毛纲源考研数学辅导系列

本书在手 考研无忧

考研数学(一)

客观题简化求解技巧分类归纳

(概率论与数理统计)

毛纲源 编著

$X_1 \backslash X_2$	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	p_{11}	0	1/4
0	p_{21}	p_{22}	1/2
1	p_{31}	0	1/4
$p_{\cdot j}$	1/2	1/2	1

◇经典题型 紧扣大纲
帮你高效复习
◇方法新颖 技巧独特
助君考研成功

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

毛纲源考研数学辅导系列

考研数学(一)
客观题简化求解技巧分类归纳
(概率论与数理统计)

毛纲源　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容简介

本书以历年考研数学真题中的客观题(选择题和填空题)为例,归纳、总结这类题型的简化求解方法与技巧.这些方法与技巧不仅有助于快速、准确地求解客观题,而且对证明题和计算题的求解也能发挥重要的作用.读者阅读本书,必定会提高复习效率和应试能力.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学(一)客观题简化求解技巧分类归纳(概率论与数理统计)/毛纲源 编著.
—武汉:华中科技大学出版社,2010年6月
ISBN 978-7-5609-6136-1

Ⅰ.考… Ⅱ.毛… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-解题 ②概率论-研究生-入学考试-解题 ③数理统计-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第064827号

考研数学(一)客观题简化求解技巧分类归纳
(概率论与数理统计)

毛纲源 编著

策划编辑:王汉江(14458270@qq.com)
责任编辑:王汉江　　封面设计:潘 群
责任校对:祝 非　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm 1/16　印张:11　字数:230 000
版次:2010年6月第1版　印次:2010年6月第1次印刷　定价:22.80元
ISBN 978-7-5609-6136-1/O·528

前　　言

考研数学试题中的客观题(填空题和选择题)是考研数学试题的重要组成部分.它侧重考查考生对数学概念、数学定理(命题)的理解和掌握程度,并测试考生能否通过这些基本数学概念、数学定理(命题)进行简单推理.由于客观题的试题数量在试卷中所占比例较大(接近试题总题量的三分之二),且其总分超过整个试卷总分的三分之一,如何快速、准确地做好客观题,是考生为取得好成绩渴望得到解决的问题,这也是本书出版的目的.

本书为考研数学(一)中的概率论与数理统计部分.按照考纲的知识块进行分类,分为若干个章节.每一章节(考纲知识块)又分为若干个小节(考点),结合历年来考研数学(一)中的客观题(这些客观题已全部在本书使用)及各个名校的有关试题对所考核的知识点(考点)进行分类归纳与总结.为使简化求解方法与技巧和常规套路的求解方法进行比较,不少例题给出多种求解方法,其中"解一"一般为简化求解方法.为使考生掌握和应用这些简化求解方法,作者根据不同的知识点(考点)将其求解方法与技巧归纳整理成相应命题,便于考生应用,其中不少命题是编者教学经验的总结.这些命题可在理解的基础上当做重要结论来记忆和应用.这些命题的证明,不少渗透在相关题的解法上(常为"解二").它们是必须掌握的核心知识点.

这些分类简化求解方法与技巧不仅有助于快速、准确地求解客观题,而且对证明题及计算题的求解也能发挥重要作用.

为了把每个知识块复习好,本书以知识点(考点)为线索将同一知识点(考点)的填空题、选择题结合在一起进行讲解.这样做的目的是使读者熟练掌握有关客观题简化求解方法与技巧,从而帮助考生快速、准确地求解客观题.读者使用本书时,最好能自己先想再做,不要急于看解答,然后与书中求解方法与技巧比较."注意"中的一些题外话也值得读者细心揣摩.

近年来考生的失误并不是因为缺乏灵活的思维、敏锐的感觉,而恰恰是因为对考试大纲中规定的基础知识、基本理论的掌握还存在某些缺陷,甚至有所偏废所致.希望考生按考纲系统、全面、踏实地复习.

真诚希望本书能陪伴读者度过难忘的备考阶段,能够迅速提高应试能力,取得优异的考研成绩,圆考研成功梦,圆考研考入名校梦.这是作者最大的心愿.

