国内外
数学竞赛题解

（下）

陕西师范大学图书馆
《国内外数学竞赛题解》编辑组 编

说　明

在党的十一届三中全会精神鼓舞下，为了积累资料，帮助中学提高数学教学质量，为实现科学技术现代化创造条件，我们特搜集整理了国内外中学数学竞赛试题和解答。其中：国内部分，包括全国和各省、市、自治区以及其所在地的历届中学数学竞赛试题及其解答；国外部分，主要有国际中学生数学奥林匹克竞赛试题和美苏等国中学生数学竞赛试题及部分题解。试题共计1600余个，分上、中、下三册。国内部分，文化大革命前为一册，文化大革命后为一册；国外部分，全一册。仅供内部参考。

本书在汇编过程中，得到不少大、中学校的数学老师和数学专业工作者的热情帮助和积极支持，乾县印刷厂承担了全部印刷任务，我们在此一并表示深切地感谢！

由于我们水平所限，加之时间仓促，书中一定会有不少缺点错误，希望同志们批评指正。

编　者

一九七九年五月

目 录

（国外部分）

一、国际中学生数学奥林匹克试题及部分题解

第一届（1959）国际中学生数学竞赛试题

第一次书面作业（关于算术与代数，三小时完卷）

1．证明：对于任何自然数n，分数$\frac{21n+4}{14n+3}$不可通约．（5分）

2．对于怎样的实数x，有

（1）$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

（2）$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

（3）$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

其中假定根仅仅是非负的数值．（8分）

3．已知关于cosx的方程

$$a\cos^2x+b\cos x+c=0$$

其中a、b、c是实数．用数a、b、c组成根是cos2x的二次方程．

对于$a=4$，$b=2$，$c=-1$，比较已知的与新组成的方程．（7分）

第二次书面作业（关于几何，三小时完卷）

4．已知斜边c，求作直角三角形ABC，如果知道三角形ABC的斜边是它的直角边的比例中项．（5分）

5．在平面上已知线段AB与它内部任意一点M，在同

一个半平面上以线段AM与BM为一边作正方形AMCD与BMEF，这两个正方形的外接圆，除点M外，又相交在某点N．

（1）证明：直线AE与BC通过点N；

（2）证明：直线MN通过平面上的与点M在线段AB内位置无关的一定点；

（3）研究连接二所作正方形的中心的线段的中点的几何轨迹．（8分）

6．两平面P与Q相交于直线l，在平面P上有已知点A，在平面Q上有已知点C，其中任一点不在直线l上，求作等腰梯形ABCD，底为AB、CD，能内切一圆，其中点B在平面P上，点D在平面Q上．（7分）

第二届（1960）国际中学生数学竞赛试题

第一次书面作业

1．求出所有被11除后得到的商等于它的各个数字的平方和的三位数．

2．对于怎样的x值，不等式$\dfrac{4\pi^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$成立？

3．已知直角三角形ABC，它的斜边BC被分成n个等分，其中n是奇数．字母α表示从点A看包括已知三角形的斜边中点的那一等分的视角．三角形的高与斜边的长对应地用字母h和a表示．证明

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

第二次书面作业

4．已知对应地从顶点A与B引出的高h_a与h_b的长，从顶点A引出的中线m_a的长，求作△ABC.

5．已知立方体ABCD—A′B′C′D′

（1）求线段xy的中点的几何轨迹．这里x——线段AC上的任意点，y——线段B′D′上的任意点．

（2）求位于线段xy内并满足关系式My＝2Mx的点M的几何轨迹．

6．已知一直圆锥与它的内切球，这个球外切一个直圆柱，它的底面之一在已知圆锥底面上．V_1表示圆锥体积，V_2代表示圆柱体积．

（1）证明：等式$V_1=V_2$不成立；

（2）指出使等式$V_1=kV_2$成立的最小值k，对于这种情况，作出圆锥的轴截面的顶角．

7．已知底为a与b，高为h的等腰梯形．

（1）在梯形的对称轴上，求作点p，使从p点看梯形的腰的视角是一直角；

（2）求点p与梯形的一底边间的距离计算法的表示式；

（3）在怎样的条件下，点p的作图可以实现（研究能够成立的条件）．

第三届（1961）国际中学生数学竞赛试题及解答

（一）代数与三角

1．解方程组：$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ xy=z^2 \end{cases}$

其中a、b是已知数．欲使x、y和z取得不相等的正数值，那么a、b应该满足什么条件？

解：设 $\begin{cases} x+y+z=a & (1) \\ x^2+y^2+z^2=b^2 & (2) \\ xy=z^2 & (3) \end{cases}$

