

文都考研命题研究中心策划
全国200座城市考研辅导班指定用书

全国硕士研究生入学统一考试 **2011**

高等数学 辅导讲义

主编 © 蔡子华

图表清晰展现知识结构

精辟讲解高数考查要点

名师指导复习关键环节

金题精讲揭示解题妙招

 原子能出版社



文都教育

文都考研命题研究中心策划
全国200座城市考研辅导班指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

2011³⁰

高等数学 辅导讲义

主编◎蔡子华

013

C072



原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导讲义/蔡子华主编.

—北京:原子能出版社,2008.6(2010.1重印)

ISBN 978-7-5022-4135-3

I. 全… II. 蔡… III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 085015 号

全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导讲义

总 编 辑 杨树录

策 划 文都考研命题研究中心

责任编辑 谭 俊

特约编辑 宫 静

印 刷 北京九天志诚印刷有限公司

出版发行 原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)

经 销 全国新华书店

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 13 字 数 230 千字

版 次 2008 年 6 月第 1 版 2010 年 1 月第 3 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5022-4135-3 定 价 20.00 元

网址: <http://www.aep.com.cn>

E-mail: atomep123@126.com

发行电话: 010-68452845

版权所有 侵权必究

前言

本讲义为广大考研学子复习高等数学(微积分)编写,由编者近年来的考研辅导班授课笔记整理而成。全书共分十一讲,均按重点知识结构图、基本内容、重点、典型例题解析顺序编写。

“重点知识结构图”给出了该单元重点知识及其关系,可使读者整体了解需掌握的知识,领会其内在联系。

“基本内容”系统列举了考纲考试内容的概念、定理、性质、基本公式、运算法则和方法,并对如何理解有关数学理论进行了阐述,以帮助读者深刻理解、切实掌握、融会贯通。

“重点”指出了根据近年来考研数学真题涉及的程度而归纳的知识名目,便于考生备考时准确把握重点。

“典型例题解析”结合典型例题对考研数学的重点题型分类进行了解题思路的分析及解题方法、技巧的归纳和总结,利于读者有效提高解题能力。该部分例题的选择严格遵循“紧扣硕士研究生入学统一考试数学考试大纲;重视基础,摒弃偏题、怪题;大部分题难度与历年考试真题里中等以上题相仿”的原则,旨在避免难度过高让考生备考时望而生畏丧失信心,难度过低让考生达不到考试要求的水平而导致考研失败。

本书选题精当,内容全面,重点突出,讲述通俗、严谨、条理分明,力求以不大的篇幅让使用本书的读者收效最大化。

由于考纲对各卷种在高等数学(微积分)科目中规定的考试内容大部分相同,且相同内容的考试要求差别不大,讲义没有分理工类和经济类编写。为方便读者使用,讲义中凡考纲仅对数学一考生要求的部分标有“*”记号;仅对数学二、数学三考生要求的部分相应标有“○”、“△”记号(依据最新考试大纲)。

在本书编写的过程中,文都考研信息中心的全体同志做了大量有益的工作,在此一并表示感谢。

书中错误和疏漏之处,请广大读者、数学同仁指正。

编者

2009年12月

D. 典型例题解析	(63)
第五讲 空间解析几何与向量代数	
A. 重点知识结构图	(93)
B. 基本内容	(93)
C. 重点	(96)
D. 典型例题解析	(96)
第六讲 多元函数微分学	(100)
A. 重点知识结构图	(100)

