算迪

三

算迪

(三)

何夢瑤撰

算迪卷四

直線體

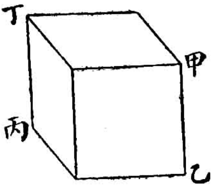
㊀如正方體每邊二尺。其積十六尺。今倍其積問得方邊若干。 曰二尺五寸一分餘。

法照開立方。

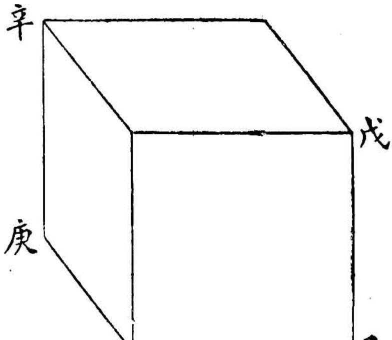
若將前積八倍之。問方邊。則答曰四尺。

法以原邊二尺倍之卽得。蓋此因兩體積之比例。比之兩界之比例。爲連比例隔二位相加之比例也。爲圖明之。

兩界邊四。比邊二。爲二比一。 兩積六十四。比三十二。與三十二比十六。又十六比八。與八比四。亦皆二比一之連比例。而六十四之比八。其間隔三十二與十六之兩位。故爲連比例隔二位相加



每邊二尺體積八尺



每邊四尺體積六十四尺

之比例也。

㈡如長方體長一尺二寸。闊八寸。高四寸。今將其積倍之。仍與原形爲同式形。問各邊。　曰長一尺五寸一分一釐餘。　闊一尺零七釐餘。　高五寸零三釐餘。

法任先求長以原長自乘再乘。（化元闊與高皆同於長矣。）得積一尺七百二十八寸。倍之得三尺四百五十六寸。問立方得今長數。乃以原長一尺二寸爲一率。比二率原闊八寸。若三率今長與四率今闊也。求高闊倣此。

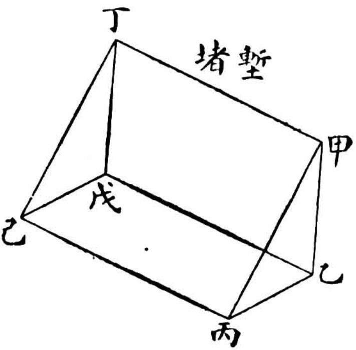
㈢若八倍前積問各邊。則但於原各邊加倍卽得。

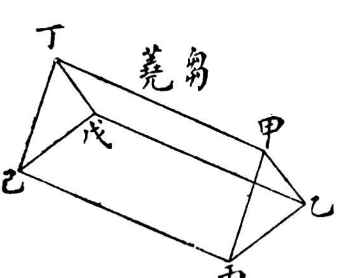
㈣如甲乙丙丁戊己塹堵形。闊五尺。（乙丙己戊。）　長十二尺。（丙己乙戊。）　高七尺。（甲乙丁戊。）

問積。　曰二百一十尺。

法以長乘闊。再乘高。得長方積。折半卽得。

芻甍體同。



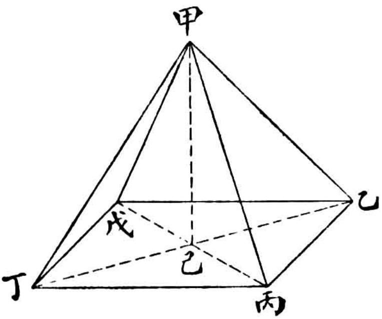


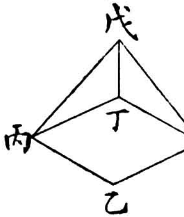
㊄如方底尖體形。舊名方錐。　底方五尺。自尖至四角之斜線皆六尺。問尖至底中之垂線長若干。　曰四尺八寸四分七釐六毫八絲弱。

法以底方乙丙五尺爲股。丙丁五尺爲句。求得乙丁斜弦七尺零七分一釐零六絲餘。折半得乙己三尺五寸三分五釐五毫三絲餘。又爲句。原斜線甲乙六尺爲弦。用句弦求股法。求得甲己中垂線。

