

国内外 数学竞赛题解

(下)

陕西师范大学图书馆
《国内外数学竞赛题解》编辑组 编

说 明

在党的十一届三中全会精神鼓舞下，为了积累资料，帮助中学提高数学教学质量，为实现科学技术现代化创造条件，我们特搜集整理了国内外中学数学竞赛试题和解答。其中：国内部分，包括全国和各省、市、自治区以及其所在地的历届中学数学竞赛试题及其解答；国外部分，主要有国际中学生数学奥林匹克竞赛试题和美苏等国中学生数学竞赛试题及部分题解。试题共计1600余个，分上、中、下三册。国内部分，文化大革命前为一册，文化大革命后为一册；国外部分，全一册。仅供内部参考。

本书在汇编过程中，得到不少大、中学校的数学老师和数学专业工作者的热情帮助和积极支持，乾县印刷厂承担了全部印刷任务，我们在此一并表示深切地感谢！

由于我们水平所限，加之时间仓促，书中一定会有不少缺点错误，希望同志们批评指正。

编 者

一九七九年五月

(877)..... 国际中学生数学奥林匹克竞赛 (1977年) 国式十第
(187)..... 国际中学生数学奥林匹克竞赛 (1978年) 国十二第

目 录

国际中学生数学奥林匹克竞赛 (1977年) 国式十第
(国外部分)

(707).....

一、国际中学生数学奥林匹克竞赛 及部分题解 (740)

(808)..... (1978年) 国一第

(000) 第一届 (1959年) 试题 (740)

(808) 第二届 (1960年) 试题 (741)

(808) 第三届 (1961年) 试题及题解 (743)

(707) 第四届 (1962年) 试题 (752)

(000) 第五届 (1963年) 试题 (753)

第六届 (1964年) 试题 (754)

(100) 第七届 (1965年) 试题 (755)

第八届 (1966年) 试题及题解 (756)

(100) 第九届 (1967年) 试题 (760)

(707) 第十届 (1968年) 试题 (762)

(608) 第十一届 (1969年) 试题 (763)

(100) 第十二届 (1970年) 试题 (764)

(808) 第十三届 (1971年) 试题 (766)

第十四届 (1972年) 试题 (768)

第十五届 (1973年) 试题 (769)

(100) 第十六届 (1974年) 试题 (770)

第十七届 (1975年) 试题 (772)

(100) 第十八届 (1976年) 试题及题解 (773)

第十九届 (1977年) 试题及题解.....	(778)
第二十届 (1978年) 试题及题解.....	(784)

二、罗马尼亚数学竞赛试题

.....	(797)
-------	-------

三、美国数学奥林匹克试题及解答

第一届 (1972年)	(806)
第二届 (1973年)	(809)
第三届 (1974年)	(815)
第四届 (1975年)	(823)
第五届 (1976年)	(827)
第六届 (1977年)	(830)

四、美国纽约数学竞赛试题及答案

初级中学1975年秋季竞赛题.....	(834)
初级中学1976年春季竞赛题.....	(837)
高级中学1975年竞赛题.....	(840)
高级中学1976竞赛题.....	(844)
高级中学1977竞赛题.....	(848)

五、美国1946—1965年数学竞赛题解

.....	(851)
1946年.....	(851)

(3) 1947年	(855)
(8) 1948年	(857)
(0) 1949年	(860)
(8) 1950年	(864)
(4) 1951年	(868)
(8) 1952年	(871)
(0) 1953年	(873)
(8) 1954年	(876)
(2) 1955年	(879)
(8) 1956	(882)
(0) 1957	(885)
(1) 1958	(888)
(8) 1959	(890)
(4) 1960	(893)
(0) 1961	(895)
(4) 1962	(898)
(0) 1963	(902)
(8) 1964	(904)
(2) 1965	(908)

六、苏联莫斯科数学奥林匹克试题及

部分题解	(913)
------	-------

第一届 (1935年) 试题 (913)

第二届 (1936) 试题 (914)