文都图书邮购目录

序号	书 名	开本	定价(元)	作者	出版时间	出版社
考研政治系列						
1	《考研政治早知道——核心知识精粹及典型真题》	32 开	10.00	李海洋 齐文等	2010/01	原子能
2	《报考知识全集及政治理论基干知识全集》	32 开	12.00	徐之明	2010/01	原子能
3	《考研政治历年真题精析》	16 开	18.80	李海洋 齐文等	2010/01	原子能
4	《政治理论近年真题心解》	16 开	15.00	徐之明	2010/01	原子能
5	《考研政治精选实用教程》(合订本)	16 开	40.00	李海洋 王向明等	2010/07	原子能
6	《政治理论梯度实战训练题全集》	16 开	48.00	徐之明	2010/07	原子能
7	《考研政治精选实用教程——马克思主义基本原理概论》	32 开	10.00	李海洋	2010/07	原子能
8	《考研政治精选实用教程——毛泽东思想和中国特色社会主义理论体系概论》	32 开	10.00	王向明	2010/07	原子能
9	《考研政治精选实用教程——中国近现代史纲要》	32 开	10.00	汪云生	2010/07	原子能
10	《考研政治精选实用教程——思想道德修养与法律基础》	32 开	10.00	蒋中挺	2010/07	原子能
11	《全国硕士研究生入学统一考试政治理论考试大纲导读》	32 开	12.00	文都考研命题研究中心	2010/07	原子能
12	《考研政治大纲解析配套习题同步训练 1600 题》	16 开	32.00	李海洋 齐文等	2010/08	原子能
13	《考研政治多选题解题技巧与高分实战演练》	16 开	28.00	李海洋 齐文等	2010/08	原子能
14	《考研政治单元突破与习题精耕精练》	16 开	30.00	李海洋 齐文等	2010/08	原子能
15	《政治理论名师典藏教案》	16 开	48.00	徐之明	2010/08	原子能
16	《形势与政策全集暨相关分析题预测》	32 开	13.80	徐之明	2010/10	原子能
17	《考研政治形势与政策理论热点剖析及命题预测》	32 开	12.00	齐文 王向明	2010/10	原子能
18	《考研政治大纲要点 5 天速记》	64 开	10.00	李海洋 齐文等	2010/10	原子能
19	《考研政治大串讲讲义》	32 开	20.00	李海洋 王向明等	2010/11	原子能
20	《考研政治考前必背重点 20 题》	32 开	10.00	文都考研命题研究中心	2010/11	内部
21	《考研政治考前必做三套题》	16 开	8.00	文都考研命题研究中心	2010/11	内部
22	《徐之明考研政治考前 20 天核心预测》	32 开	10.00	徐之明	2010/11	原子能
23	《政治理论终极预测 4 套卷》	16 开	10.00	徐之明	2010/11	原子能
24	《考研政治绝对考场最后五套题》	16 开	12.00	李海洋等	2010/11	原子能
考研英语系列:						
25	《考研英语词汇速记宝典》	16 开	32.00	徐绽	已出版	原子能
26	《考研英语题源阅读时文精选》	16 开	32.00	吴斐	2010/03	北京出版社
27	《考研英语历年真题精析:命题剖析及复习指导》	16 开	28.00	王舰	2010/03	原子能
28	《考研英语三层递进攻克阅读理解》	16 开	28.00	徐绽	2010/03	原子能
29	《考研英语历年真题来源报刊阅读 100 篇》	16 开	32.00	钟平	2010/03	原子能
30	《考研英语高分策略:阅读专项特训 88 篇》	16 开	32.00	徐绽	2010/03	原子能
31	《考研英语高分策略:写作专项特训 30 分》	16 开	22.00	徐绽	2010/03	原子能
32	《考研英语高分策略:翻译与句型结构专项特训》	16 开	16.00	李超	2010/03	北京出版社
33	《考研英语高分策略:长难句与语法突破专项特训》	32 开	18.00	程呈	2010/03	原子能

序号	书 名	开本	定价(元)	作者	出版时间	出版社
34	《考研英语高分策略:完形填空与新题型专项特训》	16开	18.00	赵文通	2010/03	原子能
35	《考研英语写作秘笈》	32开	12.00	王舰	2010/03	原子能
36	《考研英语词汇说文解字——字根+联想+文化》	16开	30.00	陈文	2010/03	北京出版社
37	《全国硕士研究生入学统一考试英语考试大纲导读》	32开	18.00	文都考研命题研究中心	2010/08	原子能
38	《考研英语绝对考场最后五套题》	8开	12.00	徐绽	2010/09	原子能
39	《考研英语考前必做三套题》	16开	10.00	文都考研命题研究中心	2010/10	内部
考研数学系列						
40	《考研数学高等数学过关与提高》(上)	32开	16.00	黄先开 曹显兵	已出版	原子能
41	《考研数学高等数学过关与提高》(下)	32开	13.00	黄先开 曹显兵	已出版	原子能
42	《考研数学微积分过关与提高》	32开	19.00	黄先开 曹显兵	已出版	原子能
43	《考研数学线性代数过关与提高》	32开	18.00	黄先开 曹显兵	已出版	原子能
44	《考研数学概率论与数理统计过关与提高》	32开	18.00	曹显兵 黄先开	已出版	原子能
45	《考研数学必备手册》	64开	5.00	蔡子华	已出版	新华出版社
46	《考研数学必做客观题 1500 题精析》	16开	35.00	蔡子华	已出版	原子能
47—48	《考研数学复习大全》(经济类/理工类)	16开	45.00 56.00	蔡子华	已出版	原子能
49	《考研数学接力题典 1800:通关、高分、夺冠必备》	16开	40.00	汤家凤	已出版	原子能
50	《考研数学必做主观题 500 题精析》	16开	30.00	蔡子华	已出版	原子能
51	《全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导讲义》	16开	20.00	蔡子华	已出版	原子能
52	《全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义》	16开	14.00	汤家凤	2010/02	北京教育出版社
53—55	《考研数学历年真题精析》(数学一至数学三)	16开	22.00 20.00 20.00	蔡子华	2010/02	原子能
56	《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲导读》	32开	12.00	文都考研命题研究中心	2010/08	原子能
57—59	《考研数学全真模拟试卷及精析》(数学一至数学三)	16开	16.00/册	蔡子华	2010/09	原子能
60—62	《考研数学考前必做三套题》(数学一至数学三)	16开	8.00/册	汤家凤	2010/10	内部
考研计算机系列						
63	《计算机专业基础综合要点速记手册》	64开	10.00	崔巍 冯利	2010/03	原子能
64	《计算机学科专业基础综合辅导讲义》	16开	50.00	崔巍 卫真 白龙飞等	2010/03	原子能
65	《计算机学科专业基础综合辅导讲义同步练习》	16开	35.00	崔巍 卫真 白龙飞等	2010/03	原子能
66	《计算机学科专业基础综合考试全真模拟试题集》	16开	15.00	崔巍 冯利	2010/09	原子能
考研西医系列						
67	《考研西医综合辅导讲义》	16开	78.00	贺银成	2010/03	原子能
68	《考研西医综合辅导讲义同步练习》	16开	40.00	贺银成	2010/04	原子能
69	《考研西医综合历年真题精析》	16开	38.00	贺银成	2010/04	原子能
70	《考研西医综合全真模拟试卷及精析》	16开	18.00	贺银成	2010/07	原子能

