普通高等学校**基础课程类**应用型规划教材

山东省精品课程建设教材

概率论与数理统计

（第2版）

杨洪礼 鲍承友 主编

朱传喜 主审

北京邮电大学出版社

www.buptpress.com

普通高等学校基础课程类应用型规

山东省精品课程建设教材

概率论与数理统计

（第 2 版）

杨洪礼　鲍承友　主　编

牛玉玲　张　欣　陈凡红　副主编

朱传喜　主　审

北京邮电大学出版社

·北京·

内容简介

本书是应用型本科理工类基础课程规划教材之一，同时也是山东省精品课程建设教材之一，是针对普通高等学校本科应用型教学的基础课程编写的数学类统编教材.全书以易于学生接受的方式介绍概率论与数理统计的基本内容，并着重介绍概率论与数理统计中主要内容的思想方法；作为本书的另外一个特色，在每章的内容中穿插介绍了与本章内容有关的一些背景知识或概率论与数理统计的应用实例，旨在加深学生对概率统计内容的了解，扩大学生的视野；每章的习题选择也比较新颖，增加了一些与最新科技及日常生活有关的习题，有助于培养学生解决问题的能力；为提高学生应用计算机解决问题的能力，附录中介绍了概率论与数理统计中数学实验的内容.书末附有习题答案及常用的一些统计分布表.

本书主要用作高等学校理工科本科或文科社会学专业的在校学生或理工科、经济类夜大、函授学员的教材，同时也可供科技、工程技术人员参考，对报考研究生的人员也可以提供非常有益的帮助.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 /杨洪礼，鲍承友主编．--2 版．--北京：北京邮电大学出版社，2010.2
ISBN 978-7-5635-2229-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①杨…②鲍… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 017879 号

书　　名：概率论与数理统计(第 2 版)
主　　编：杨洪礼　鲍承友
责任编辑：毋燕燕
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市梦宇印务有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：15.25
字　　数：332 千字
印　　数：1—5 000 册
版　　次：2007 年 12 月第 1 版　2010 年 2 月第 2 版　2010 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2229-3　　定　价：26.00 元

第 2 版前言

《概率论与数理统计（第 2 版）》是在《概率论与数理统计（第 1 版）》（杨洪礼，鲍承友，张序萍主编）的基础上改编而成的。本书第 1 版出版的内容得到了专家、同行和读者的肯定。在第 1 版的使用过程中，部分专家、同行和读者给我们提出了宝贵的建议和意见，我们依据教育部制定的最新教学大纲，结合提出的建议和意见对第 1 版的内容进行了一定的修改，同时也改正了第 1 版中的不足之处。修订的主要理念还是注重基本概念的应用和用概率统计解决问题的思想方法，淡化理论证明和推导过程，同时注意加强概率论与数理统计的基本概念和容易混淆概念的阐述和分析，特别是在例题的选择方面尤其注意，在概率论部分体现的比较充分。

第 2 版的修订工作主要是由杨洪礼来完成。本次修订的重点是数理统计部分，使得内容更加适合读者的需要，同时增加了一些适合于社会学专业的内容，也适当地照顾了学生考研究生的需要。本书内容建议讲授学时为 52 学时，第 8 章第 3 节以后的内容为部分专业选学内容。当然，本次修订仍然会存在缺点和不足，真诚地希望专家同行和读者继续提出建议和意见，以便我们继续完善教材，把它打造成一个适合大家需要的集中了大家智慧的精品教材。

编　者

第1版前言

概率是描述随机事件发生的可能性大小的一个度量.通过对简单随机事件的研究得到的规律来解决自然界中遇到的更为复杂的随机现象,是研究随机现象规律性的一个有效工具和方法.同时概率也是学习统计学中数理统计部分的基础.作为统计学的基础理论的数理统计学,其方法与思想已经渗透到现代社会生活的各个方面,并对各门学科的发展起到了巨大的推动作用.统计学没有自己基于试验的专门研究对象,但是它给其他学科(如医学、社会学、心理学、生物学等)的研究人员提供了一套解决他们领域内的具体问题的有效方法和工具.所以学好统计学对一个学生的发展有着很大的帮助.