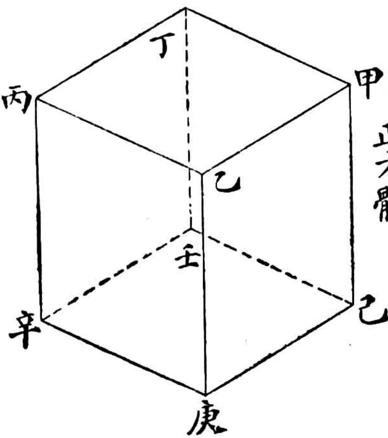
㊅又方底尖體形。底方六尺高三尺問積。　曰三十六尺。

法以底方自乘。得三十六尺。又以高三尺乘之。得扁方體。積一百零八





尖體



正方體

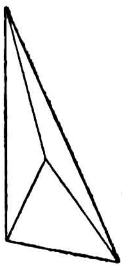
尺。三歸之得尖體積。試倍高得六尺。乘底積。則爲正方體。其積與六尖體等。則半之爲扁方體。其積必與三尖積等矣。所以然者。正方體以戊尖爲中心。戊心去上下四旁之心並如高三尺。上下四旁並如底六尺。由心出線至甲乙丙丁己庚辛壬八角。則成六个尖體。其高既等。底又等。則積必等。合六个尖體積。以成正方體。則半正方積之。爲三个尖體積。可知矣。

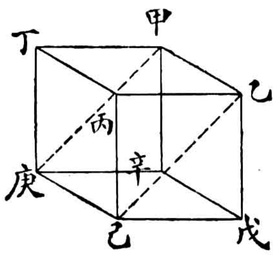
㊆如陽馬形。底方六尺。高同。問積。曰七十二尺。

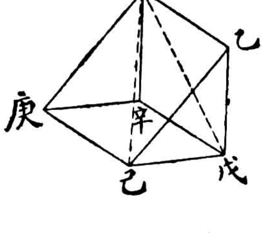
法以方邊六尺自乘再乘高。得二百一十六尺。三歸之。卽得蓋與上方底尖體形無異。彼尖居中。此尖在隅。形雖異而積同。皆得方體三分之一也。

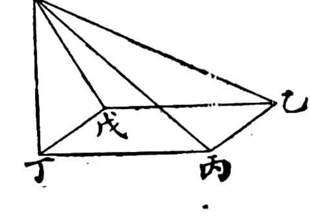
㊇如鼈臑形。底如句股。長如股。闊如句。俱六尺。高如之。問積。曰三十六尺。

法以長乘闊。再





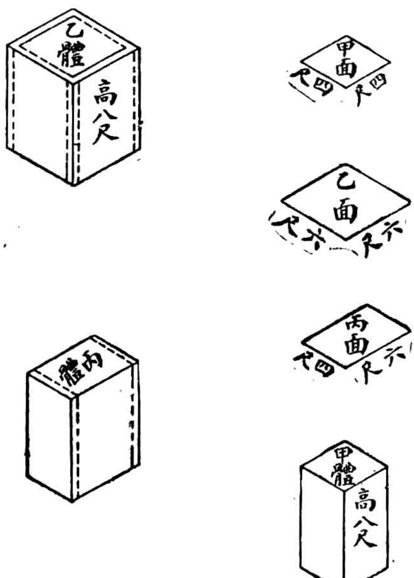




乘高。得二百一十六尺。六歸之。卽得。蓋此底卽前陽馬形之方底。剖去一半。而爲句股形底也。故六歸之 正方形積。平分之則爲堵塹與芻蕘積。三分之。則爲方尖底形與陽馬積。六分之則爲鼈臑積。試作甲乙丙丁戊己庚辛一正方體。從乙己甲庚作對角線。依線剖之。得塹堵形二。又以乙戊己甲辛庚塹堵形。作甲戊甲己線。依線剖之。則得甲戊己庚辛陽馬形一。甲乙戊己鼈臑形一。是一塹堵得三鼈臑也。一陽馬分兩鼈臑。 則兩塹堵合成正方非六鼈臑乎。