序号	书 名	开本	定价 (元)	作者	出版 时间	出版社
考研专业课系列						
71	《考研专业课教育学基础综合辅导讲义》	16 开	48.00	文都考研命题研究中心	2010/08	原子能
72	《考研专业课教育学基础实战练习题》	16 开	35.00	文都考研命题研究中心	2010/08	原子能
73	《考研专业课历史学基础综合辅导讲义》	16 开	48.00	文都考研命题研究中心	2010/08	原子能
74	《考研专业课历史学基础实战练习题》	16 开	35.00	文都考研命题研究中心	2010/08	原子能
75	《考研专业课心理学基础综合辅导讲义》	16 开	48.00	文都考研命题研究中心	2010/08	原子能
76	《考研专业课心理学基础实战练习题》	16 开	35.00	文都考研命题研究中心	2010/08	原子能
77	《考研专业课中医综合基础综合辅导讲义》	16 开	48.00	文都考研命题研究中心	2010/08	原子能
78	《考研专业课中医综合基础实战练习题》	16 开	35.00	文都考研命题研究中心	2010/08	原子能
大学英语四六级系列						
79	《大学英语四级词汇背单词练听力》(赠 Mp3)	32 开	26.00	张雅军 宫雍	2010/01	原子能
80	《大学英语四级词汇分层妙记》(赠 Mp3)	32 开	20.00	黄磊 何威威 徐可风	2010/01	原子能
81	《大学英语四六级考试词汇高分突破》	32(异)	25.00	黄磊 王丽 何威威	已出版	原子能
82	《大学英语四级考试三层突破——写作·完形·翻译》	16 开	18.00	黄磊 何凯文 赵文通	2010/01	原子能
83	《大学英语四级考试强化集训——听力理解》(赠 Mp3)	32 开	13.00	赵文通 宫雍	2010/01	原子能
84	《大学英语四级考试强化集训——阅读理解》	32 开	14.00	赵文通 何威威 徐可风	2010/01	原子能
85	《大学英语四级考试强化集训——完形·翻译》	32 开	9.00	赵文通 徐可风 何凯文	2010/01	原子能
86	《大学英语四级考试历年真题精析(精华版)》(赠 Mp3)	16 开	19.80	文都大学英语四六级命题研究中心	已出版	原子能
87	《大学英语六级考试历年真题精析(精华版)》(赠 Mp3)	16 开	25.00	张静 刘玉楼	已出版	原子能
88	《大学英语四级考试历年真题详解(精讲版)》(赠 Mp3)	16 开	29.80	张雅军 何威威 宫雍	已出版	原子能
89	《大学英语四级考试真题与预测 5+5》(赠 Mp3)	16 开	19.80	文都大学英语四六级命题研究中心	已出版	原子能
90	《大学英语四级考试全真预测卷》(赠 Mp3)	16 开	19.80	文都大学英语四六级命题研究中心	已出版	原子能
91	《大学英语四级考试一本通关——命题剖析与应试指导》(赠 Mp3)	16 开	19.00	李超等	2010/01	原子能
92	《大学英语四六级考试写作全解读》	32 开	12.00	黄磊 赵文通 徐可风	2010/01	原子能
医师资格考试系列						
93	《国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上、下)》	16 开	138.00 (全册)	顾艳南	2010/02	原子能
94	《国家临床执业医师资格考试辅导讲义目标练习》	16 开	35.00	顾艳南	2010/02	原子能
95	《国家临床执业医师资格考试历年真题精析》	16 开	35.00	顾艳南	2010/02	原子能
96	《国家临床执业医师资格考试全真模拟题集》	16 开	20.00	顾艳南	2010/06	原子能
97	《国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义》	16 开	108.00	顾艳南	2010/02	原子能
98	《国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义目标练习》	16 开	30.00	顾艳南	2010/02	原子能
99	《国家临床执业助理医师资格考试历年真题精析》	16 开	25.00	顾艳南	2010/02	原子能
100	《国家临床执业助理医师资格考试全真模拟题集》	16 开	16.00	顾艳南	2010/06	原子能

