面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等数学

孟 军 主编

生命科学 经济类专业用

中国农业出版社

面向21世纪课程教材
Text book Series for 21st Century

高等数学

孟 军 主编

生命科学 经济类专业用

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/孟军主编．—北京：中国农业出版社，2001.8
面向21世纪课程教材
ISBN 7-109-07118-9

Ⅰ．高… Ⅱ．孟… Ⅲ．高等数学-高等学校-教材
Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第050454号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码 100026）
出版人：沈镇昭
责任编辑 朱 雷

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2001年9月第1版 2002年6月北京第2次印刷

开本：850mm×1168mm 1/16 印张：17
字数：402千字
定价：28.10元

前　言

该教材是教育部“面向21世纪高等农林教育教学内容和课程体系改革计划”项目的成果。

江泽民同志指出：“创新是一个民族进步的灵魂，是国家兴旺发达之不竭动力。”人类社会已进入知识经济时代，生产的发展已不是由资本的积累和生产规模的扩大所决定的，主要决定于知识的创新。一个民族在未来社会中的地位也将主要依赖于它拥有的创新人才的数量和质量。因此，在《中华人民共和国高等教育法》中把培养具有创新精神的高级专门人才作为高等教育的主要任务之一。作为农业高等院校基础课之一的数学系列课的教学改革也以创新人才的培养为目标。

随着计算机技术的普及和应用，数学在各门科学中的应用也日益广泛。当前数学科学已和自然科学、社会科学并列为基础科学的三大领域。对于非数学专业学生数学素质的要求已不是具有较深厚的数学理论知识和较强的推理证明能力，而是要求具有应用数学方法，借助于计算机技术解决实际问题的意识和能力。因此，数学系列课程教学改革的基本方向为：以培养学生用数学的意识和能力为出发点，使学生具有宽广的数学基础知识，掌握常用的数学方法，了解数学的前沿发展方向，具有一定的数学建模能力，并能在计算机上完成对所建模型的求解，掌握数学的思维方式，为学生创造潜能的发挥打下基础。本书就是为了适应这个教学改革的需求而编写的。本书在编写上有如下特点：

一、在结构上，本着不影响微积分基本学习体系的情况下，大胆变革。淡化对极限数学定义的讲解和证明，只要求学生在思想上理解极限的概念；需要的定理只是直接给出结论和必要的说明，并不给出定理的证明；弱化对学生解题技巧的培养；增加导数、定积分和微分方程的数值解法，加强学生对离散问题的感性认识；将不定积分和定积分合为一章，增加定积分应用一章，将空间解析几何和多元函数合二为一。

二、加强对高等数学实际应用的讲解。书中所举例题的大部分都是实际应用的例子，也有些是数学应用的经典例子（如 Logistic 方程、库柏——道格拉斯生产函数等）。这样使学生在学完基本的数学知识后，不但知道所学的数学知识有什么用，而且还知道怎样用。同时在书后的习题中配有大量数学应用方面的习题，学生在掌握好书本上的基础知识之后，可以通过完成课后习题，在巩固基础知识的同时，使学生用数学的能力得到培养，从而激发了学生的创造潜能。

三、在适当的地方增加一些现代数学发展前沿知识的介绍，如分形理论、微分方程的定性理

论、边际效益分析等，使学生在学习高等数学基础知识的同时，对现代数学发展的最新方向有所了解，增强学生的学习兴趣，扩大学生的视野，激发学生对数学知识的探索欲。

四、结合国际通用的数学软件 Mathematica，在每一章的后面都增加了演示与实验，这是符合面向21世纪高等院校数学教学改革要求的。通过数学实验，使学生知道怎样在计算机上实现数学的推导、计算，怎样将自己的想法通过计算机去完成；同时由于计算机的引入，很多在计算机上可以简单实现的推导、计算和画图，在理论课教学中可以淡化，从而可以有更多的学时去丰富讲课内容。