本书也可供大专院校在校学生学习概率论与数理统计时,阶段复习和期末复习使用.

编写本书时参阅了有关书籍,引用了一些例子,在此特向有关作者致谢.

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者指正.

编　者

北京师范大学珠海分校商学部

2010 年 4 月

题 型 说 明

——客观题常用的解题方法与技巧

硕士研究生入学统一考试数学试题的题型有填空题、选择题和解答题(包括计算题、应用题和证明题)三种，其中填空题和选择题由于答案唯一，评分不受主观因素影响，能较客观地反映考生水平，常称为客观题.

硕士研究生入学考试数学试题中的客观题(填空题、选择题)在研究生入学考试中占 60 分左右，约占总分的 40%. 从目前情况看，考生在客观题部分得分率较低，正是因为这部分得分率较低，总分就很难上去. 其原因主要是两方面：一方面是考生做计算题时准确率低，基本概念和基本理论没有吃透，或计算能力较差；另一方面是考生对求解客观题的方法与技巧掌握得不熟练，不能运用自如.

填空题绝大部分是计算题，但这里的计算题不像一般的计算题，它只看结果不看过程. 因而做填空题时必须非常小心，因为一旦答案出错就是零分. 若计算的准确率不高，填空题容易失分. 填空题也有不少是概念题，主要考查考生对一些最基本的概念、性质、公式掌握和运用的熟练程度及快捷、准确的运算能力以及正确的判断能力和推理能力. 为此，做填空题时要根据题目的特点充分利用各种方法和技巧简化计算. 首先，要充分利用本书所归纳总结出的有关命题的结论迅速、准确地写出答案；如果没有可直接利用的结论，那只好从题设条件出发通过分析、推理和计算推导出有关结果.

单项选择题(即四个选项中有且仅有一个选项是正确的，以下简称选择题)是研究生入学考试数学试卷的重要组成部分. 选择题大部分考查基本概念和基本理论. 如果基本概念和基本理论没有吃透，选择题部分也很容易失分. 另一方面，同一道题出成客观题后往往有更巧妙、更简单的方法求解. 当然，客观题用我们平时求解主观题的方法虽然也能求解，但在解题时间上有时相差几倍甚至几十倍. 因此要提高客观题部分的得分率，一要提高做计算题的准确率，吃透基本概念和基本理论；二要掌握简化求解客观题的方法和技巧.

如何快速、准确地做好选择题，为后面的计算题、应用题和证明题留下较充裕的时间，这是考生能否取得高分的关键. 为此，首先要理解和熟悉本书各章节所介绍的命题的结论，然后充分利用这些结论判断四个选项中哪一个成立. 如果没有现成的结论可用，则可采用下述各法确定选项.

法一 直选法.

即利用命题、定理、定义等直接判断或验证某选项正确，则其余选项必不正确(不必验证).

法二 排错法.

即验证其中三个选项不正确，则剩下的一个选项必正确(也不必验证). 常用赋值法找出错误选项. 这里的赋值法是指利用满足题设条件的"特殊值"通过推理或验证找出错误选项.

对于题干中"有……必有……"或"当……时，必有……"或"对任意……必有……"或题干中所给函数为抽象函数，常用赋值法找出反例，排除错误选项，得出正确选项.

例 1 对于任意两事件 A 和 B，若 $P(AB)=0$，则(　　).

(A) $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$　　(B) $\overline{A}\,\overline{B}\neq\varnothing$　　(C) $P(A)P(B)=0$　(D) $P(A-B)=P(A)$

解 上例具有赋值法的明显特征"对任意……，必有……"，可采用反例排除. 设连续型随机变量 X 服从标准正态分布，即 $X\sim N(0,1)$，取事件 $A=\{X>0\}$，$B=\{X<0\}$，则 $AB=\varnothing$，因而 $P(AB)=0$. 但 $\overline{A}\,\overline{B}=\{X=0\}\neq\varnothing$，排除选项(A). 又因 $P(A)=1/2$，$P(B)=1/2$，故 $P(A)\cdot P(B)=1/4$，排除(C).

若 A,B 互为对立事件，则 $\overline{A},\overline{B}$ 也互为对立事件，因而 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$，排除(B). 仅(D)入选.