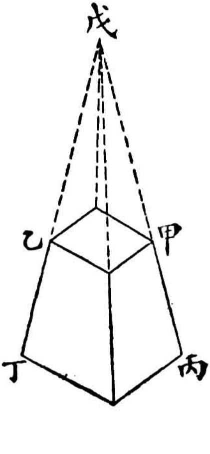
⑨如上下不等正方體形。卽方窖形。 上方每邊四尺。下方每邊六尺。高八尺。問積。 曰二百零二尺六百六十六寸餘。

法以上方四尺自乘。得一十六尺。如甲小方面積。又以下方六尺自乘。得三十六尺。如乙大方面積。又以上方四尺乘下方六尺。得二十四尺。如丙長方面積。併三數。得七十六尺。以高八尺乘之。得六百零八尺。成甲小方體積一。乙大方體積一。丙長方體積一。三歸之。



得積。所以然者。乙體從點線直剖去四旁廉及四隅。所餘中體。卽同甲體矣。丙體亦照點線。剖去兩旁廉。所餘中體亦同甲體矣。甲體四旁各加一塹堵形。（長四尺。闊一尺。高八尺。）四隅各加一陽馬形。（底方一尺。高八尺。）卽成前項上下不等正方體形。然則三箇甲體積各加四塹堵。（共十二塹堵。）各加四陽馬。（共十二陽馬。）卽成三个前項上下不等正方形。而六旁廉。非卽十二塹堵。四隅體。非卽十二个陽馬乎。故三歸而得積也。

又法。將前項上下不等正方體形。（甲乙丙丁。）變爲方底尖體形。（甲乙丙丁戊。）照方底尖體取積法。求得丙丁戊大尖體積二百八十八尺。又求得甲乙戊小尖體積八十五尺三百三十三寸。餘乃相減。餘卽其積也。　變形法以上方與下方相減。餘二尺。折半爲一率。高八尺爲二率。下方六尺折半爲三率。求四率。得戊尖至底心之高

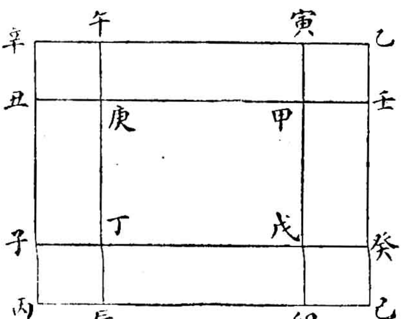


㊉如上下不等長方體形。上方長四尺。闊三尺。下方長八尺。闊六尺。高十尺。問積。　曰二百八十尺。

法以上長乘上闊。得十二尺。倍之得二十四尺。又以下長乘下闊。得四十八尺。倍之得九十六尺。又以上闊乘下長。得二十四尺。又以上長乘下闊。得二十四尺。併四數得一百六十八尺。以乘高十尺。得一千六百八十尺。六歸之。卽得。所以然者。戊丁上長。乘甲戊上闊。得甲戊丁庚長方面形。倍之爲二面。已

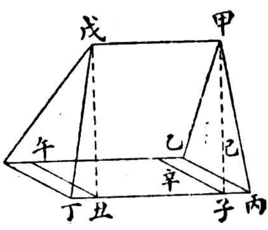
丙下長乘乙己下闊。得乙己丙辛長方面形。倍之爲二面。甲戊上闊。即壬癸。乘己丙即癸子。下長。得壬癸丑子長方面形。又甲庚上長。即寅午。乘乙己下闊。即寅卯。得寅卯午辰長方面形。併此六長方面積。以乘高十尺。得六長方體形。其上下方面爲甲戊庚丁者二。爲乙己丙辛者二。爲壬癸子丑者一。爲寅卯辰午者一。其二乙己丙辛長方體。比二甲戊丁庚體。多二壬戊。二戊辰。二庚子。二寅庚。共八旁廉體。又多二乙甲。二癸卯。二丁丙。二午丑。共八隅體。而壬癸子丑長方體。比甲戊丁庚長方體。多一壬戊。一庚子。共二旁廉體。又寅卯辰午長方體。比甲戊丁庚體。多一寅庚。一戊辰。共二旁廉體。若將所多之廉隅削去。則此六長方體之上下方面。皆如甲戊丁庚。乃以一旁廉體。變爲二塹堵體。一隅體。變爲三陽馬體。共得二十四塹堵體。二十四陽馬體。以加六長方體。皆成上下不等長方體。故以六歸而得之也。