五、在每一章的后面介绍了与微积分发展有关的数学家的生平典故，使学生在学习数学知识的同时了解微积分的发展史，增加数学课上的人文氛围，加强数学文化的熏陶，进而提高学生的数学素质。

本书为高等农林院校经济类和生命科学类学生编写，书中所举的大部分例子也都围绕着这两方面取材。本书适用的教学时数在80～120学时之间。教师可根据自己学校的不同情况，对书中的内容进行适当的删减。近几年来，数学建模在全国大专院校中蓬勃兴起，也逐渐成为数学教学的重要内容。本书在对实际问题进行举例分析时，就已经把数学建模的思想和方法潜移默化地传授给学生，但书中所举的例子还是比较简单的，教师可根据学生的学习兴趣增加一些较复杂的数学建模实例。书中的数学实验是为了配合高等数学教学而设置，所以课后的演示与实验还是比较简单的，只是要求能用 Mathematica 进行有关高等数学的运算，更深层次的数学实验本书并未涉及，有兴趣的读者也可自己阅读有关书籍。

本书的编写分工如下：东北农业大学孟军教师负责提出全书编写的总体思路，并编写第五章、第六章、第七章、第八章；葛家麒负责第一章、第二章、第三章；尹海东负责编写第四章、第九章、第十章；东北林业大学的郑煜负责编写附录及每章的数学实验；黑龙江省八一农垦大学的于晓秋负责编写每章后面的数学家的故事。全书由王凯捷主审。

本书在编写过程中得到东北农业大学数学教研室全体教师的热心帮助，在东北农业大学试用1年，任课教师对本书提出了很多中肯而又宝贵的意见；本书在出版的过程中得到了东北农业大学教材科任喜英科长和教务处及校领导的大力支持，在此表示感谢。

编　者

2001年5月于哈尔滨

目　录

前言

第一章　函数 ………… 1

§1.1　函数概念及特性 ………… 1

§1.2　初等函数 ………… 4

习题一 ………… 6

演示与实验一 ………… 7

实验习题一 ………… 11

数学家的故事 ………… 12

第二章　极限与连续 ………… 14

§2.1　数列的极限 ………… 14

§2.2　函数的极限 ………… 18

§2.3　极限的运算法则与性质 ………… 20

§2.4　函数的连续性 ………… 27

习题二 ………… 32

演示与实验二 ………… 34

实验习题二 ………… 36

数学家的故事 ………… 37

第三章　导数与微分 ………… 38

§3.1　导数概念 ………… 38

§3.2　求导法则 ………… 45

§3.3　高阶导数 ………… 51

§3.4　微分及其应用 ………… 53

习题三 ………… 57

演示与实验三 …… 61
实验习题三 …… 63
数学家的故事 …… 64

第四章 中值定理与导数应用 …… 65

§4.1 中值定理 …… 65
§4.2 洛必达法则 …… 67
§4.3 导数在几何上的应用 …… 71
§4.4 经济学中的最值问题 …… 76
§4.5 导数在其他问题中的应用 …… 81
习题四 …… 84
演示与实验四 …… 86
实验习题四 …… 88
数学家的故事 …… 89

第五章 积分 …… 91

§5.1 定积分的概念 …… 91
§5.2 定积分与不定积分 …… 96
§5.3 不定积分的计算 …… 100
§5.4 定积分的计算 …… 110
§5.5 无穷限积分 …… 115
§5.6 定积分的近似计算 …… 117
习题五 …… 123
演示与实验五 …… 125
实验习题五 …… 126
数学家的故事 …… 126

第六章 定积分的应用 …… 129

§6.1 定积分应用的基本思想方法 …… 129
§6.2 平面图形的面积 …… 132
§6.3 体积 …… 136
§6.4 函数平均值 …… 139
§6.5 在社会科学中的应用 …… 141
习题六 …… 146
演示与实验六 …… 148
数学家的故事 …… 149

第七章　多元函数微分学 …… 151

§7.1　多元函数的基本概念 …… 151
§7.2　偏导数与全微分 …… 159
§7.3　复合函数求导法 …… 162
§7.4　二元函数的极值 …… 164
§7.5　多元微分的应用 …… 169
习题七 …… 174
演示与实验七 …… 176
实验习题七 …… 178
数学家的故事 …… 179