法三 推演法.

推演法是指从题设条件出发，运用有关概念、定理或命题经推理演算得出正确选项.

对于与基本概念或其性质有关的选择题，或题中的备选项为“数值”形式的项，或题干条件给出的是某种运算形式的项时，常用推演法确定正确选项.

例 2 设 X 的分布律为 $P(X=n)=\frac{1}{2n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$，则 $D(X)=($ $)$.

(A) 0 (B) 1 (C) 1/2 (D) 不存在

解 备选项为数值形式的项，适合用推演法求解. 因

$$E(X^2)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{1}{2n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

故该级数发散.

同样，因 $E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，该级数发散，所以 $E(X^2)$，$E(X)$ 均不存在，从而 $D(X)$ 不存在. 仅(D)入选.

法四 图示法.

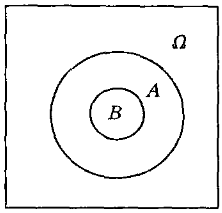
图示法是指根据题设条件作出有关问题的几何图形，然后借助几何图形的直观性得到正确选项或依四个选项的关系画出图形，看哪一种关系符合题设条件，从而确定正确选项.

对于有明显几何意义的题设条件如对称性、奇偶性、周期性、单调性、凹凸性、渐近性等，或题设给出图形面积、立体体积，或在概率论中给出两事件的关系或概率关系等均可试用图示法求解.

例 3 设 A,B 为两随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是( ).

(A) $P(A+B)=P(A)$ (B) $P(AB)=P(A)$ (C) $P(B|A)=P(B)$ (D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

解 画出文氏图，如右图所示，则从图中可看出，$A+B=A$，故 $P(A+B)=P(A)$. 仅(A)入选.



注意 已知事件之间的关系，求解其概率之类的问题常可用图示法求解.

法五 代入法.

代入法是指将备选项逐一代入题设条件或有关的公式，验证哪个选项正确.

该法适用于备选项为“数值”形式的项，且题干中含有验证条件，而验证比较简单.

例 4 已知随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，则二项分布的参数 n,p 的值为( ).

(A) $n=4,p=0.6$ (B) $n=6,p=0.4$ (C) $n=8,p=0.3$ (D) $n=24,p=0.1$

解 将所给已知条件代入相应公式，经简单计算即可确定正确选项.

设 $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$. 将已知数值代入即得 $np=2.4$，$np(1-p)=1.44$，解之得 $n=6$，$p=0.4$. 仅(B)入选.

当然在解选择题时，如果能用计算确定正确选项就不需一一验证或举反例排除其他选项. 一般需用计算才能确定正确选项的选择题，其计算量都不大，也不难. 当然，如果能用上述各法较简便地确定正确选项，也无须通过计算去验证.

目　录

第1章 随机事件和概率

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 用事件运算表示有关事件

用事件的运算关系表示有关事件，首先要注意下述词语所表示的事件运算关系.

(1)“至少”、“或”表示(积)事件的和(并)；

(2)“都”(“同时”)表示事件的积(交)；

(3)“而”、“和”、“又”、“但”、“均”表示事件的积(交)；

(4)“不”用对立事件表示；

(5)“至多”(“不多于”)一般用对立事件(“至少有”)表示，或用积事件的和(并)表示；

(6)“仅”、“恰”常表示一些事件发生与另一些事件不发生的积；

(7)“不都”(“不同时发生”)先用事件之积表示“都”(“同时”)，再取其对立(逆)事件；

(8)“都不”先用对立(逆)事件表示“不”，再用事件的积表示“都”.

例1 设 A 和 B 为任意两个事件，试用 A,B 表示下列各事件：

(1) $C_1=\{$事件 A 和 B 同时发生(都发生)$\}=$______；

(2) $C_2=\{$事件 A 和 B 同时不发生(都不发生)$\}=$______；

(3) $C_3=\{$事件 A 和 B 不同时发生(不都发生)$\}=$______.

解 (1) $C_1=AB$.

(2) 事件 A 和 B 不发生为 $\bar{A},\bar{B}$，同时不发生为 $C_2=\bar{A}\,\bar{B}$.