现代科学的迅速发展,使得知识更新的速度不断加快,也对高等教育提出了更高的要求与挑战.在教学中,我们越来越注意学生的个性化发展,注重学生个人特长的发挥和能力素质的培养.作为教学载体的教材也应该与时俱进,更好地适应高等教育的需要.作为大学本科学生的一门重要的数学基础课的概率统计,其教材的改革也成为当务之急.为了进一步提高概率统计的教学质量,我们结合多年的教学经验,在借鉴国内外同类教材的经验的基础上,针对电子信息类本科应用型教学的特点,紧扣教育部概率统计的最新教学大纲编写了这本教材.全书以适应应用型教学为指导思想,以易于学生接受的方式介绍概率论与数理统计的基本内容,并着重介绍概率论与数理统计中主要内容的思想方法;作为本书的另外一个特色,我们在每章的内容中穿插介绍了和本章内容有关的一些背景知识或概率论与数理统计的应用实例,旨在加深学生对概率统计内容的了解,扩大学生的视野;每章的习题选择也比较新颖,增加了一些与最新科技及日常生活有关的习题,有助于培养学生解决问题的能力,书末附有参考答案.作为改革的一个试点,本书在涵盖基本内容的前提下弱化了理论推导以及对学生运算技巧和解题的要求,而着重介绍其中所蕴涵的思想及解决问题的基本方法,突出科学的思维方法,拓广领域,加强应用.本书特别地对古典概型部分的解题技巧有所弱化,希望这种试点能有利于应用型教学的改革.同时,为提高学生应用计算机解决问题的能力,书中附了用 Mathematica 来解决概率论与数理统计问题的一些数学实验.

本书是针对应用型本科电子信息类教学编写的,但同时也是适合理工科、文科社会学专业、经济类夜大、函授学员的教材,同时也可供科技、工程技术人员参考,对报考研究生的人员也可以提供非常有益的帮助.

全书第 1～5 章是概率论部分，建议讲授 30～34 学时；第 6～9 章为数理统计部分，建议讲授 32 学时. 各校根据实际情况或专业需要也可以选学其中的部分内容. 本书由杨洪礼老师负责组织和全书统稿，并编写数理统计部分，由鲍承友老师负责编写概率论部分，张序萍老师负责本书部分内容的编写，郭花老师和唐雷雨老师负责本书部分内容的编写和校对，陈凡红、何云、薛威也参加了部分内容的编写工作. 在本书编写过程中得到北京邮电大学、北京建工学院、山东建筑大学、北京化工大学、江西九江学院、山东科技大学、青岛大学部分老师的有益建议和帮助，同时李述山教授仔细审阅了原稿并提出了一些有益的建设性的意见与建议，同时，本书也参考了一些相关教材，在此一并表示感谢. 由于编者水平所限，本书不可避免地会出现一些缺点或者遗漏之处，欢迎专家及同行批评指正.

编　者

目　　录

第1章　概率与古典概型

在自然界和社会中存在着各种各样的现象，这些现象一般可以分为两类. 一类是在一定条件下必然要发生的现象，例如，向上抛一石子必然下落，在标准大气压下，水温度达到100 ℃就要沸腾等，这类现象称为确定性现象. 另一类现象则与此不同，例如，在相同的条件下抛一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前都无法确定会出现哪种结果，掷一枚骰子，可能会出现的点数有1、2、3、4、5、6，但是我们无法确定会出现哪种情况. 这类现象，在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前却不能预知确切的结果. 人们在经过长期的观察和深入研究后，发现在大量的重复试验或观察下，结果却呈现某种规律性. 例如，多次重复抛掷硬币发现正面朝上大约有一半，将一枚骰子反复抛掷后发现出现各种点数的次数大约是相同的. 这种大量重复试验或观察中所呈现出来的规律性，就是我们以后所说的统计规律性. 我们将这种在个别试验中结果呈现出不确定性，而在大量重复试验中结果又具有统计规律性的现象称为随机现象.