由（1）^{2}－（2）得

$2xy+2yz+2zx=a^2-b^2$

利用（3）代换上式左端第一项，并提出公因子，即得

$2z(x+y+z)=a^2-b^2$

再利用（1）得

$2az=a^2-b^2$

当$a=0$，且$b=0$时，$x=y=z=0$

而当$a=0$且$b\neq0$时或$a\neq0$且$b=0$时，方程无解。

设$a\neq0$，且$b\neq0$时，得到

$$z=\frac{a^2-b^2}{2a} \qquad (4)$$

由（2）、（3）、（4）化去z^2，得

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=b^2-3\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2$$

$$=\frac{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}{4a^2}$$

等式右端仅当$\frac{1}{3}\leqslant\left(\frac{b}{a}\right)^2\leqslant 3$时为非负数，此时方程组有实数解.

$$\therefore\quad x-y=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}$$

又由（1） 得 $x+y=\frac{a^2+b^2}{2a}$

由此解得 $x=\frac{1}{4a}\{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}\}$

$$y=\frac{1}{4a}\{a^2+b^2\mp\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}\}$$

因此当$a=0$且$b=0$时，方程组的解为$x=y=z=0$；

当$ab\neq 0$而且$\frac{1}{3}\leqslant\left(\frac{b}{a}\right)^2\leqslant 3$时，方程组有实数解：

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4a}\{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}\} \\ y=\frac{1}{4a}\{a^2+b^2\mp\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}\} \\ z=\frac{a^2-b^2}{2a} \end{cases}$$

显然，要使x、y取不相等的正数值，a、b应满足以下条件；

$$0<\frac{\sqrt{3}}{2}a<|b|<a.$$

2．a、b、c是三角形的三边，S是面积，证明：

$a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$，等号在什么条件下成立？

解：设三角形a边上的高为h，则

$$h=\frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2+4b^2c^2+4c^2a^2-(a^2+b^2+c^2)^2}$$

于是，$S=\frac{1}{2}ah$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2+4b^2c^2+4c^2a^2-(a^2+b^2+c^2)^2}$$

另一方面，$a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2$

$$=\frac{1}{2}[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2]\geqslant 0.$$

因此 $a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

而 $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

因而 $(a^2+b^2+c^2)^2\geqslant 3a^2b^2+3b^2c^2+3c^2a^2$

或 $\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\leqslant\frac{1}{3}$

从而 $S=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2+4b^2c^2+4c^2a^2-(a^2+b^2+c^2)^2}$

$$=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\sqrt{\frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}-1}$$

$$\leqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\sqrt{\frac{4}{3}-1}=\frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)$$

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$，

显然，$a=b=c$时，等式成立。

3．解方程 $\cos^n x-\sin^n x=1$，其中n表示任意自然数。

解：当n是偶数时，$\sin^n x$，$\cos^n x$均为实数，但$\cos^n x\leqslant 1$，故有$\cos^n x-\sin^n x=1$，知必有$\sin^n x=0$，$\cos^n x=1$，从而得到

$x=k\pi$（k为任意整数）.

当n是奇数时，由方程得 $\cos^n x=1+\sin^n x$，因而 $\cos^n x\geqslant 0$，$\sin^n x\leqslant 0$，从而 $\cos x\geqslant 0$，$\sin x\leqslant 0$．当 $\sin x=0$ 时 $\cos x=1$，于是 $x=2k\pi$（k为任意整数）；当

$\sin x=-1$ 时，$\cos x=0$，得 $x=2k\pi+\frac{3}{2}\pi$。

对于 $-1<\sin x<0$，我们有 $0<\cos x<1$，方程变为

$$|\cos x|^n+|\sin x|^n=1.$$

当 $n\geqslant 3$ 时，$|\sin x|^n<\sin^2 x$，$|\cos x|^n<\cos^2 x$.

于是 $|\cos x|^n+|\sin x|^n<\sin^2 x+\cos^2 x=1$，

这表明方程无解.

当 $n=1$ 时，$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$，

从而 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}$，因此，$\cos x=0$ 或 1，但这与 $0<\cos x<1$ 的假定矛盾。综合以上内容，方程

$\cos^n x-\sin^n x=1$ 的通解是：

$$x=\begin{cases}k\pi, & \text{当n为偶数时,}\\ \left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi\pm\frac{3}{4}\pi, & \text{当n为奇数时,（式中k}\end{cases}$$

为任意整数）.

（二）几　何

1．已知P为三角形$P_1P_2P_3$内的任意一定点，直线P_1P

P_2P、P_3P分别交对边于点Q_1、Q_2、Q_3．证明：在$\dfrac{P_1P}{PQ_1}$、$\dfrac{P_2P}{PQ_2}$及$\dfrac{P_3P}{PQ_3}$三个比中，至少有一个不大于2，并且至少有一个不小于2．

证明：我们用$\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;ABC$表示$\triangle ABC$的面积。则

$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1}=\frac{\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;PP_2P_3}{\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;P_1P_2P_3},$$

$$\frac{PQ_2}{P_2Q_2}=\frac{\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;PP_3P_1}{\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;P_1P_2P_3},$$

$$\frac{PQ_3}{P_3Q_3}=\frac{\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;PP_1P_2}{\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;P_1P_2P_3}.$$