(3) 事件 A,B 都发生为 AB，不都发生为 $C_3=\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$.

例2 甲、乙、丙三人各向靶子射击一次，设事件 $A_i=\{$第 i 人击中靶子$\}$ $(i=1,2,3)$ 分别表示甲、乙、丙击中靶子，试用事件 A_i 表示下列事件：

(1) $B_1=\{$甲、乙至少一个击中，而丙未击中靶$\}=$______；

(2) $B_2=\{$靶上仅中两弹$\}=$______； (3) $B_5=\{$至少两人击中靶$\}=$______；

(4) $B_4=\{$至多两人击中靶$\}=$______；

(5) $B_5=\{$甲、乙未击中，而丙击中靶$\}=$______.

解 (1) $B_1=(A_1+A_2)\bar{A}_3$；

(2) $B_2=\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3$；

(3) $B_3=A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1$ 或 $B_3=\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1A_2A_3$；

(4) $B_4=\overline{A_1A_2A_3}$ 或 $B_4=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$；

(5) $B_5=\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

例3 在电炉上安装了4个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只

要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电.以 E 表示事件"电炉断电",而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则事件 E 等于(   ).

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　(B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$　　(C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　(D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解　注意到只要有 2 个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,事件 E 就发生.由于 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$,$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$表示 4 个温控器显示的温度都不低于 t_0;$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$表示至少有 3 个温控器显示的温度都不低于 t_0;$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$表示至少有 2 个温控器显示的温度不低于 t_0;$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$表示至少有一个温控器显示的温度不低于 t_0.仅(C)入选.

1.1.2 事件之间的运算

命题 1.1.1　对于任意事件 $A,B,C,A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

(1) 交换律　　$A+B=B+A$,　$AB=BA$;

(2) 结合律　$A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$,　$ABC=A(BC)=(AB)C$;

(3) 分配律　　$A(B+C)=AB+AC$,　$A(B-C)=AB-AC$,

$AB+C=(A+C)(B+C)$ (和对积的分配律);

(4) 对偶律(德·摩根律)　$\overline{A+B}=\bar{A}\,\bar{B}$,　$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$,一般有

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3\cdot\cdots\cdot\bar{A}_n,$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\cdots+\bar{A}_n.$$

除知道上面事件运算的性质外,还要注意事件运算与数的运算的不同之处.

命题 1.1.2　对任意两事件 A 和 B,如果 $AB=\bar{A}\,\bar{B}$,则 A,B 为对立事件.

命题 1.1.3　事件对立、相互独立及互不相容等关系,不具有"传递性",但事件的包含关系却具有传递性.

例 4　对于任意两事件 A 和 B,与 $A\cup B=B$ 不等价的是(   ).

(A) $A\subset B$　　(B) $\bar{B}\subset\bar{A}$　　(C) $A\bar{B}=\varnothing$　　(D) $\bar{A}B=\varnothing$

解　因 $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\bar{B}\subset\bar{A}\Leftrightarrow A\bar{B}=\varnothing$,故仅(D)入选.

例 5　假设 A,B,C 为随机事件,则下面结论正确的是(   ).

(A) 若 A 与 B 互不相容,B 与 C 互不相容,则 A 与 C 互不相容

(B) 若 A 与 B 独立,B 与 C 独立,则 A 与 C 独立

(C) 若 A 包含 B,B 包含 C,则 A 包含 C

(D) 若 A 与 B 对立,B 与 C 对立,则 A 与 C 对立

解　由命题 1.1.3 知,仅(C)入选.

例 6　对于任意两事件 A 和 B,如果 $AB=\bar{A}\,\bar{B}$,则(   ).

(A) $A=B$　　(B) $A\subset B$　　(C) A 与 B 对立　　(D) A 与 B 独立

解一　由命题 1.1.2 知,A 与 B 为对立事件.仅(C)入选.