第三届 (1937) 试题 (915)

第四届 (1938) 试题 (916)

(7) 第五届 (1939) 试题	(916)
(7) 第六届 (1940) 试题	(918)
(9) 第七届 (1941年) 试题	(920)
(11) 第八届 (1945年) 试题	(922)
(8) 第九届 (1946年) 试题	(924)
(11) 第十届 (1947年) 试题	(928)
(6) 第十一届 (1948年) 试题	(930)
(3) 第十二届 (1949年) 试题	(933)
(6) 第十三届 (1950年) 试题	(935)
(32) 第十四届 (1951年) 试题	(938)
(6) 第十五届 (1952年) 试题	(939)
(8) 第十六届 (1953年) 试题	(944)
(10) 第十七届 (1954年) 试题	(948)
(6) 第十八届 (1955年) 试题	(954)
(2) 第十九届 (1956年) 试题	(960)
(2) 第二十届 (1957年) 试题	(964)
(2) 第十五届题解	(970)
(11) 第十六届题解	(973)
(8) 第十七届题解	(975)
第十八届题解	(978)
第十九届题解	(987)
第二十届题解	(996)

七、苏联奥尔德荣尼基茨市第三次数学竞赛

(1) 试题	(1006)
--------	--------

八、苏联威特比斯克市数学竞赛试题

..... (1010)

九、波兰人民共和国第六届数学竞赛试题

..... (1013)

数学竞赛试题

(卷宗册小三，题升已未算于关) 业书面作二第

面可不 $\frac{3n+4}{8+n}$ 题分，题然自回并干双：证明：1.

(分5)

有，x 题实的解悉干双：2.

$$\sqrt{2} = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \quad (1)$$

$$1 = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \quad (2)$$

$$2 = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \quad (3)$$

其中题宝题以仅非是题的题值。(8分)

3. 已关于 $\cos x$ 的方程

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

其中 a, b, c 是实数，用题 a, b, c 组成最 $\cos x$ 的二

题式水

对于 $a = 4, b = 2, c = -1$ ，比题已题的已题组题的

(分7)

题式

(卷宗册小三，回几干关) 业书面作二第

4. 已题题 c ，求作直题三角题 ABC ，题果题，题三

形 ABC 的题题是它的直题的比题中题。(5分)

5. 在平面上已题题 AB 已它的内题任意一点 M ，在

(0101) 一、国际中学生数学奥林匹克

试题及部分题解

(8101) 第一届 (1959) 国际中学生 数学竞赛试题

第一次书面作业 (关于算术与代数, 三小时完卷)

1. 证明: 对于任何自然数 n , 分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可通约. (5分)

2. 对于怎样的实数 x , 有

$$(1) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$$

$$(2) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 1$$

$$(3) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 2$$

其中假定根仅仅是非负的数值. (8分)

3. 已知关于 $\cos x$ 的方程

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

其中 a, b, c 是实数. 用数 a, b, c 组成根是 $\cos x$ 的二次方程.

对于 $a = 4, b = 2, c = -1$, 比较已知的与新组成的方程. (7分)

第二次书面作业 (关于几何, 三小时完卷)

4. 已知斜边 c , 求作直角三角形 ABC , 如果知道三角形 ABC 的斜边是它的直角边的比例中项. (5分)

5. 在平面上已知线段 AB 与它内部任意一点 M , 在同

一个半平面上以线段AM与BM为一边作正方形AMCD与BMEF, 这两个正方形的外接圆, 除点M外, 又相交在某点N.

(1) 证明: 直线AE与BC通过点N;

(2) 证明: 直线MN通过平面上的与点M在线段AB内位置无关的一定点;

(3) 研究连接二所作正方形的中心的线段的几何轨迹. (8分)

6. 两平面P与Q相交于直线l, 在平面P上有已知点A, 在平面Q上有已知点C, 其中任一点不在直线l上, 求作等腰梯形ABCD, 底为AB、CD, 能内切一圆, 其中点B在平面P上, 点D在平面Q上. (7分)

第二届(1960)国际中学生 数学竞赛试题

第一次书面作业

1. 求出所有被11除后得到的商等于它的各个数字的平方和的三位数.