第八章　二重积分 …… 183

§8.1　二重积分的概念与性质 …… 183
§8.2　二重积分的计算 …… 185
习题八 …… 191
演示与实验八 …… 193
实验习题八 …… 193
数学家的故事 …… 194

第九章　微分方程及其应用 …… 196

§9.1　微分方程及其相关概念 …… 196
§9.2　微分方程的经典案例 …… 197
§9.3　微分方程的解析解 …… 202
§9.4　定性理论初步 …… 210
§9.5　微分方程的数值解法 …… 213
§9.6　微分方程的应用 …… 215
习题九 …… 219
演示与实验九 …… 221
实验习题九 …… 223
数学家的故事 …… 223

第十章　无穷级数 …… 225

§10.1　无穷级数及其性质 …… 225
§10.2　常数项级数的敛散性 …… 228
§10.3　幂级数及其运算 …… 232
§10.4　函数的幂级数展开 …… 236

§10.5 幂级数的应用举例…… 238
习题十…… 240
演示与实验十…… 241
实验习题十…… 243
数学家的故事…… 243

附录 MATHEMATICA 软件使用简介 …… 246
参考文献 …… 260

第一章　函　　数

函数概念是高等数学中最重要的概念之一，是客观世界中变量之间依存关系的反映，是许多科学技术中表达自然规律的基本概念．

§1.1　函数概念及特性

一、函数概念

1. 区间与邻域

区间是高等数学中使用较多的数集．设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 构成的数集称为开区间，记为 (a, b)；满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 构成的数集称为闭区间，记为 $[a, b]$；满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的一切实数 x 构成的数集称为半开区间，分别记为 $(a, b]$ 或 $[a, b)$，其中 a 和 b 叫做区间的端点，而 $b-a$ 叫做区间的长度．除了上述有限区间外，还有无限区间，即满足不等式

$$a\leqslant x<+\infty \text{或} -\infty<x\leqslant b$$

的一切实数 x 构成的数集称为无限区间，分别记为 $[a, +\infty)$ 或 $(-\infty, b]$；不等式 $-\infty<x<+\infty$ 表示全体实数，记为 $(-\infty, +\infty)$．

设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域，点 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径，此绝对值不等式也可记为：

$$a-\delta<x<a+\delta$$

所以，邻域也可以用开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 表示，即点 a 的 δ 邻域，就是以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间．

2. 函数概念

当我们观察各种自然现象时，常常会遇到各种不同的量．其中有的量保持一定的数值，这种量叫常量；还有一些量，可以取不同的数值，这种量叫变量．例如在一个自由落体运动中，重力加速度是不变的，是常量，而物体与地面之间的距离或者物体运动的速度都是变化的，是变量．常量常用 a、b、c 等表示，而变量常用 x、y、z 等表示．

在同一问题的过程中，往往同时有几个变量，并且它们之间不是孤立的，而是相互联系的，并遵循着一定的变化规律．如圆的面积 S 与圆的半径 r 是两个变量，它们之间存在着下列关系：

$$S=\pi r^2\ (\pi \text{是常量})$$

定义 1.1.1 设在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对于数集 D 中的每一个数 x，变量 y 按照某种法则总有确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，数集 D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量．

由上述定义可知，确定一个函数有两个要素，即定义域 D 与对应法则．y 是 x 的函数，常用 $y=f(x)$ 表示，如果对于自变量 x 的某一个值 $x_0\in D$，因变量 y 能有一个确定的值 y_0 与之对应，则说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义，也称 y_0 为函数在点 x_0 处的函数值，记为 $y_0=f(x_0)$，当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 E 称为函数的值域．

函数是由定义域和对应法则所确定的，因此，研究函数时必须注意它的定义域．在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数．这时我们约定：函数的定义域就是使算式有意义的自变量所取的一切实数值．例如：函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$．