序号	书 名	开本	定价 (元)	作者	出版 时间	出版社
公务员考试系列						
101	《国家公务员考试专用教材·行政职业能力测验》	16 开	50.00	沈世昉	2010/03	北京出版社
102	《国家公务员考试专用教材·行政职业能力测验 历年真题精解》	16 开	48.00	沈世昉	2010/03	北京出版社
103	《国家公务员考试专用教材·申论》	16 开	45.00	李易成	2010/03	北京出版社
104	《国家公务员考试专用教材·申论历年真题精解》	16 开	42.00	李易成	2010/03	北京出版社
105	《国家公务员考试专用教材·公考常识资源库》	16 开	58.00	陈易明	2010/03	北京出版社
106	《国家公务员考试专用教材·时政热点深度分析 及命题趋势预测》	32 开	12.00	李易成	2010/10	北京出版社
107	《国家公务员考试专用教材·面试》	16 开	38.00	沈世昉	2010/03	北京出版社
108	《国家公务员考试专用教材·面试真题详解》	16 开	38.00	沈世昉	2010/03	北京出版社
109	《国家公务员考试专用教材·行政职业能力测验 标准预测试卷》	16 开	20.00	陈易明	2010/10	北京出版社
110	《国家公务员考试专用教材·申论标准预测试卷》	16 开	12.00	李易成	2010/10	北京出版社
111	《公务员考试模块突破教材·言语理解与表达》	16 开	42.00	陈易明	2010/03	北京出版社
112	《公务员考试模块突破教材·数量关系》	16 开	42.00	陈易明	2010/03	北京出版社
113	《公务员考试模块突破教材·判断推理》	16 开	42.00	陈易明	2010/03	北京出版社
114	《公务员考试模块突破教材·资料分析》	16 开	42.00	陈易明	2010/03	北京出版社
115	《公务员考试模块突破教材·行政职业能力测验 高分秘诀》	16 开	38.00	陈易明	2010/03	北京出版社
116	《公务员考试模块突破教材·申论高分秘诀》	16 开	38.00	李易成	2010/03	北京出版社
117	《全国各省市公务员考试行政职业能力测验历年 真题精解大全》	16 开	50.00	马宏涛	2010/07	北京出版社
118	《全国各省市公务员考试申论历年真题精解大 全》	16 开	50.00	李易成	2010/07	北京出版社
119	《地方公务员考试专用教材·北京市公务员考试 一本通》	16 开	50.00	李易成 陈易明	2010/07	北京出版社
120	《地方公务员考试专用教材·上海市公务员考试 一本通》	16 开	50.00	李易成 陈易明	2010/07	北京出版社
121	《地方公务员考试专用教材·广东省公务员考试 一本通》	16 开	50.00	李易成 陈易明	2010/07	北京出版社
122	《地方公务员考试专用教材·山东省公务员考试 一本通》	16 开	50.00	李易成 陈易明	2010/07	北京出版社
123	《地方公务员考试专用教材·浙江省公务员考试 一本通》	16 开	50.00	李易成 陈易明	2010/07	北京出版社

网址: www.51testbook.com <http://book.wendu.com>

文都学友之家: <http://xueyou.wendu.com>

电话: 010—88820463 88820465 88820418

传真: 010—88820136 转 830

地址: 北京市海淀区西三环北路 72 号世纪经贸大厦 B 座 20 层

邮编: 100048

读者意见调查表

亲爱的读者:

您好!非常感谢您对文都图书的信赖与支持。从一九九六年至今,文都的研究生考试和大学英语四、六级考试命题研究愈加深入到位,精品图书一版再版、层出不穷。文都图书已拥有一大批优异的一线名师作者资源,汇集当前国内各个学科领域顶尖专家学者,紧密围绕教学考试要求,每年出版百余种各类教学考试辅导丛书,内容实用权威,体例完美,发展至今每一本都堪称文都精品。

为了充分了解广大学子对数学图书的需求,向读者提供更高贴切度、更高质量的图书,文都图书事业编辑部特别推出了此次有奖调查活动,希望您抽出宝贵的几分钟时间填写以下调查表。每一位热心参与的朋友,我们都将有精美礼品随之奉上!