2. 对于怎样的x值, 不等式 $\frac{4\pi^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$ 成立?

3. 已知直角三角形ABC, 它的斜边BC被分成n个等分, 其中n是奇数. 字母 α 表示从点A看包括已知三角形的斜边中点的那一等分的视角. 三角形的高与斜边的长对应地用字母h和a表示. 证明

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

第二次书面作业 已知对应地从顶点A与B引出的高 h_1 与 h_2 的长,从顶点A引出的中线 m_1 的长,求作 $\triangle ABC$.

5. 已知立方体 $ABCD-A'B'C'D'$,

(1) 求线段 xy 的中点的几何轨迹. 这里 x ——线段 AC 上的任意点, y ——线段 $B'D'$ 上的任意点.

(2) 求位于线段 xy 内并满足关系式 $My = 2Mx$ 的点 M 的几何轨迹.

6. 已知一直圆锥与它的内切球, 这个球外切一个直圆柱, 它的底面之一在已知圆锥底面上, V_1 表示圆锥体积, V_2 代表示圆柱体积.

(1) 证明: 等式 $V_1 = V_2$ 不成立;

(2) 指出使等式 $V_1 = kV_2$ 成立的最小值 k , 对于这种情况, 作出圆锥的轴截面的顶角.

7. 已知底为 a 与 b , 高为 h 的等腰梯形.

(1) 在梯形的对称轴上, 求作点 p , 使从 p 点看梯形的腰的视角是一直角;

(2) 求点 p 与梯形的一底边间的距离计算法的表示式;

(3) 在怎样的条件下, 点 p 的作图可以实现(研究能够成立的条件).

第三届(1961)国际中学生 数学竞赛试题及解答

1. 解方程组:
$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases}$$

其中 a 、 b 是已知数. 欲使 x 、 y 和 z 取得不相等的正数值, 那么 a 、 b 应该满足什么条件?

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases} \quad (1)$$

解: 设
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases} \quad (2)$$

$$xy = z^2 \quad (3)$$

由(1)² - (2)得

$$2xy + 2yz + 2zx = a^2 - b^2$$

利用(3)代换上式左端第一项, 并提出公因子, 即得

$$2z(x + y + z) = a^2 - b^2$$

再利用(1)得

$$2az = a^2 - b^2$$

当 $a = 0$, 且 $b = 0$ 时, $x = y = z = 0$

而当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时或 $a \neq 0$ 且 $b = 0$ 时, 方程无解.

设 $a \neq 0$, 且 $b \neq 0$ 时, 得到

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad (4)$$

由(2)、(3)、(4)化去 z^2 , 得

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = b^2 - 3\left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$\frac{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}{4a^2}$$

答：又因为...

等式右端仅当 $\frac{1}{3} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq 3$ 时为非负数，此时方程组有实数解。

$$\therefore x - y = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}$$

又由 (1) 得 $x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a}$

$$(1) \quad \text{由此解得 } x = \frac{1}{4a} \{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}\}$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{4a} \{a^2 + b^2 \mp \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}\}$$

(3) 因此当 $a = 0$ 且 $b = 0$ 时，方程组的解为 $x = y = z = 0$ ；

当 $ab \neq 0$ 而且 $\frac{1}{3} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq 3$ 时，方程组有实数解：

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4a} \{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}\} \\ y = \frac{1}{4a} \{a^2 + b^2 \mp \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}\} \\ z = \frac{a^2 - b^2}{2a} \end{cases}$$

显然，要使 x, y 取不相等的正数值， a, b 应满足以下条件：

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{2} a < |b| < a.$$

2. a, b, c 是三角形的三边， S 是面积，证明：

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}, \text{ 等号在什么条件下成立?}$$

解：设三角形 a 边上的高为 h ，则

$$h = \frac{1}{2a} \sqrt{4a^2b^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