解二　由 $AB=\bar{A}\,\bar{B}$ 得到 $AB\cdot B=\bar{A}\,\bar{B}B=\bar{A}\varnothing=\varnothing$,即

$$AB=\varnothing. \tag{①}$$

又由 $\bar{A}\,\bar{B}=AB$ 得到$\overline{\bar{A}\,\bar{B}}=\overline{AB}$,即 $A+B=\overline{AB}$.而 $AB=\varnothing$,故$\overline{AB}=\overline{\varnothing}=\Omega$,因而

$$A+B=\Omega. \tag{②}$$

由式①与式②知,A 和 B 为对立事件.仅(C)入选.

例 7　设 A,B,C 是三个随机事件,与事件 A 互斥的事件是(　　).

(A) $\bar{A}B+A\bar{C}$　　(B) $\overline{A(B+C)}$　　(C) $\overline{ABC}$　　(D) $\overline{A+B+C}$

解　因$\overline{A+B+C}A=\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}A=(\bar{A}A)\bar{B}\,\bar{C}=\varnothing\bar{B}\,\bar{C}=\varnothing$.仅(D)入选.

注意　凡题中出现对立事件即逆事件所满足的等式或不等式时,要想到充分利用德·摩根律求解有关问题.

例 8　若事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$,则(　　).

(A) A 和 B 不相容(互斥)　　(B) AB 是不可能事件

(C) AB 未必是不可能事件　　(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

解　由事件概率的性质一般推不出事件的有关性质,因而由 $P(AB)=0$ 不能推出 $AB=\varnothing$,排除(A)、(B).而(D)显然也不对.仅(C)入选.例如,若随机变量 X 服从区间$(0,2)$内的均匀分布,且事件 $A=\{X\leqslant 1\}$,$B=\{X\geqslant 1\}$,则 $AB=\{X=1\}$,$P(AB)=P(X=1)=0$.但 $AB=\{X=1\}$不是不可能事件,且 A,B 并不互斥,又 $P(A)=P(0<X\leqslant 1)=P(B)=1/2\neq 0$.

综上所述,选项(A)、(B)、(D)都只是 $P(AB)=0$ 的充分条件,而非必要条件.

例 9　设 A,B 是任意两个随机事件,则

$$P[(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})]=\underline{\qquad}.$$

解　逆用和对积的分配律,先化简得到

$$[(\bar{A}+B)(A+B)](\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})=(B+A\bar{A})(\bar{B}+\bar{A}A)=B\bar{B}=\varnothing,$$

$$P[(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})]=P(\varnothing)=0.$$

例 10　以 A 表示事件“甲种产品畅销,乙种产品滞销”,则其对立事件 $\bar{A}$ 为(　　).

(A)“甲种产品滞销,乙种产品畅销”　(B)“甲、乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”　　(D)“甲种产品滞销,或乙种产品畅销”

解　设 A_1 表示甲种产品畅销,A_2 表示乙种产品畅销,则 $A=A_1\bar{A}_2$,由德·摩根律知 $\bar{A}=\overline{A_1\bar{A}_2}=\bar{A}_1+\overline{\bar{A}_2}=\bar{A}_1+A_2$.仅(D)入选.

例 11　设 A,B,C 是三个随机事件,则事件“A,B,C 不多于一个发生”的逆事件是(　　).

(A) A,B,C 到少有一个发生　　(B) A,B,C 至少有两个发生

(C) A,B,C 都发生　　(D) A,B,C 不都发生

解一　由图 1.1.1 易知,事件 $D=\{$三事件不多于一个发生$\}$的逆事件即对立事件为 $\bar{D}=\{$三事件至少有两个发生$\}$,因而仅(B)入选.

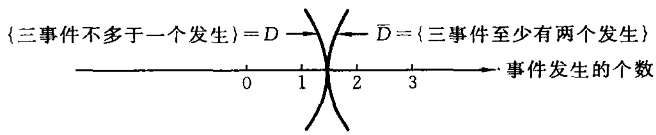


图 1.1.1

解二　事件 $D=\{$三事件不多于一个发生$\}$的逆事件为 $\bar{E}=\{$三事件至多有一个未发生$\}$,即

$\bar{E}=ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}=3ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}$

$=ABC+\bar{A}BC+ABC+A\bar{B}C+ABC+AB\bar{C}=(A+\bar{A})BC+(B+\bar{B})AC+(C+\bar{C})AB$

$=BC+AC+AB$. 仅(B)入选.

