end{cases}$$

由 ② 式得 $x=5$ 或 $x=8$，

分别代入 ① 式，仅有 $x=8$ 满足条件，

故 $x=8$.

点评 两个复数比较大小，仅有两复数均为实数时才可以比较，即使虚部相等也不可以，如 $1+i$ 和 $2+i$ 就不能比较大小.

[例 9] 若 $x\in\mathbf{R}$，复数 $z=(-x^2+4x+7)+(x-4)i$，当 z 的实部 $\mathrm{Re}(z)$ 取到最大值时，求 z 的值.

解题策略 在 $\mathrm{Re}(z)$ 取最大值时，可求出 x，代入 z 即可求得 z.

解
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z)&=-x^2+4x+7\\&=-(x-2)^2+11\end{aligned}$$

当 $\mathrm{Re}(z)$ 取最大值时，$x=2$，此时 $\mathrm{Re}(z)=11$.

将 $x=2$ 代入 z 有 $z=11-2i$.

点评 虚数没有大小之分，但其实部和虚部为实数，可以比较大小.

[例 10] 若 $\theta\in\mathbf{R}$，$z_1=\cos\theta+i\sin2\theta$，$z_2=\sqrt{3}\sin\theta+i\cos\theta$，且 $z_1=z_2$，求 θ 的值.

解题策略 由复数相等的充要条件即可解此题.

解 由 $z_1=z_2$，

有

$$\begin{cases}\cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta, & ①\\ \sin2\theta = \cos\theta, & ②\end{cases}$$

由 ① 得 $\cot\theta = \sqrt{3}$,即 $\theta = k\pi + \frac{\pi}{6}(k \in \mathbf{Z})$,

由 ② 有 $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$,即 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 或 $\cos\theta = 0$,从而 $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$ 或 $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}(k \in \mathbf{Z})$ 或 $\theta = 2k\pi + \frac{5}{6}\pi(k \in \mathbf{Z})$,

综上可得 $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}(k \in \mathbf{Z})$.

点评　本题列方程本身并不困难,但在解方程时,有一定复杂性,特别要注意 θ 不只一个解,有无数个解.

自我检测

1. 下面给出四个命题:

① 若 $b \in \mathbf{R}$,则 bi 为纯虚数;

② 若 $a + bi \in \mathbf{R}$,则 $b = 0$;

③ 零不在虚轴上,不是虚数;

④ 若 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$,且 $x_1 + y_1 i > x_2 + y_2 i$ 成立,则 $x_1 > x_2$, $y_1 = y_2 = 0$.

其中正确的命题有(　　)

A.0 个　　B.1 个　　C.2 个　　D.3 个

2. $a \in \mathbf{R}$,则 $a + a^2 i$ 不可能是(　　).

A. 复数　　B. 实数　　C. 虚数　　D. 纯虚数

3. 满足 $(a + b) + (a^2 + b^2 - 2ab)i$ 为正实数的选项是(　　).

A. $a = b$ 且 $a, b \in \mathbf{R}$　　B. $a > 0$ 且 $b > 0$

C. $a = b$ 且 $a, b \in \mathbf{R}^+$　　D. $a, b \in \mathbf{R}$

4. 若 $m \in \mathbf{R}$, $(m^2 + 8m + 15) + (m^2 + 6m + 9)i$ 为纯虚数,则(　　).

A. $m = -3$ 或 $m = -5$　　B. $m = \pm 3$

C. $m = -5$　　D. $m = 3$

5. 若 C = {复数}, R = {实数}, U = {虚数}, P = {纯虚数},则下面正确的是(　　).

A. $U \subset P \subset C$　　B. $P \subset U \subset C$

C. $R \subset P \subset C$　　　　　　　D. $R \subset U \subset C$

6. 一个复数与它的倒数互为相反数，则这个复数的解的个数为(　　).

A. 0 个　　　B. 1 个　　　C. 2 个　　　D. 3 个

7. 若 $x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i$，则(　　).

A. $x_1 = x_2, y_1 = y_2$　　　　　B. $x_1 = x_2$

C. $y_1 = y_2$　　　　　　　　　D. 以上选项都不对

8. $x, y \in \mathbf{R}$，$(x^4 - 4x + 4y - 32) + (x - 2)i = 0$，则 $x =$ ________，$y =$ ________.