来信请寄:

北京市海淀区西三环北路72号世纪经贸大厦B座20层

文都图书事业编辑部数学组收

邮编:100048

《全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导讲义》

读者信息:

姓名_____年龄_____职业_____教育背景_____

通讯地址_____邮编_____

联系电话_____E-mail_____

1. 请问您本科所学专业是_____,拟报考的研究生专业是_____,
需考数学_____。

2. 请问您认为自己的数学基础:

☐ 不好 ☐ 一般 ☐ 好

3. 您是如何得到本书的?

☐ 辅导班赠送 ☐ 在书店看到并购买 ☐ 通过网站了解并购买 ☐ 朋友推荐购买
☐ 老师推荐购买 ☐ 其他方式_____

4. 请问您认为本书在哪些方面对您有帮助(可多选):

☐ 重点知识结构图 ☐ 基本内容 ☐ 重点总结 ☐ 例题分类方式 ☐ 例题分析与讲解
☐ 其他_____

5. 您认为本书的优点为(可多选):

☐ 版式设计合理 ☐ 印刷精美 ☐ 封面设计漂亮 ☐ 内容全面,与大纲相合
☐ 题目精当 ☐ 难度适中 ☐ 问题分析详细深入 ☐ 其他_____

6. 您认为本书在哪些方面还有待改进(可多选):

☐ 版式设计 ☐ 印刷质量 ☐ 封面设计 ☐ 内容讲解及例题设置

☐ 题目数量 ☐ 题型分类方式 ☐ 题目解析 ☐ 其他_____

7. 您在学习数学过程中最需要哪些方面的帮助(可多选):

☐ 概念的理解 ☐ 定理的掌握 ☐ 方法的应用 ☐ 题型的归纳
☐ 做题技巧的总结 ☐ 读书方法的指导 ☐ 其他_____

8. 请问您还需要哪些方面的考研数学辅导资料(可多选):

☐ 考研综合题集 ☐ 考研分层题集 ☐ 考研题型专题讲解 ☐ 历年真题
☐ 模拟试题 ☐ 其他_____

9. 请问您在购买考研数学辅导图书、资料时,主要考虑的因素有(可多选):

☐ 出版社影响力 ☐ 作者名气 ☐ 印刷质量 ☐ 定价 ☐ 内容质量
☐ 网络评论 ☐ 同学、朋友推荐 ☐ 辅导班老师推荐 ☐ 封面的文字介绍
☐ 前言、目录的吸引力 ☐ 其他_____

10. 请问您一般通过哪些渠道购买考研数学辅导图书、资料(可多选):

☐ 新华书店 ☐ 大学书店 ☐ 网上书店 ☐ 考研辅导班 ☐ 其他渠道_____

11. 您读完本书后,会为本书写一篇评论吗?<http://www.51testbook.com>

☐ 会,因为_____ ☐ 不会,因为_____

12. 请问您会将本书推荐给:

☐ 5人以上 ☐ 4—5人 ☐ 2—3人 ☐ 1人 ☐ 0人

13. 您所知道的类似的图书有:

14. 您对文都图书的其他意见和建议(可另附页)