解三　由图 1.1.2 易知,D={三事件不多于一个发生}的等价事件为 E={三事件至少有两个未发生},即 $E=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$,则

$$\bar{D}=\bar{E}=\overline{\bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}}=(\overline{\bar{A}\bar{B}})(\overline{\bar{A}\bar{C}})(\overline{\bar{B}\bar{C}})=(A+B)(B+C)(C+A)$$
$$=(B+AC)(C+A)=BC+AC+AB+AC=AB+BC+CA.$$ 仅(B)入选.

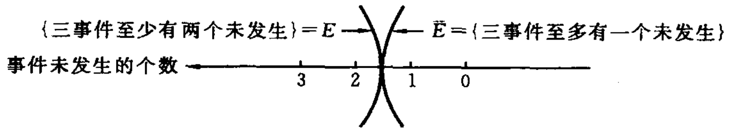


图 1.1.2

1.2　计算事件的概率

命题 1.2.1　必然事件 Ω 的概率等于 1,即 $P(\Omega)=1$;不可能事件的概率等于零,即$P(\varnothing)=0$;任意事件 A 的概率非负,且不超过 1,即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

命题 1.2.2(对立事件概率公式)　两对立事件的概率之和等于 1,即

$$P(A)+P(\bar{A})=1 \quad 或 \quad P(\bar{A})=1-P(A).$$

当求解 $P(\bar{A})$时,如 $P(A)$相对于 $P(\bar{A})$易求,可先求 $P(A)$,再利用上式求 $P(\bar{A})$.

命题 1.2.3　(1) 若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$;

(2) $P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A+B)$,$P(AB)\leqslant P(B)\leqslant P(A+B)$.

1.2.1　使用概率的加法公式、减法公式计算事件概率

命题 1.2.4(加法公式)　(1) 设 A,B,C 为任意事件,则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$
$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC).$$

(2)(有限可加性)　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容事件,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

求和(并)事件的概率时,由命题 1.2.4 可知,如有可能,尽量把该事件转化为两两互不相容的事件的和(并),以便简化计算.若两事件满足互不相容时,其和(并)事件的概率等于各事件概率之和.

命题 1.2.5(减法公式)　(1) 对于任意两事件 A,B,有 $P(A-B)=P(A-AB)$;

(2) 如果 $B\subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,即若两事件满足包含关系,则其差事件的概率等于两事件的概率之差.

例 1[1999 年 1]　设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件:$ABC=\varnothing$,$P(A)=P(B)=P(C)<1/2$,且已知 $P(A\cup B\cup C)=9/16$,则 $P(A)=$______.

解　根据加法公式即命题 1.2.4 得

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

由题设知，A,B,C 两两独立，$ABC=\varnothing$，且

$$P(A)=P(B)=P(C),\quad P(ABC)=0,\quad P(AB)=P(A)P(B)=P^2(A),$$
$$P(AC)=P(A)P(C)=P^2(A),\quad P(BC)=P(B)P(C)=P^2(A).$$

从而 $P(A\cup B\cup C)=3P(A)-3P^2(A)=9/16$，解得 $P(A)=3/4$ 或 $P(A)=1/4$.

又根据题设 $P(A)<1/2$，有 $P(A)=1/4$.

例 2[1992 年 1]　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=1/6$，则事件 A,B,C 全不发生的概率为______.

解　因 $ABC\subseteq AB$，故 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，所以 $P(ABC)=0$. 因而所求概率为

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})&=1-P(A+B+C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)]\\&=1-(1/4+1/4+1/4-0-1/6-1/6+0)=7/12.\end{aligned}$$

例 3　设 A,B 是两个随机事件，$P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$______.

解一　$0.3=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.7-P(AB)$，则 $P(AB)=0.7-0.3=0.4, P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$.