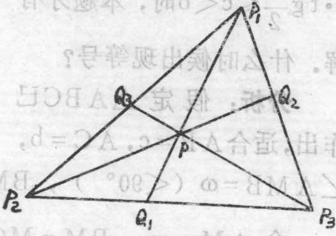


图　一

注意到$\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;PP_2P_3+\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;PP_3P_1+\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;PP_1P_2=\triangle\!\!\!\!\!\!{\scriptscriptstyle S}\;P_1P_2P_3$，将上面三个等式两边分别相加，即得

$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1}+\frac{PQ_2}{P_2Q_2}+\frac{PQ_3}{P_3Q_3}=1.$$

由此可知，等式左端必须有一项不小于$\frac{1}{3}$，也必有一项不大于$\frac{1}{3}$，不仿设

$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1}\geqslant\frac{1}{3},\quad \frac{PQ_3}{P_3Q_3}\leqslant\frac{1}{3},$$

于是$\dfrac{P_1Q_1}{PQ_1}\leqslant 3$，$\dfrac{P_3Q_3}{PQ_3}\geqslant 3$．

但　$P_1Q_1=P_1P+PQ_1$，$P_3Q_3=P_3P+PQ_3$，即得

$$\frac{P_1P}{PQ_1} \leqslant 2, \quad \frac{P_3P}{PQ_3} \geqslant 2.$$

2．已知三角形ABC的边$AC=b$，$AB=c$，M为BC边的中点，$\angle AMB=\omega$，且$\omega<90°$，求作三角形ABC．证明：当且仅当$b\cdot tg\frac{\omega}{2}\leqslant c<b$时，本题才有解．什么时候出现等号？

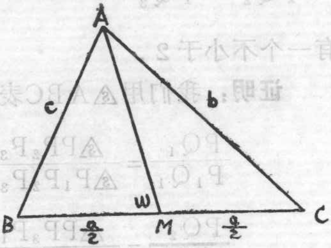


图　二

分析：假定△ABC已作出，适合$AB=c$，$AC=b$，$\angle AMB=\omega$（$<90°$），$BM=MC$，

命$AM=m$，$BM=MC=\frac{a}{2}$，因$\omega<90°$，故$\angle AMC>90°>\omega=\angle AMB$，

从而$b>c$，由中线和各边的关系，得

$$\frac{b^2+c^2}{2}=m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

$$b^2-c^2=2am\cos\omega \qquad (2)$$

由（1）、（2）分别获得：

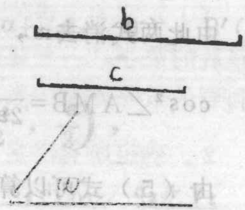
$$\left(\frac{a}{2}+m\right)^2=\frac{1}{\cos\omega}\left(b^2\cos^2\frac{\omega}{2}-c^2\sin^2\frac{\omega}{2}\right) \qquad (3)$$

$$\left(\frac{a}{2}-m\right)^2=\frac{1}{\cos\omega}\left(c^2\cos^2\frac{\omega}{2}-b^2\sin^2\frac{\omega}{2}\right) \qquad (4)$$

要使（4）式有意义，要求$\left(c^2\cos^2\frac{\omega}{2}-b^2\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\geqslant 0$或

$b\,tg\dfrac{\omega}{2}\leqslant c$。若以上条件 $b\,tg\dfrac{\omega}{2}\leqslant c<b$ 均满足，则由（3）、（4）得到

$$a=\sqrt{\frac{b^2coc^2\dfrac{\omega}{2}-c^2\sin^2\dfrac{\omega}{2}}{\cos\omega}}$$



$$\pm\sqrt{\frac{c^2\cos^2\dfrac{\omega}{2}-b^2\sin^2\dfrac{\omega}{2}}{\cos\omega}}$$

$$=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{b^2-c^2}{2\cos\omega}}$$

$$\pm\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{b^2-c^2}{2\cos\omega}} \qquad (5).$$

作法：给定线段b、c及锐角ω，符合下述条件：

$b\,tg\dfrac{\omega}{2}\leqslant c<b$（因限于篇幅，只列过程，而未作出图形）.

（1）作线段 $\alpha_1=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}$，

$\beta_1=\dfrac{b+c}{2}$，$\beta_2=\dfrac{b-c}{\cos\omega}$，

$\beta_3=\sqrt{\beta_1\cdot\beta_2}=\sqrt{\dfrac{b^2-c^2}{2\cos\omega}}$，

$\alpha=\sqrt{\alpha_1^2+\beta_3^2}$，　　　$\beta=\sqrt{\alpha_1^2-\beta_3^2}$。

（2）作线段 $a=\alpha+\beta$（或 $\alpha-\beta$）

（3）作 $\triangle ABC$，使 $BC=a$，$AB=c$，$AC=b$，