于是， $S = \frac{1}{2}ah$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

另一方面， $a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$

$$= \frac{1}{2}[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] \geq 0.$$

因此 $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

而 $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$

因而 $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3a^2b^2 + 3b^2c^2 + 3c^2a^2$

或 $\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \leq \frac{1}{3}$

从而 $S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2}$

$$= \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\frac{4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} - 1}$$

$$\leq \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \frac{1}{4\sqrt{3}} (a^2 + b^2 + c^2)$$

即 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$,

显然， $a = b = c$ 时，等式成立。

3. 解方程 $\cos^n x - \sin^n x = 1$ ，其中 n 表示任意自然数。

解：当 n 是偶数时， $\sin^n x$ ， $\cos^n x$ 均为实数，但 $\cos^n x \leq 1$ ，故有 $\cos^n x - \sin^n x = 1$ ，知必有 $\sin^n x = 0$ ， $\cos^n x = 1$ ，从而得到

$x = k\pi$ (k 为任意整数)。

当 n 是奇数时, 由方程得 $\cos^n x = 1 + \sin^n x$, 因而 $\cos^n x \geq 0$, $\sin^n x \leq 0$, 从而 $\cos x \geq 0$, $\sin x \leq 0$. 当 $\sin x = 0$ 时 $\cos x = 1$, 于是 $x = 2k\pi$ (k 为任意整数); 当

$\sin x = -1$ 时, $\cos x = 0$, 得 $x = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$.

对于 $-1 < \sin x < 0$, 我们有 $0 < \cos x < 1$, 方程变为

$$|\cos x|^n + |\sin x|^n = 1.$$

当 $n \geq 3$ 时, $|\sin x|^n < \sin^2 x$, $|\cos x|^n < \cos^2 x$.

于是 $|\cos x|^n + |\sin x|^n < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 这表明方程无解。

当 $n = 1$ 时, $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$,

从而 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$, 因此, $\cos x = 0$ 或 1 , 但这与 $0 < \cos x < 1$ 的假定矛盾。综合以上内容, 方程

$\cos^n x - \sin^n x = 1$ 的通解是:

$$x = \begin{cases} k\pi, & \text{当 } n \text{ 为偶数时,} \\ \left(2k + \frac{3}{4}\right)\pi \pm \frac{3}{4}\pi, & \text{当 } n \text{ 为奇数时, (式中 } k \text{ 为任意整数).} \end{cases}$$

1. 已知 P 为三角形 $P_1P_2P_3$ 内的任意一定点, 直线 $P_1P =$

P_2P 、 P_3P 分别交对边于点 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 。证明：在 $\frac{P_1P}{PQ_1}$ 、

$\frac{P_2P}{PQ_2}$ 及 $\frac{P_3P}{PQ_3}$ 三个比中，至少有一个不大于2，并且至少有一个不小于2。

证明：我们用 $\triangle ABC$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积。则

$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1} = \frac{\triangle PP_2P_3}{\triangle P_1P_2P_3},$$

$$\frac{PQ_2}{P_2Q_2} = \frac{\triangle PP_3P_1}{\triangle P_1P_2P_3},$$

$$\frac{PQ_3}{P_3Q_3} = \frac{\triangle PP_1P_2}{\triangle P_1P_2P_3}.$$

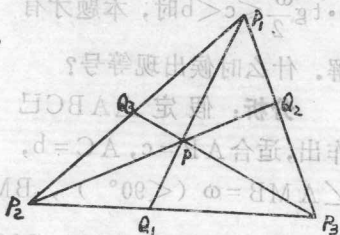


图 一

注意到 $\triangle PP_2P_3 + \triangle PP_3P_1 + \triangle PP_1P_2 = \triangle P_1P_2P_3$,

将上面三个等式两边分别相加，即得

$$(1) \quad \frac{PQ_1}{P_1Q_1} + \frac{PQ_2}{P_2Q_2} + \frac{PQ_3}{P_3Q_3} = 1.$$