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值都只有一个，这种函数叫单值函数，否则叫做多值函数．对于多值函数通常限制因变量 y 的范围使之成为单值，再进行研究．例如，反三角函数 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 是多值函数，如果把 y 限制在 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，就是单值函数，记为 $y=\arcsin x$．以后，凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数．

例 1 设函数 $f(x)=x^4+x^2+1$，求 $f(0)$、$f(t^2)$、$f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

解 $f(0)=0^4+0^2+1=1$，$f(t^2)=t^8+t^4+1$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{t}\right)^4+\left(\frac{1}{t}\right)^2+1=\frac{1+t^2+t^4}{t^4}$$

3．函数的表示法

函数有三种表示法：图形表示法，表格表示法，公式表示法．图形表示法优点是直观，一目了然；表格表示法的优点是可以直接查到表中所列出的函数值；公式表示法的优点是便于进行函数性态的研究．

在实际应用中，用公式法表示函数时，有时由于变量之间的函数关系较为复杂，需用几个式子表示，此时不能把它理解为是几个函数，而应该理解为由几个式子表示的一个函数．这样的函数称为分段函数．

例 2 函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x\,(x\geqslant 0)\\-x\,(x<0)\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$．

例 3 函数

$$f(x)=\begin{cases}2x+1\,(x\geqslant 0)\\x^2+4\,(x<0)\end{cases}$$

求 $f(-1)$、$f(1)$、$f(x-1)$.

解　$f(-1)=(-1)^2+4=5$　　$f(1)=2\times1+1=3$

$$f(x-1)=\begin{cases}2(x-1)+1 & (x-1\geqslant0)\\ (x-1)^2+4 & (x-1<0)\end{cases}$$

即　$$f(x-1)=\begin{cases}2x-1 & (x\geqslant1)\\ x^2-2x+5 & (x<1)\end{cases}$$

www.f28.com

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在一个正数 M，使得对于一切 $x\in(a,b)$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界，或称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的有界函数；否则便是无界．

例如函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，恒有 $|\sin x|\leqslant1$，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的．函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，而在区间 $(1,2)$ 内是有界的．

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的．

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调，则称区间 (a,b) 是函数 $f(x)$ 的单调区间．

3. 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 在 x 改变符号时，函数值不变，即

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数．如果满足

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数．

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

例如，$y=\cos x$ 及 $y=x^2$ 都是偶函数，而函数 $y=\sin x$ 及 $y=x^3$ 都是奇函数，但是函数 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$ 都既非偶函数又非奇函数．

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个不为零的常数 L，使得对于任一 $x\in D$，恒有

$$f(x+L)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，L 称为周期．通常，周期函数的周期是指最小正周期．

例如函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数．

三、反函数

如果两个变量间有确定的函数关系，则这两个变量哪一个做自变量，哪一个做函数并不是固定不变的，常根据研究的目的和实际需要来确定．

例如在函数关系 $V=\frac{c}{p}$（c 为常数）中，压力 p 为自变量，而体积 V 是 p 的函数，但如果把该式改写成 $p=\frac{c}{V}$，这时压力又可以看成是体积 V 的函数了，我们把 $p=\frac{c}{V}$ 叫做函数 $V=\frac{c}{p}$ 的反函数，当然 $V=\frac{c}{p}$ 也可以叫做函数 $p=\frac{c}{V}$ 的反函数．因此，反函数是相互的．

一般地，已知 y 是 x 的函数，即 $y=f(x)$，如果由 $y=f(x)$ 中解出 x，则把 x 看做 y 的函数，即：

$$x=\Phi(y)$$

它叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $f(x)$ 叫做直接函数．

但习惯上，总把自变量写成 x，函数写成 y，因此函数 $y=f(x)$ 的反函数又可写成：

$$y=\Phi(x)$$

例如在 $y=2x-3$ 的反函数 $x=\frac{1}{2}(y+3)$ 中，如果自变量仍用 x 表示，函数仍用 y 表示，则反函数即为 $y=\frac{1}{2}(x+3)$．