对于随机现象，人们很早就注意到它的存在了. 从亚里士多德时代开始，哲学家们就已经认识到随机现象在生活中的作用. 他们把随机现象看成破坏生活规律，超越了人们理解能力范围的东西，他们没有认识到有必要去研究这些随机现象，也没有意识到不确定性也可以度量. 许多数学家都曾研究过随机现象，如帕斯卡、贝努利、高斯等. 将不确定性数量化则是近代的事，但是在这一领域取得的成果已经给人类生活的诸多领域带来了一场深刻的革命. 概率论与数理统计就是研究随机现象及其统计规律性的一门数学学科.

概率论与数理统计有着广泛的应用. 例如，金融、信贷、医疗、保险等行业策略的制定；流水线上产品质量检验与质量控制；食品保质期，弹药储存分析，电器与电子产品的寿命分析等. 概率问题与我们的生活如此密切相关，正如法国数学家拉普拉斯所说："生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率问题."

1.1　随机试验与随机事件

1.1.1　随机试验

为了研究随机现象及其统计规律，必须对随机现象进行观察或试验. 以下把对随机现象所进行的观察或试验称为随机试验. 如下所示的4个例子：

(a) 掷一枚骰子,观察出现的点数;

(b) 抛一枚硬币,观察出现正面、反面的情况;

(c) 一射手进行射击,直到击中目标为止,记录射击次数;

(d) 在一批灯泡中任取一只,测试它的寿命.

上面列举的 4 个例子,具有以下共同的特点:

(1) 试验在相同的条件下可以重复进行;

(2) 试验的可能结果不止一个,并且所有可能的结果是可以预先知道的;

(3) 在试验之前不能确定具体哪一个结果会出现.

我们把具有以上 3 个特点的试验称为**随机试验**,简称试验,记为 E.

1.1.2 样本空间

随机试验 E 中,试验的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**,一般用字母 S 表示. S 中的元素,称为样本点,常用 e 表示.

在例(a)中,试验的所有可能结果有 6 个:1 点,2 点,…,6 点. 因此样本空间为

$$S_1=\{1,2,3,4,5,6\};$$

在例(b)中,试验的所有可能结果有两个:正面、反面. 因此样本空间为

$$S_2=\{\text{正面},\text{反面}\};$$

在例(c)中,试验的所有可能结果为全体正整数,从而样本空间为

$$S_3=\{1,2,3,\cdots\};$$

在例(d)中,试验的所有可能的结果为非负实数,因此样本空间为

$$S_4=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

在上述的例子中,例(a)、例(b)试验的样本空间都只有有限个样本点,称之为有限样本空间. 例(c)中样本空间有可列无穷多个样本点,而例(d)中样本点也是无穷多个,但它们充满区间$[0,+\infty)$,这时我们称样本点数为不可列无穷多个.

1.1.3 随机事件

在随机试验中,我们关心的是那些可能发生也可能不发生的事情,称为随机事件. 它实际上是样本空间的子集. 随机事件常用大写的英文字母 A,B,C 等来表示. 例如,在例(a)中,“点数为偶数”;例(b)中,“出现正面”;例(c)中,“次数不多于 10 次”;例(d)中,“灯泡的寿命为 1 500 小时”,“灯泡的寿命在 2 000 到 3 000 小时之间”,等等,都是随机事件. 对一次试验来说,它们可能发生,也可能不发生,因而都是随机事件. 这些事件可以分别记为

$A=\{2,4,6\}$;

$B=\{\text{正面}\}$;

$C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;

$D_1=\{t\mid t=1\,500\}$;

$D_2=\{t\mid 2\,000\leqslant t\leqslant 3\,000\}$.