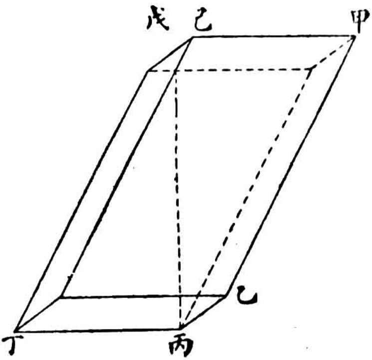
捷法。倍上長得八尺。加下長八尺。共十六尺。以乘上闊。得四十八尺。此即上法。以上長乘闊倍之。又以下長乘上闊也。又倍下長得十六尺。加上長四尺。共二十尺。以乘下闊。得一百二十尺。併兩數。以乘高。六歸之。又法。做前條又法算之。

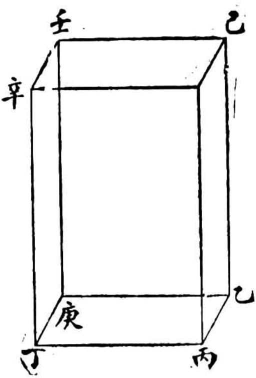


⑪如上下不等芻蕘體形。上長甲戊十尺。下長丙丁十四尺。下闊乙丙五尺。高十二尺。甲之垂線。問積。　曰三百八十尺。
法以上長甲戊即子丑。乘下闊。乙丙。得五十尺爲底。子辛午丑。以乘高甲之垂線。得六百尺。折半得三百尺。爲上下相等芻蕘體積。又以上長與下長相減。餘四尺。即丙子合丑丁。以乘下闊。爲底與高相乘。得二百四十尺。三歸之得八十尺。爲方底尖體積。合二積共三百八十尺。即是。

⑫如兩兩平行邊斜長方體形。底長丙丁二尺四寸。闊乙丙八寸。高戊丙。三尺七寸。問積。　曰七尺一百零四寸。
法以長丙丁乘闊乙丙。得乙丁底一尺九十二寸。以乘高戊丙。得七尺





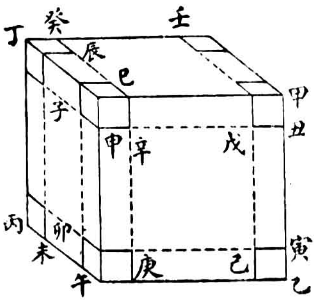


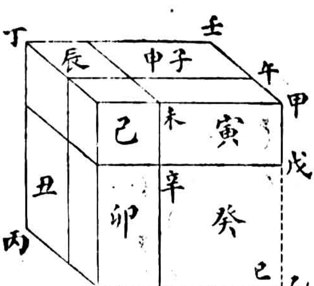
一百零四寸。為己乙丙丁午壬正長方體積也。凡彼此俱兩兩平行。而底積同高又同者。不論體之斜正皆同積。

(十三)如空心正方體厚二寸積一千二百一十六寸。問內外方邊。曰內方邊八寸外方邊一尺二寸。

法以厚二寸（甲丑）自乘再乘。得八寸。（為隅）八因之得六十四寸。（八隅）與共積一千二百一十六寸相減。餘（上下四方六旁廉體積）。一千一百五十二寸。六歸之得（一旁廉體積）。一百九十二寸。用厚二寸除之得（一旁廉面積）。九十六寸。為內方邊與外方邊相乘長方面積。（如壬癸之乘戊辛也）。乃以厚二寸倍之得四寸。（即丑戊加辛申）。為長闊之較（壬癸即辰己。闊也。丑申長也）。用帶縱較數開平方法算之得闊八寸。即內方邊。（如戊辛）。加四寸得一尺二寸。即外方邊也。（如甲乙）。蓋正方體去八隅所餘六廉。上下均如壬癸戊辛。前後均如丑寅卯子。左右均如辰己午未也。