由此可知，等式左端必须有一项不小于 $\frac{1}{3}$ ，也必有一项

不大于 $\frac{1}{3}$ ，不仿设

$$(2) \quad \frac{PQ_1}{P_1Q_1} \geq \frac{1}{3}, \quad \frac{PQ_3}{P_3Q_3} \leq \frac{1}{3},$$

$$\text{于是 } \frac{P_1Q_1}{PQ_1} \leq 3, \quad \frac{P_3Q_3}{PQ_3} \geq 3.$$

但 $P_1Q_1 = P_1P + PQ_1$, $P_3Q_3 = P_3P + PQ_3$ ，即得

$$\frac{P_1P}{PQ_1} \leq 2, \quad \frac{P_3P}{PQ_3} \geq 2.$$

2. 已知三角形ABC的边AC=b, AB=c, M为BC边的中点, $\angle AMB = \omega$,

且 $\omega < 90^\circ$, 求作三角形

ABC. 证明: 当且仅当

$b \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leq c < b$ 时, 本题才有

解. 什么时候出现等号?

分析: 假定 $\triangle ABC$ 已作出, 适合 $AB=c$, $AC=b$,

$\angle AMB = \omega$ ($< 90^\circ$), $BM = MC$,

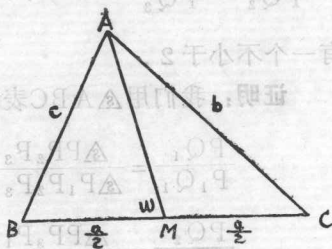


图 二

命 $AM = m$, $BM = MC = \frac{a}{2}$, 因 $\omega < 90^\circ$, 故 $\angle AMC > 90^\circ > \omega = \angle AMB$,

从而 $b > c$, 由中线和各边的关系, 得

$$\frac{b^2 + c^2}{2} = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (1)$$

$$b^2 - c^2 = 2am \cos \omega \quad (2)$$

由 (1)、(2) 分别获得:

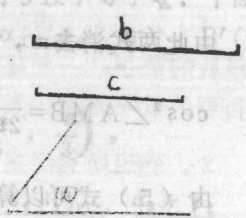
$$\left(\frac{a}{2} + m\right)^2 = \frac{1}{\cos \omega} \left(b^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} - c^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}\right) \quad (3)$$

$$\left(\frac{a}{2} - m\right)^2 = \frac{1}{\cos \omega} \left(c^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} - b^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}\right) \quad (4)$$

要使 (4) 式有意义, 要求 $\left(c^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} - b^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}\right) \geq 0$ 或

$\text{btg} \frac{\omega}{2} \leq c$ 。若以上条件 $\text{btg} \frac{\omega}{2} \leq c < b$ 均满足, 则由 (3)、

(4) 得到

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{\frac{b^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} - c^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\cos \omega}} \\
 &\pm \sqrt{\frac{c^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} - b^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\cos \omega}} \\
 &= \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{b^2 - c^2}{2 \cos \omega}} \\
 &\pm \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{b^2 - c^2}{2 \cos \omega}} \quad (5).
 \end{aligned}$$


作法: 给定线段 b 、 c 及锐角 ω , 符合下述条件:

(1) $\text{btg} \frac{\omega}{2} \leq c < b$ (因限于篇幅, 只列过程, 而未作出图

形)。

(1) 作线段 $\alpha_1 = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}$,

$\beta_1 = \frac{b+c}{2}, \beta_2 = \frac{b-c}{\cos \omega},$

$\beta_3 = \sqrt{\beta_1 \cdot \beta_2} = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{2 \cos \omega}},$

$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_3^2}, \beta = \sqrt{\alpha_1^2 - \beta_3^2}.$

(2) 作线段 $a = \alpha + \beta$ (或 $\alpha - \beta$)

(3) 作 $\triangle ABC$, 使 $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$,