解二　
$$\begin{aligned}P(\overline{AB})&=1-P(AB)=1-P(A\bar{B})=1-[P(A)-P(A\bar{B})]\\&=1-P(A)+P(A\bar{B})=1-P(A)+P(A-B)\\&=1-0.7+0.3=0.6.\end{aligned}$$

解三　$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B}|A)=P(A)[1-P(B|A)]$，

故
$$P(B|A)=1-\frac{P(A-B)}{P(A)}=1-\frac{0.3}{0.7}=\frac{4}{7},$$

所以
$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P(A)P(B|A)=1-\frac{7}{10}\times\frac{4}{7}=\frac{6}{10}=0.6.$$

解四　因 $P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})=P(A)-P(A-B)=0.7-0.3=0.4$，于是

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6.$$

例 4　已知事件 A,B 仅发生一个的概率为 0.4，且 $P(A)+P(B)=0.6$，则 A,B 至少有一个不发生的概率为______.

解　$P(\bar{A}+\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)$. 下面求 $P(AB)$. 由题设知 $P(A\bar{B}+\bar{A}B)=0.4$. 因 $A\bar{B},\bar{A}B$ 互不相容，故

$$P(A\bar{B}+\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB),$$

即
$$P(A)+P(B)-2P(AB)=P(A\bar{B}+\bar{A}B),$$

故 $0.6-2P(AB)=0.4, P(AB)=0.1$. 因而 $P(\bar{A}+\bar{B})=1-0.1=0.9$.

注意　"至少出现……"事件的概率可用和事件的概率公式求之，也可用其对立事件的概率求之.

例 5　一实习生用同一台机器连续独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格的概率为 $p_i=1/(i+1)(i=1,2,3)$，以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，则 $P(X=2)=$______.

解 令 $A_i=\{$第 i 个零件为不合格品$\}(i=1,2,3)$. 依题意知,A_1,A_2,A_3 相互独立,且 $P(A_1)=1/2,P(A_2)=1/3,P(A_3)=1/4$,则

$$\{X=2\}=\{\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\},$$

$$\begin{aligned}P(X=2)&=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\\&=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=11/24.\end{aligned}$$

例 6 三个人相互独立地破译一个密码,如果只有两人参加破译,三种可能组合破译的概率分别为 1/2,7/15,2/5,则三人参加能破译的概率是______.

解 设事件 $A_i=\{$第 i 个人能破译密码$\}$,$B=\{$三人参加能破译$\}$,由题设知

$$P(A_1+A_2)=1/2,\quad P(A_1+A_3)=7/15,\quad P(A_2+A_3)=2/5.$$

因 A_1,A_2,A_3 相互独立,故 $\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3$ 也相互独立,当然也两两独立,则

$$P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=P(\overline{A_1+A_2})=1-P(A_1+A_2)=1/2, \qquad ①$$

$$P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_3)=P(\overline{A_1+A_3})=1-P(A_1+A_3)=1-7/15=8/15, \qquad ②$$

$$P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=P(\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\overline{A_2+A_3})=1-P(A_2+A_3)=1-2/5=3/5, \qquad ③$$

解方程式①、式②、式③得到 $P(\bar{A}_1)=2/3,P(\bar{A}_2)=3/4,P(\bar{A}_3)=4/5$,则

$$P(B)=P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=3/5.$$

注意 在解概率应用题时,总是先将已知条件或有关概率所蕴含的数学关系用事件概率等式(或不等式)表示.这有助于深入分析和计算.这是求解概率应用题的首要一步,也是关键一步,务必熟练掌握.

例 7 已知随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,事件 $A=\{X>\mu\},B=\{X>\sigma\},C=\{X>\mu+\sigma\}$,如果 $P(A)=P(B)$,则事件 A,B,C 至多有一个发生的概率是______.

解 由 $P(A)=P(B)$ 得到 $P(X>\mu)=P(X>\sigma)$,将其标准化得

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{\sigma-\mu}{\sigma}\right),\quad 即\quad 1-\Phi(0)=1-\Phi\left(\frac{\sigma-\mu}{\sigma}\right),$$

故 $\Phi\left(\frac{\sigma-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(0)=\frac{1}{2}$,于是 $\frac{\sigma-\mu}{\sigma}=0$,即 $\sigma=\mu$.