在一次试验中，若事件 A 中的某一个样本点出现，我们就称事件 A 在这次试验中发生了. 对于一个随机试验来说，它的每一个可能的结果，也就是样本空间中的每一个样本点，显然都是随机事件，它们是随机试验中最简单的随机事件，称为基本事件. 例如 B，D_1. 它们显然都是单点集. 除了基本事件外，还有复合事件，它是由试验的若干可能结果组成的. 例如 A,C,D_2 都是复合事件.

在随机试验中，每次试验一定发生的事件称为必然事件；每次试验都必定不发生的事件称为不可能事件. 一般地，必然事件用 S 表示，不可能事件用 $\varnothing$ 表示. 显然，S 就是样本空间，它是自身的子集，在一次试验中，必有一个样本点出现，从而 S 必然发生. 而 $\varnothing$ 是空集，它不含任何样本点，在试验中自然不可能发生.

必然事件和不可能事件本质上不是随机事件. 为了今后研究问题方便，我们把必然事件和不可能事件作为两个极端形式的随机事件.

1.1.4 事件的关系与运算

随机事件是样本空间的子集，因此事件的关系和运算与集合的关系和运算是一致的. 下面给出事件间的关系和运算在概率论中的提法.

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

1. 若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，这表示事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生. 也可记为 $B\supset A$，它们的几何表示如图 1.1 所示.

若事件 B 包含事件 A，并且事件 A 包含事件 B，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

2. 表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和事件，亦称为事件 A 与事件 B 的并，记为 $A\cup B$，它们的几何表示如图 1.2 所示. 当且仅当 A 和 B 至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

事件的并，可以推广到有限多个事件甚至无穷但可列个事件的情形.

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots$$

表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生.

3. 表示事件 A 与事件 B 同时发生的随机事件，称为事件 A 与事件 B 的积事件，亦称为事件 A 与事件 B 的交，记为 $A\cap B$ 或 AB，它们的几何表示如图 1.3 所示.

与事件的和类似，事件的积也可以推广到有限个甚至无穷可列个事件的情形.

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots$$

表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生.

4. 表示事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$，它们的几何表示如图 1.4 所示.

5. 当 $A\cap B=\varnothing$，我们称事件 A 与事件 B 是互不相容的，或互斥的. 它表示事件 A 与事件 B 不可能同时发生，它们的几何表示如图 1.5 所示. 显然基本事件是两两互斥的.

6. 当 $A\cup B=S$，且 $A\cap B=\varnothing$ 时，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，或称事件 A 与事件 B 互为逆事件. 它表示在一次试验中事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$，它们的几何表示如图 1.6 所示. 显然 $\overline{A}=S-A$.

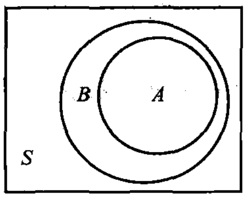

图 1.1

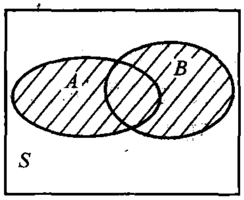

图 1.2

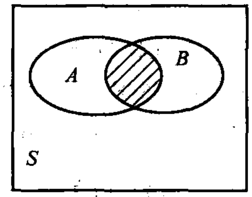

图 1.3

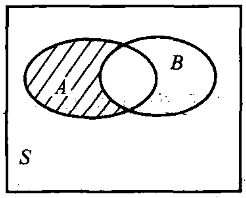

图 1.4

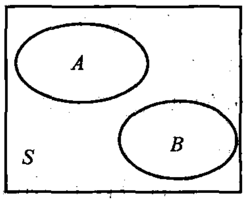

图 1.5

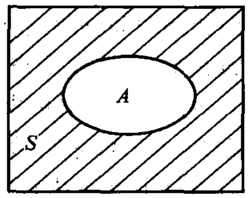

图 1.6

与集合的运算规律相对应，在进行事件的运算时，经常用到下面的运算规律.

(1) 关于事件的和的运算规律.