如果您对本书有更多建议,请发邮件到 wendubook@163.com

文都网址: www.wendu.com

文都网上书城: www.51testbook.com

文都图书编辑部博客: <http://wendutushu.blog.sohu.com>

发行部 QQ: 791615263

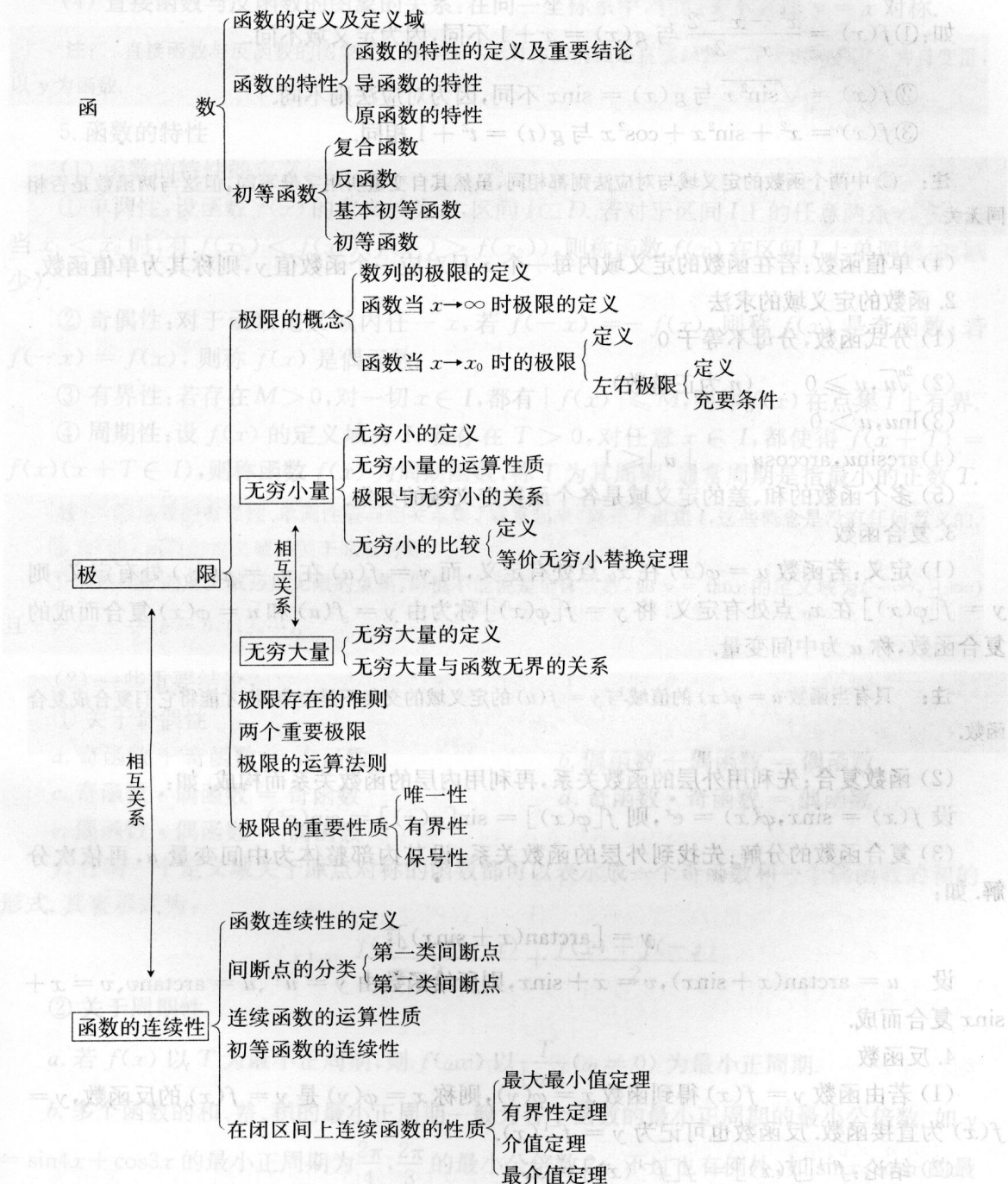
非常感谢您的热心参与!

(001)	容内本基	B
(101)	第一讲 函数 极限 连续性	C
(102)	神神网网坚典	D
第一讲 函数 极限 连续性	公用重	(1)
A. 重点知识结构图	图并论对点重	(1)
B. 基本内容	容内本基	(2)
C. 重点	点重	(9)
D. 典型例题解析	神神网网坚典	(9)
第二讲 导数与微分	公用重	(24)
A. 重点知识结构图	图并论对点重	(24)
B. 基本内容	容内本基	(24)
C. 重点	点重	(27)
D. 典型例题解析	神神网网坚典	(27)
第三讲 中值定理与导数的应用	公用重	(35)
A. 重点知识结构图	图并论对点重	(35)
B. 基本内容	容内本基	(35)
C. 重点	点重	(38)
D. 典型例题解析	神神网网坚典	(38)
第四讲 一元函数积分学	公用重	(56)
A. 重点知识结构图	图并论对点重	(56)
B. 基本内容	容内本基	(56)
C. 重点	点重	(63)
D. 典型例题解析	神神网网坚典	(63)
第五讲 空间解析几何与向量代数 *	公用重	(93)
A. 重点知识结构图	图并论对点重	(93)
B. 基本内容	容内本基	(93)
C. 重点	点重	(96)
D. 典型例题解析	神神网网坚典	(96)
第六讲 多元函数微分学	公用重	(100)
A. 重点知识结构图	图并论对点重	(100)

B. 基本内容	(100)
C. 重点	(105)
D. 典型例题解析	(105)
第七讲 重积分	(115)
(1) A. 重点知识结构图	(115)
(2) B. 基本内容	(115)
(3) C. 重点	(120)
(4) D. 典型例题解析	(120)
第八讲 曲线积分与曲面积分*	(133)
(5) A. 重点知识结构图	(133)
(6) B. 基本内容	(133)
(7) C. 重点	(137)
(8) D. 典型例题解析	(137)
第九讲 级数* Δ	(152)
(9) A. 重点知识结构图	(152)
(10) B. 基本内容	(152)
(11) C. 重点	(158)
(12) D. 典型例题解析	(158)
第十讲 微分方程与差分方程	(175)
(13) A. 重点知识结构图	(175)
(14) B. 基本内容	(175)
(15) C. 重点	(179)
(16) D. 典型例题解析	(179)
第十一讲 微积分的经济应用 Δ *	(191)
(17) A. 重点知识结构图	(191)
(18) B. 基本内容	(191)
(19) C. 重点	(193)
(20) D. 典型例题解析	(193)
(001)	
(001)	

第一讲 函数 极限 连续性

A. 重点知识结构图



B. 基本内容

一、函数

1. 函数的定义及定义域

(1) 函数的定义及定义域的定义.