又 $C\subset A,\bar{A}\subset\bar{C},C\bar{A}=\varnothing$,故

$$\begin{aligned}\{事件 A,B,C 至多有一个发生\}&=A\bar{B}\,\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\,\bar{B}C+\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\\&=(A\bar{B}+\bar{A}B)\bar{C}+(\bar{A}\,\bar{B}C+\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})\\&=(B\bar{B}+\bar{B}B)\bar{C}+\bar{A}\,\bar{B}\quad(因\ A=B)\\&=\bar{A}\,\bar{B}=\bar{A}\,\bar{A}=\bar{A},\end{aligned}$$

故所求概率为 $P(\bar{A})=P(X\leqslant\mu)=F(\mu)=1/2$,其中 $F(x)$ 为 X 的分布函数.

1.2.2 利用乘法公式和条件概率公式计算概率

命题 1.2.6(乘法公式) (1) 对概率不为零的任意两事件 A 和 B,有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)(P(A)>0)=P(B)P(A|B)(P(B)>0);$$

(2) 对任何正整数 $n\geqslant2$,当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时,有

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

定义 1.2.1(条件概率的定义) 设 A,B 为两个事件且 $P(A)>0$,则称 $P(B|A)=$

$P(AB)/P(A)$为事件A发生的条件下，事件B发生的条件概率.

已知事件A发生，计算事件B发生的概率有两个基本方法：一是在整个样本空间Ω中计算$P(A)(P(A)>0)$与$P(AB)$，然后利用上述定义计算$P(B|A)$；二是把样本空间Ω缩减为A，在缩小的样本空间A中直接计算事件B发生的概率$P(B|A)$.

值得注意的是，条件概率$P(B|A)$与积事件AB的概率$P(AB)$的含义是不同的.条件概率是指已知事件A发生.在时间上有"先后"关系，在逻辑上有"主从"关系，在内容上有包含关系.而积事件AB的概率$P(AB)$是指A与B同时发生的概率，且常用下述公式计算：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

在应用题中如果知道某事件已发生，要求另一事件在此条件下的概率，且又知这两个事件又有包含关系(后者包含前者)，常用条件概率求解.

命题 1.2.7 设A,B为两个随机事件，且

$$0<P(B)<1,\quad 则\quad P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1.$$

命题 1.2.8 对于任意事件A，有(1)$P(A|\Omega)=P(A)$；(2) $P(\Omega|A)=1(P(A)\neq 0)$；(3) 若$A\subseteq B$，则$P(A|B)\geqslant P(A)$；(4) 若$A\supseteq B$，则$P(A|B)=1$ ($A\supseteq B$仅是$P(A|B)=1$的充分条件).

例 8[2006 年 1] 设A,B为随机事件，且$P(B)>0,P(A|B)=1$，则必有(　　).

(A) $P(A\cup B)>P(A)$　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$

解 由$P(A|B)=P(AB)/P(B)=1$得到$P(AB)=P(B)$，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$.仅(C)入选.

例 9 30个同规格的零件中混入3个次品，现进行逐个检查，则查完20个零件时正好查出3个次品的概率为______.

解 令$A=\{$查完20个零件，正好查出3个次品$\}$，$B=\{$前19次检查，查出2个次品$\}$，$C=\{$第20次检查，查出的产品为次品$\}$，则$A=BC$，

$$P(A)=P(BC)=P(B)P(C|B)=\frac{C_3^2C_{30-3}^{19-2}}{C_{30}^{19}}\times\frac{1}{30-19}=\frac{171}{4060}.$$

例 10 设A,B,C为随机事件，若$P(C)>0$，且

$$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C),$$

则下列结论正确的是(　　).

(A) $P(A\cup B|\overline{C})=P(A|\overline{C})+P(B|\overline{C})$　　(B) $P(A\cup B)=P(A|C)+P(B|C)$

(C) $P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$　　(D) $P(C(A\cup B))=P(AC)+P(BC)$

解 仅(D)入选.由题设有

$$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)=P(A|C)+P(B|C),$$

则
$$P(AB|C)=P(ABC)/P(C)=0,\quad 即\quad P(ABC)=0,$$

从而
$$P(C(A\cup B))=P(AC)+P(BC)-P(ABC)=P(AC)+P(BC).$$

例 11 设A,B为两个事件，且$0<P(B)<1$，则下列结果正确的是(　　).

(A) $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$　　(B) $P(A|B)+P(A|\overline{B})=1$