注意：直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\Phi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称．

关于反函数的例子很多，比如 $y=x^3$ 的反函数是 $y=\sqrt[3]{x}$，指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）的反函数是对数函数 $y=\log_a x$，三角函数 $y=\sin x$（$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$）的反函数是反三角函数 $y=\arcsin x$（$-1\leqslant x\leqslant1$）．

§1.2 初等函数

一、基本初等函数

基本初等函数是指以下五类函数：

幂函数 $y=x^\mu$ （μ 为任意实数）

指数函数 $y=a^x$ （$a>0$，$a\neq1$）

对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$，$a\neq1$）

三角函数 $y=\sin x$ $y=\cos x$

$y=\tan x$ $y=\cot x$

$y=\sec x$ $y=\csc x$

反三角函数 $y=\arcsin x$ $y=\arccos x$

$y=\arctan x$ $y=\operatorname{arccot} x$

这些函数在初等数学中已作过较详细的介绍．其图形和主要性质经常使用，需要我们熟悉．

二、复合函数

有些实际问题中，两个变量间的联系有时不是直接的，而是通过另一个变量来联系的．

例 1 设有质量为 m 的物体，以初速度 v_0 铅直向上抛出，求它的动能 E 和时间 t 的函数关系．

解 由物理学知 $E=\frac{1}{2}mv^2$，即动能 E 为速度 v 的函数．但速度又是时间 t 的函数．如果略去空气阻力，则有 $v=v_0-gt$，其中 g 是重力加速度．因此，有

$$E=\frac{1}{2}m\ (v_0-gt)^2$$

于是动能 E 通过 v 而成为 t 的函数，其中 t 是自变量，v 叫做中间变量，这样的函数 E 叫做自变量 t 的复合函数．

例 2 函数 $y=\sin^3 x$ 是由 $y=u^3$，$u=\sin x$ 所组成的复合函数．

例 3 函数 $y=e^{x^2}$ 是由 $y=e^u$ 及 $u=x^2$ 所组成的复合函数．

例 4 函数 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$ 可以看作由三个简单函数 $y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}$ 复合而成．

把一个复杂的函数分解为若干个简单函数的复合，这在今后实际运算中经常使用，应该十分重视．

三、初等函数

定义 1.2.1 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算与复合运算，并用一个解析式子表示的函数称为初等函数．

例如，$f\ (x)\ =\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$f\ (x)\ =x+\sin^3 x$ 等都是初等函数．

我们经常利用函数来描述现实对象的数量关系，这时称为函数模型．下面举几个例子．

例 5 指数增长模型：在稳定的理想状态下，生物学中细菌的繁殖按指数函数增长：

$$Q\ (t)\ =ae^{kt}\ (Q\ (t)\ \text{表示时间}\ t\,\text{min}\ \text{内细菌数})$$

假设在一定的培养条件下，开始（$t=0$）时有 2 000 个细菌，且 20min 后已增加到 6 000 个，试问 1h 后将有多少个细菌？

解 因为 $Q\ (0)\ =2\ 000$，所以 $a=2\ 000$，$Q\ (t)\ =2\ 000e^{kt}$

又 $t=20$ 时，$Q=6\ 000$，故有 $6\ 000=2\ 000e^{20k}$

所以 $e^{20k}=3$

$t=60$ 时，$Q(60)=2\,000e^{60k}=2\,000(3)^3=54\,000$

因此，1h 后细菌有 54 000 个．

例 6 Logistic 增长模型：当自然资源和环境条件对种群增长起着阻滞作用时，Logistic 曲线（图 1－1）是描述种群增长的相当准确的模型．设一农场的某种昆虫从现在（$t=0$）起到时间 t（周）后的数量为