(2) 函数定义的两要素: 定义域和对应法则.

(3) 两个函数相同的条件: 定义域和对应法则都相同的两个函数是相同的函数.

如: ① $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ 与 $g(x) = x + 1$ 不同, 因为定义域不同.

② $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$ 与 $g(x) = \sin x$ 不同, 因为对应法则不同.

③ $f(x) = x^2 + \sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $g(t) = t^2 + 1$ 相同.

注: ③ 中两个函数的定义域与对应法则都相同, 虽然其自变量所用字母不同, 但这与两函数是否相同无关.

(4) 单值函数: 若在函数的定义域内每一个 x 只对应一个函数值 y , 则称其为单值函数.

2. 函数的定义域的求法

(1) 分式函数, 分母不等于 0

(2) $\sqrt[n]{u}, u \geq 0$ (n 为正整数)

(3) $\ln u, u > 0$

(4) $\arcsin u, \arccos u, |u| \leq 1$

(5) 多个函数的和、差的定义域是各个函数定义域的交集.

3. 复合函数

(1) 定义: 若函数 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 点处有定义, 而 $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处有定义, 则 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点处有定义. 将 $y = f[\varphi(x)]$ 称为由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 称 u 为中间变量.

注: 只有当函数 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域的交集不是空集时, 才能将它们复合成复合函数.

(2) 函数复合: 先利用外层的函数关系, 再利用内层的函数关系而构成. 如:

设 $f(x) = \sin x, \varphi(x) = e^x$, 则 $f[\varphi(x)] = \sin[\varphi(x)] = \sin(e^x)$

(3) 复合函数的分解: 先找到外层的函数关系, 设其内部整体为中间变量 u , 再依次分解. 如:

$$y = [\arctan(x + \sin x)]^{\frac{1}{2}}$$

设 $u = \arctan(x + \sin x), v = x + \sin x$, 则所给函数由 $y = u^{\frac{1}{2}}, u = \arctan v, v = x + \sin x$ 复合而成.

4. 反函数

(1) 若由函数 $y = f(x)$ 得到函数 $x = \varphi(y)$, 则称 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, $y = f(x)$ 为直接函数. 反函数也可记为 $y = f^{-1}(x)$.

(2) 结论: $f^{-1}[f(x)] = f[f^{-1}(x)] = x$.

(3) 单值函数存在反函数的充分条件: 若 $f(x)$ 在区间 I 内单调 $\Rightarrow f(x)$ 在区间 I 内一定存在单值反函数.

注: 反过来不成立. 即 $f(x)$ 在区间 I 内存在单值反函数但 $f(x)$ 在区间 I 内不一定单调.

如函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0 \\ 1+x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ 在区间 $(-1, 1]$ 内存在单值反函数, 但它在 $(-1, 1]$ 上不单调.

(4) 直接函数与反函数的图象的关系: 在同一坐标系中, 它们关于直线 $y = x$ 对称.

注: 直接函数与反函数的图象关于直线 $y = x$ 对称的前提是直接函数及其反函数都以 x 为自变量, 以 y 为函数.

5. 函数的特性

(1) 函数的特性的定义:

① 单调性: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 若对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(减少).

② 奇偶性: 对于函数定义域内任一 x , 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是奇函数; 若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是偶函数.

③ 有界性: 若存在 $M > 0$, 对一切 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在点集 I 上有界.

④ 周期性: 设 $f(x)$ 的定义域为 I , 若存在 $T > 0$, 对任意 $x \in I$, 都使得 $f(x+T) = f(x)$ ($x+T \in I$), 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, 称 T 为其周期. 通常周期是指最小的正数 T .

注: ① 函数的有界性、单调性应与相关点集 I 联系起来, 离开了点集 I , 这些概念是没有任何意义的.

② 奇(偶)函数的定义域必关于原点对称.

③ 周期函数的定义域必是无限的点集, 但也不能说是全体实数, 如 $y = \tan x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 且 $x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

(2) 一些重要结论:

① 关于奇偶性

a. 奇函数 + 奇函数 = 奇函数

b. 偶函数 + 偶函数 = 偶函数

c. 奇函数 · 偶函数 = 奇函数

d. 奇函数 · 奇函数 = 偶函数

e. 偶函数 · 偶函数 = 偶函数

f. 任何一个定义域关于原点对称的函数都可以表示成一个奇函数和一个偶函数的和的形式. 其表示式为:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

② 关于周期性

a. 若 $f(x)$ 以 T 为最小正周期, 则 $f(\omega x)$ 以 $\frac{T}{|\omega|}$ ($\omega \neq 0$) 为最小正周期.

b. 多个函数的和、差、积的最小正周期一般为各个函数的最小正周期的最小公倍数. 如 $y = \sin 4x + \cos 3x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$ 的最小公倍数 2π . 不过也有例外, 如 $\sin x, \cos x$ 的最

小正周期均为 2π , 但 $y = \sin x \cos x$ 的最小正周期为 π .