又法倍厚二寸得四寸。自乘再乘得六十四寸。為隅體。己與積相減。餘一千一百五十二寸。為三方廉體。（子癸丑）。三長廉體。（辰寅卯）。三歸之得



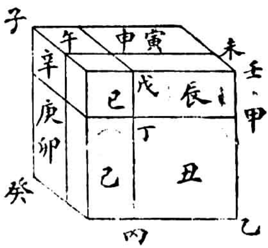


三百八十四寸。為一長方體積。一方廉合一長廉也。以厚四寸除之。得九十六寸。為長方面積。甲乙未庚。以內外方邊之較四寸。為長闊之較。用帶縱數開平方法算之。

⑭如大小兩正方體。大邊比小邊多四寸。積多二千三百六十八寸。問大小邊。　曰大邊十六尺。小邊十二尺。法同上條。又法蓋此之小方體。卽上條之空心方耳。

⑮如大小二正方體。共邊二十四尺。共積四千六百零八尺。問各邊各積。　曰小方邊八尺。積五百一十二尺。大方邊十六尺。積四千零九十六尺。

法以共邊壬乙二十四尺。自乘再乘。得一萬三千八百二十四尺。內減丑正方己隅方共積四千六百零八尺。餘九千二百一十六尺。三歸之。得三千零七十二尺。以共邊二十四尺除之。得一百二十八尺。為長方面積。乃以共邊二十四尺為長闊和。用帶縱和數開平方法算之。得闊八尺。卽小邊。而餘可知。



曲線體

㊀如甲乙丙丁長員體。徑與高皆七尺。問積。　曰二百六十九尺三百九十一寸五百六十九分弱。

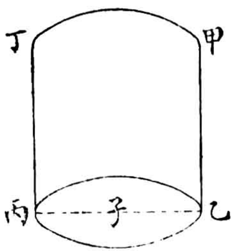
法以徑求得周。周徑各折半。相乘得平員面積。以高乘之。得長員體積。　或以半徑乘全周。再高乘。乃

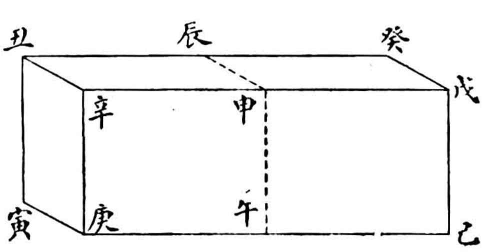
折半亦可。蓋乙丙員周引直。則變爲長方形之戊辛。與半徑乙子卽癸戊相乘。卽得癸辛同面積。折半得癸申平面積。卽爲乙丙平員面積。以癸申平面積。乘高甲乙。卽戊己。得癸午方體積。卽爲甲乙丙丁長員體積。乃正法也。若不折半。而用癸辛面積。以乘戊己高。得癸庚長方體積。與兩个甲乙丙丁長員體積等。爰折半以取實數。乃又法也。一而已矣。

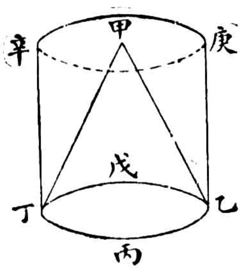
一法。用方員同根異積比例。以方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。長員體積〇七八五三九八一六爲二率。今徑自乘再乘高得三百四十三尺爲三率。求得四率。卽是。