$$P(t)=\frac{20}{2+3e^{-0.06t}}\ (\text{万})$$

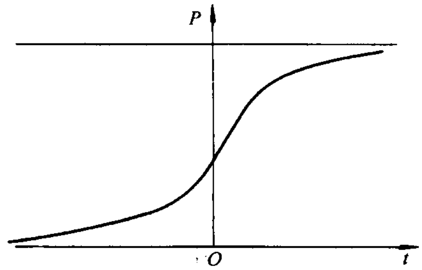

图 1－1

试求：(1) 现在（$t=0$），昆虫数量是多少？

(2) 50 周后，昆虫的数量是多少？

解 (1) 现在昆虫的数量为 $P(0)=\frac{20}{2+3}=4$（万）

(2) 50 周后，$P(50)=\frac{20}{2+3e^{-0.06(50)}}\approx 9.31$（万）

例 7 保本分析：某公司每天要支付一笔固定费用 300 元（用于房租与薪水等），它所出售的食品的生产费用为 1 元/kg，而销售价格 2 元/kg，试问它们的保本点为多少？即每天应当销售多少千克食品才能使公司的收支平衡？

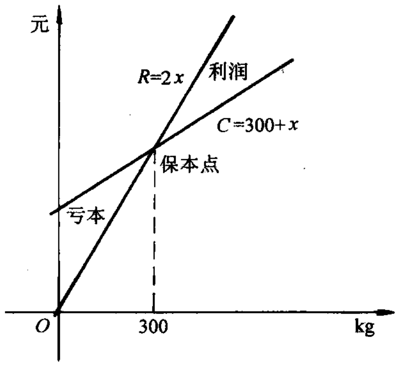

图 1－2

解 依题意，成本函数 $C(x)=(300+1\cdot x)$（元）

收益函数 $R(x)=2\cdot x$（元）

而利润函数 $P(x)=R(x)-C(x)$

$=2x-(300+x)$

令 $P(x)=0$，即 $2x=300+x$，则 $x=300$．

即每天必须销售 300kg 食品才能保本．

从图 1－2 看出，保本点为 (300，600)，当 $x>300$ 时，收益 R 超过成本 C，可以盈利；当 $x<300$ 时，成本 C 超过收益 R，产生亏本．

习 题 一

1．求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}$；　　(2) $y=\arcsin(x-3)$；

(3) $y=\frac{2x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；　　(4) $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$．

2．作出下列函数的图形，并指出其定义域：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+3 & 1<x<3\end{cases}$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ 2 & x\leqslant 0\end{cases}$．

3. 设 $f(x)=x^3-x$，计算 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

4. 设 $f(x)=x^2-x+1$，计算 $\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x & x<-1\\ 1 & x\geqslant -1\end{cases}$ 求：$f(-4)$、$f(2)$、$f(2-x)$.

6. 设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=\lg x$，求：$f[\varphi(x)]$、$f[f(x)]$、$\varphi[f(x)]$、$\varphi[\varphi(x)]$.

7. 指数衰减模型　设仪器由于长期磨损，使用 t 年后的价值是由下列函数确定：

$$Q(t)=Q_0e^{-0.04t}$$

使用 20 年后，仪器的价值为 8 986.58 元，试问当初此仪器的价值为多少？

8. Logistic 增长模型：在一个拥有 80 000 人的城镇里，在时刻 t 得感冒的人数为

$$N(t)=\frac{10\ 000}{1+9\ 999e^{-t}}$$

其中 t 是以天为单位，试求开始时感冒的人数，以及第四天感冒的人数.

9. 价格函数：设某种商品的价格函数是由

$$P=5\ 000\left(1-\frac{4}{4+e^{-0.002x}}\right)$$

确定的，其中 P 是商品价格，x 是需求数量．试求当需求数量 (1) $x=100$（单位）；(2) $x=500$（单位）时商品的价格.

10. 用水费用　某城市为节约用水，制定了如下收费方法：每户每月用水量不超过 4.5t 时，水费按 0.64 元/t 计算，超过部分每吨以 5 倍价格收费．试建立每月用水费用与用水数量之间的函数模型，并计算每月用水量分别为 3.5t、4.5t、5.5t、9t 的用水费用.