(3) 导函数的特性: 若函数 $f(x)$ 可导, 则

① 奇(偶)函数的导函数是偶(奇)函数.

② 周期函数的导函数是和原来函数有相同周期的周期函数.

(4) 原函数的特性: 若函数 $f(x)$ 存在原函数, 则

① 奇函数的原函数是偶函数.

② 偶函数的原函数中只有一个是奇函数.

注: 周期函数的原函数不一定是周期函数, 如 $f(x) = 1 + \cos x$ 是以 2π 为周期的函数, 但其原函数之一 $F(x) = x + \sin x$ 就不是周期函数.

6. 初等函数

(1) 基本初等函数: 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数这五类函数统称为基本初等函数.

(2) 初等函数: 由常数和五类基本初等函数进行有限次的四则运算和复合构成的可用一个式子表示的函数称为初等函数.

注: ① 初等函数不要求四则运算和复合每一种都有, 只要有其中的一种或几种就可以, 但一定只能是有限次的.

② 初等函数必须能用一个式子表示, 不能用一个式子表示的函数不能称为初等函数, 故分段函数一般不能叫初等函数.

二、极限

1. 极限的概念

(1) 数列的极限的定义

① 定义: $\forall \epsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 使 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

都成立, 则称当 n 趋于 ∞ 时, 数列 $\{x_n\}$ 以常数 a 为极限 (亦称 $\{x_n\}$ 收敛于 a), 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 否则称 $\{x_n\}$ 发散.

② 理解极限的定义应注意的问题

a. 其定义的精髓是某一个时刻开始数列的一般项与常数 a 之差的绝对值小于任意小的正数 ϵ , 其意为 x_n 与 a 之间的距离要任意小, 即 x_n 要无限趋近于 a , 而不是越来越接近于 a .

b. 数列的极限与其子数列的极限的关系:

$x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ 的充分必要条件是任任一子数列以 a 为极限.

(2) 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限

① 定义: $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, 对应的函数值都满足

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 以常数 A 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

② 理解极限的定义应注意的问题:

a. 定义的精髓同数列的极限.

b. $x \rightarrow +\infty (x \rightarrow -\infty)$ 时 $f(x)$ 的极限的定义只需将以上定义中的 $|x| > X$ 改为 $x >$

X (或 $x < -X$) 即可.

(3) 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数极限的定义

① 定义: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

② 理解定义应注意的问题

a. 定义的精髓与数列极限的定义相同.

b. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \epsilon$, 说明不要求在 x_0 点此不等式成立, 即意味着 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义及即使有定义函数值等于什么无关.

③ $x \rightarrow x_0$ 时函数的左、右极限

a. 定义: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ ($0 < x_0 - x < \delta$) 时 $|f(x) - A| < \epsilon$,

则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的右(左)极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$).

b. $x \rightarrow x_0$ 时函数极限存在的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

2. 无穷小量

(1) 定义: 以 0 为极限的变量叫无穷小量.

(2) 无穷小的运算性质

① 有限个无穷小的和为无穷小.

② 有限个无穷小的乘积为无穷小.

③ 有界函数与无穷小的乘积为无穷小.

注: 无穷个无穷小的和或积不一定是无穷小.

如: 设 $x_n^{(1)} = \frac{1}{n}$

当 $n = 1, 2, \dots$ 时

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{当 } n = 1, 2, \dots, k-1 \text{ 时} \\ k^{k-1} & \text{当 } n = k \text{ 时} \\ \frac{1}{n} & \text{当 } n = k+1, k+2, \dots \text{ 时} \end{cases}$$

当 $n = 1, 2, \dots, k-1$ 时

当 $n = k$ 时

当 $n = k+1, k+2, \dots$ 时

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) 都是无穷小量, 但 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(1)} \cdot x_n^{(2)} \cdots x_n^{(k)} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(1)} \cdot x_n^{(2)} \cdots x_n^{(k)}) = 1$, 它不是无穷小量.

(3) 极限与无穷小量的关系

$f(x) \rightarrow A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$. 其中 α 是在与 $f(x) \rightarrow A$ 时自变量的同一变化趋势下的无穷小量.

(4) 无穷小的比较

① 定义: 若 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$ 且 $\beta \neq 0$, 则

当 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ 时, 称 α 较 β 高阶, 记为 $\alpha = o(\beta)$.