9. 若 $(2 + \cos\theta) + i(\sin\theta - 1) \in \mathbf{R}$，则 $\theta =$ ________.

10. 设 $k \in \mathbf{R}$，若 $\dfrac{2k-3}{k^2-k-2} + (2k^2 - 3k - 2)i \in \mathbf{R}$，则 $k =$ ________.

11. 设 $x, y \in \mathbf{R}$，若 $(2x + 3) + (x - 2)i = 3y + (2y - 6)i$，则 $x =$ ________，$y =$ ________.

12. 设 $z_1 = 4 + 3i$，$z_1 + z_2 \in \mathbf{R}$，$z_1 - z_2$ 是纯虚数，则 $z_2 =$ ________.

13. 设 $m, n \in \mathbf{R}$，若 $(2 + 5i)m - (3 + 4i)n + (5 + 2i) = 0$，求 m、n 的值.

14. 设 $k \in \mathbf{R}$，方程 $(k + i)x^2 - 3ix + (k - 6 + 2i) = 0$ 有实根，求 k 的值.

15. 设 a、b、c、$d \in \mathbf{R}$，$(a\cos\theta + b\sin\theta) + (a\sin\theta - b\cos\theta)i = c + di$，求证：$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

自我检测参考答案与提示

1. C.

本题给出的四个命题中，① 中如果 $b = 0$，则 $bi = 0$ 为实数，所以 ① 是错误的；② 中没有给定 $a, b \in \mathbf{R}$，例如 $a = 1 - i, b = 1$，则 $a + bi \in \mathbf{R}$，但 $b \neq 0$，所以 ② 也是错误的；③ 是对的，零是实数，也是复数，但不是虚数；④ 也是对的，虚数之间不能比较大小，所以 $y_1 = y_2 = 0$.

2. D.

当 $a > 0$ 或 $a < 0$ 时，$a^2 > 0$，所以 $a + a^2 i$ 为虚数，也是复数；当 $a = 0$ 时，$a + a^2 i = 0$ 为实数，所以 $a + ai$ 不可能的只有纯虚数.

3. C.

由题设知 $a^2+b^2-2ab=0$ 且 $a+b>0, a, b\in \mathbf{R}$.所以有 $a=b$ 且 $a>0, b>0$. 满足条件的选项只有 C.

4. C.

由题设知 $m^2+8m+15=0$ 且 $m^2+6m+9\neq 0$. 由 $m^2+8m+15=0$ 有 $m=-3$ 或 $m=-5$;由 $m^2+6m+9\neq 0$ 有 $m\neq -3$,所以 $m=-5$.

5. B.

本题 A 选项中 $U\subset P$ 是错误的,因为纯虚数是实部为零的特殊虚数,C 选项中 $R\subset P$ 是错误的,和 D 中 $R\subset U$ 是错误的一样,我们有 $R\cap P=\emptyset, R\cap U=\emptyset$.

6.C.

设这个复数为 z,则 $z=-\frac{1}{z}$,即 $z^2=-1$.我们知道 $i^2=-1$,从而有 $(-i)^2=-1$,所以 i 和 $-i$ 是解,即两个解.

7. D.

由于题设中没有 $x_1, x_2, y_1, y_2\in \mathbf{R}$ 这个条件,所以 x_1、x_2 并不一定表示实部,y_1, y_2 也不一定为虚部,也就没有 $x_1=x_2$ 或 $y_1=y_2$ 了.

8. 2,6.

由于 $x, y\in \mathbf{R}$,故有 $x^4-4x+4y-32=0, x-2=0$.由后一式解得 $x=2$,代入前式知 $y=6$.

9. $\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$.

由题设知 $\sin\theta-1=0$,即 $\sin\theta=1$,故 $\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$.

10. $-\frac{1}{2}$

由题设有 $2k^2-3k-2=0$,解得 $k=2$ 或 $k=-\frac{1}{2}$,将 $k=2$ 和 $k=-\frac{1}{2}$ 分别代入实部知,仅有 $k=-\frac{1}{2}$ 时实部有意义.

11. 6,5.

由题设有 $2x+3=3y$, $x-2=2y-6$,两式联立解得 $x=6, y=5$.

12. $4-3i$.