11. 保本分析：某公司生产糖果，每天生产 $x$kg 的成本为

$$C(x)=15x+400\ (\text{元})$$

$C(0)=400$ 元为固定成本.

(1) 若糖果的售价为 16 元/kg，问每天应销售多少千克才能保本？

(2) 若糖果售价提高为 19 元/kg，问其保本点是多少？

(3) 若每天至少能够销售 60kg，问每千克定价多少才能保证不亏本？

12. 国民生产总值（GNP）某个国家的国民生产总值在 1985 年是 1 000 亿元，1995 年是 1 800亿元，现假设 GNP 按指数函数增长，问这个国家在 2005 年的 GNP 是多少？

演示与实验一

这一节主要讲解使用计算机作函数图形的基本原理和步骤．计算机可以画出较复杂的函数图形和求解较复杂的问题，同时计算机作图也有一些局限性，应进行相应的预防和补救措施.

一、计算机作函数图形的基本原理

目前比较常用的数学软件都具有函数作图功能，例如：Mathematica，Matlab，Maple 等，这

些软件在函数作图方面操作命令不完全相同，不可能一一介绍，但它们也有共同特征，即：都需要输入函数表达式和函数作图的范围，由于计算机显示设备的限制，计算机只能显示函数图形在某个矩形范围内的部分．

如果选择 x 的范围是区间 $[a, b]$，选择 y 的范围是区间 $[c, d]$，那么只显示位于这个矩形区域内的函数图形，我们称这个矩形区为观察矩形区，一般记为

$$[a, b]\times[c, d]=\{(x, y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$$

有些作图软件要求完整地输入观察矩形区的数据，而有的软件只要求输入观察矩形区 x 的取值范围，它们能自动确定适当的 y 的取值范围．观察矩形区选择不当，有时会显示出一个不完整或使人产生误解的图形来，所以要作出正确的函数图形，在选择显示矩形范围时要格外注意．

计算机作图的基本方法很简单，和过去用的描点法差不多．计算机首先对区间 $[a, b]$ 里的一定数量的点（通常取区间的一些均分点）计算出函数值，并画出这些点 $(x, f(x))$，然后依 x 的大小顺次连接这些点就形成这条曲线（实质上是一条折线）．应该注意到，点 $(x, f(x))$ 可能不在观察矩形区内，而不画，这时，直线段的连接将跳过这一点，从而使图形产生一定的变形，有时甚至变形很严重．

二、计算机作函数图形的命令

数学软件 Mathematica 中的函数作图命令：

Plot [〈函数表达式〉，{〈自变量名〉，〈自变量最小值〉，〈自变量最大值〉}]

例如，要画定义在区间 $[-2, 2]$ 上的函数 $f(x)=x^2+2x-5\sin x$ 的图形，可用如下命令来实现：

Plot [x^2+2*x-5*Sin [x]，{x，-2，2}]

这时计算机将自动确定因变量的变化范围，使得每个点都能够在显示屏幕上画出．

假如要规定因变量的范围，则要用命令：

Plot [〈函数表达式〉，{〈自变量名〉，〈自变量最小值〉，〈自变量最大值〉}，PlotRange->{〈因变量最小值〉，〈因变量最大值〉}]

例如，画上面的函数图形时规定因变量的范围为 $[0, 5]$，则用命令：

Plot [x^2+2*x-5*Sin [x]，{x，-2，2}，PlotRange->{0，5}]

三、计算机作图举例

1. 画基本初等函数图形

观察下列函数图形：

In [1]：=Plot [Sin [x]，{x，-2Pi，2Pi}]

In [2]：=Plot [Tan [x]，{x，-10，10}]

In [3]：=Plot [Tan [x]，{x，-10，10}，PlotRange->{-5，5}]

In [4]：=Plot [Tan [x]，{x，-10，10}，PlotRange->{0，5}]

可以发现在绘图语句中加入可选项设定时，图形效果更好一些，并观察 $\tan x$ 的周期性、奇偶性．

In [5]：=Plot [x^3，{x，-5，5}]

In [6]：=Plot [1/x，{x，-20，20}]