$A\cup B=B\cup A$；　　(交换律)

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；　　(结合律)

$A\cup A=A$；　　(幂等律)

$A\cup S=S$.

(2) 关于事件的积的运算规律.

$A\cap B=B\cap A$；　　(交换律)

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；　　(结合律)

$A\cap A=A$；　　(幂等律)

$A\cap S=A$.　　(吸收律)

(3) 关于事件的积与事件的和的混合运算规律.

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；　　(分配律)

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；　　(分配律)

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.　　(对偶律)

对偶律对于任意有限个事件或者是可列无穷个事件和、积都是成立的.

可见,概率论中的事件与集合论中的集合,以及它们的关系和运算是一致的. 为了便于对照,列表如表 1.1.

表 1.1

记号	概率论	集合论
S	必然事件,样本空间	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	集合
$e\in A$	事件 A 发生	e 是集合 A 的元素
$A\subset B$	事件 A 发生则事件 B 一定发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A,B 相等	集合 A,B 相等
$A\cup B$	事件 A,B 至少有一个发生	集合 A,B 的并集
$A\cap B$	事件 A,B 同时发生	集合 A,B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A,B 的差集
$\overline{A}$	A 的对立事件	集合 A 的补集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A,B 不相容	集合 A,B 不相交

1.2 随机事件的频率与概率

上节介绍了随机试验、样本空间和随机事件等基本概念. 对于一个随机事件来说,它在某一次试验中可能发生,也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的机会有多大. 例如,为了确定保险费,保险公司希望知道某些意外事故发生的可能性的大小. 我们希望找到一个合适的数来描述事件在一次试验中发生的可能性大小. 本节将要给出的概率这一概念正是对随机事件发生的可能性大小的一种度量. 为此,先来介绍一下我们非常熟悉的概念——频率.

1.2.1 频率

定义 在相同的条件下,进行了 n 次随机试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生了 m 次,称比值

$$f_n(A)=\frac{m}{n}$$

为事件 A 在这 n 次随机试验中发生的**频率**.

经验告诉我们,在一般情况下,如果一个事件在试验中发生的频率越大,则事件发生的可能性就越大. 也就是说频率在一定程度上反映了随机事件发生的可能性的大小. 但

是，对于同一个试验，不同的试验者可能会得到不同的结果，即使是同一个试验者，其在不同的时间得到的结果也很可能是不同的.而一个事件发生的可能性大小应该是确定的.因此，频率虽然在一定程度上反映了事件发生可能性的大小，却不能用它作为事件发生可能性大小的客观度量.另一方面，虽然频率不是概率，但是频率的一些性质对我们引入概率的概念还是很有帮助的.因此下面先来讨论一下频率的性质.

由频率的定义可得到它有以下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

为了更好地理解频率的性质，我们来看下面的例子.

例 1.1 考虑"抛硬币"这个试验，我们把一枚硬币抛掷 50 次、500 次，各做 5 遍，得到如表 1.2 的结果(其中 n_H 表示正面 H 发生的频数，$f_n(H)$表示正面 H 发生的频率).

表 1.2

试验序号	$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	22	0.44	251	0.502
2	25	0.50	249	0.498
3	21	0.42	256	0.512
4	24	0.48	253	0.506
5	18	0.36	251	0.502

表 1.3 是历史上抛硬币试验的结果.

表 1.3

试验者	n	n_H	$f_n(H)$
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
卡尔・皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
卡尔・皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从上述数据可以看出：

频率具有随机波动性，即对同样的 n 所得的 $f_n(H)$不尽相同，这也就验证了我们前面的结论.当抛硬币次数 n 较小时，频率 $f_n(H)$随机波动的幅度较大，但随着 n 的增大，频率 $f_n(H)$呈现出稳定性，即当 n 逐渐增大时，$f_n(H)$总是在 0.5 附近摆动，并逐渐稳定于 0.5.

一般地，当 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$逐渐稳定于某个常数 p，对每一个事件 A 都有这样