不妨设 $z=a+bi$, $a, b\in \mathbf{R}$,由 $z_1+z_2\in \mathbf{R}$ 有 $3+b=0$,从而

$b=-3$;由 z_1-z_2 为纯虚数有 $4-a=0$,从而 $a=4$,即 $z_2=4-3i$.

13. 2,3

由$(2+5i)m-(3+4i)n+(5+2i)=0$,

有$(2m-3n+5)+(5m-4n+2)i=0$,

从而有 $\begin{cases}2m-3n+5=0,\\5m-4n+2=0.\end{cases}$

解方程组有

$\begin{cases}m=2,\\n=3.\end{cases}$

14. 3或2

将方程变形得$(kx^2-6+k)+(x^2-3x+2)i=0$,

不妨设方程的实根为 x_0,由于 $k\in\mathbf{R}, x_0\in\mathbf{R}$,

有 $k{x_0}^2-6+k\in\mathbf{R}$, ${x_0}^2-3x_0+2\in\mathbf{R}$.

从而有 $\begin{cases}k{x_0}^2-6+k=0,\\{x_0}^2-3x_0+2=0.\end{cases}$

由方程组第二式解得 $x_0=1$ 或 $x_0=2$,分别代入第一式

有 $k=3$ 或 $k=2$.

15. 由于 $a、b、c、d\in\mathbf{R}$,

所以 $a\cos\theta+b\sin\theta\in\mathbf{R}$, $a\sin\theta-b\cos\theta\in\mathbf{R}$,

从而有 $c=a\cos\theta+b\sin\theta$, $d=a\sin\theta-b\cos\theta$,

故
$$\begin{aligned}c^2+d^2&=(a\cos\theta+b\sin\theta)^2+(a\sin\theta-b\cos\theta)^2\\&=a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta b^2\sin^2\theta+a^2\sin^2\theta-2ab\cos\theta\sin\theta\\&\quad+b^2\cos^2\theta\\&=a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&=a^2+b^2.\end{aligned}$$

证毕.

引申与拓广

知识与方法的拓展

复数诞生后,在很长一段时间内,人们仍认为虚数是不实在的,虚无缥缈的.后来在实践中人们逐渐接受了虚数,复数的概念逐渐深入人心.那么复数是不是数的概念的顶峰呢?不是!1843年,英国数学家哈密尔顿

又提出了"四元数"的概念,即一种形如 $q = a + x\vec{j} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 的数,它由一个标量(实数)和一个向量 $x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$($x$、$y$、$z \in \mathbf{R}$)组成的.四元数在数论、群论、量子理论等方面有广泛的应用.从数的发展历程来看,数的概念将不断向前发展.

典型例题

[例 1] 若 x、$y \in \mathbf{R}$, $z_1 = 4x + (y^2 - 4)i$, $z_2 = 2y + (x^2 - 3x + 2)i$,且 $z_1 > z_2$,求所有的(x, y).

解题策略 由于仅有实数才可以比较大小,故 z_1、z_2 虚部都为零,于是可解得 x、y,再代入 z_1、z_2,比较 z_1 和 z_2 就可确定所有的(x, y).

解 由于 $z_1 > z_2$,

故 $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) = 0$,即

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

解得 $x = 1$ 或 2, $y = 2$ 或 -2.

当 $x = 1$ 时, $z_1 = 4$,此时 y 可取 -2;

当 $x = 2$ 时, $z_1 = 8$,此时 y 可取 2 或 -2.

故所有(x, y)为$(1, -2)$, $(2, -2)$, $(2, 2)$.

点评 由于复数的比较仅能在实数间比较,我们首先求出了 x 和 y 的可能值,但不是所有(x, y)都满足 $z_1 > z_2$,利用 $z_1 > z_2$ 可以确定所有满足条件的(x, y).

[例 2] 试证明所有复数 $z = a + bi$(a、$b \in \mathbf{R}$)都可写成 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$(其中 $r \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, $\theta \in \mathbf{R}$)的形式.

解题策略 我们由果索因,若 $a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,则 r、θ 应为多少呢?我们知道$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$,而 $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$,故有 $a^2 + b^2 = r^2$,即 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$,下面 θ 就不难得到了.

证明 $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i\right)$,

又由于$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$,

故必存在 $\theta \in \mathbf{R}$,使 $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com