㊁如甲乙丙丁戊尖員體。底徑丁乙六尺。中高甲己卽庚乙六尺求積。　曰五十六尺五百四十八寸六百六十七分七百三十六釐有餘。

法照上條。先求出庚乙辛丁長員體積。三歸之卽得。蓋長員體與尖員體徑同高同。則尖員體。必得長





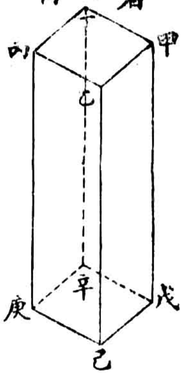


員體積三分之一也。以尖方體得正方體三分之一。例之。詳直線體篇第六條。可見矣。蓋凡底面平行體。如下圖。甲乙丙丁面與戊己庚辛底。甲至戊。乙至己。丙至庚。丁至辛。其度皆相等。謂之底面平行。與平底尖體。但底積同高又同。則不論是何面形。或方或三角或員皆然也。其尖體皆得底面平行體三分之一。如下圖。

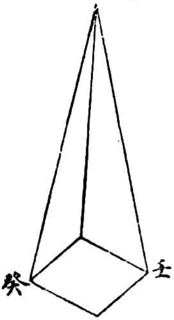
下二者。卽上二者之半。可相比例。蓋全與全若半與半也。

觀此則底之爲五角六角或多角以至於

二者底皆四角

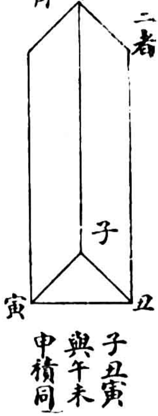


尖體得方體三分之一



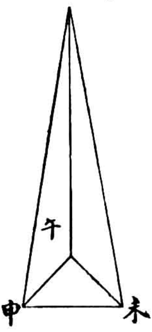
壬癸底與戊寅底積同

二者底皆三角



子丑寅與午未申積同

尖體得方體三分之一



員但積同。則底面平行體。與尖體其三與一之比例皆然可知矣。

又法。用方員同根異積比例。以尖方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇為一率。尖員體積〇七八五三九八一六三為二率。今徑自乘乘高三歸之為三率。求得四率。即是。

又捷法。以長方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇為一率。尖員體積〇二六一七九九三八八為一率。今徑自乘復乘高為三率。求得四率。即是。

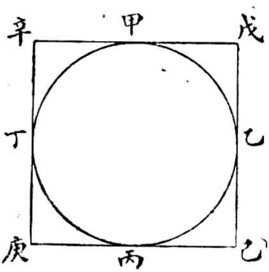
㊂如尖員體底周二十二尺。自尖至底周之斜線(甲乙等。)五尺。求中垂線。(甲己)

法以乙丙丁戊周。求出乙丁徑。折半得乙己為句。以斜線(甲乙)為弦。求得股。(甲己)即是。(借上圖。)

㊃如員球徑二尺。問外面積。(外皮之面積也。) 曰一十二尺五十六寸六十三分七十釐有餘。

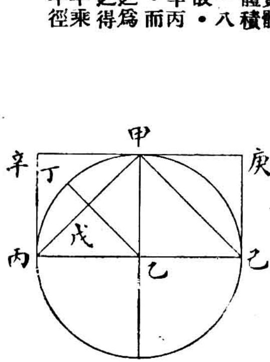
法以徑二尺求得周六尺二寸八分三釐一毫八絲五忽有餘。與徑二尺(即高)相乘。為戊己庚辛長員體外面積。即甲乙丙丁員球外面積也。(詳下第五條。) 又平員半徑與員球半徑等者。平員面積得員球皮面積四分之一。(亦詳下第五條。) 故平員面求積。以周徑相乘。四歸得積。

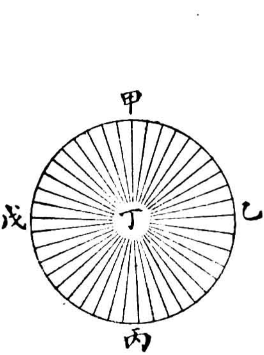
㊄如員球徑一尺二寸。問積。 曰九百零四寸七百七十八分六百八十二釐有餘。

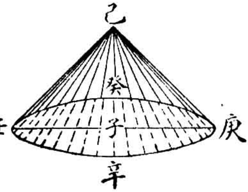


法以徑求出面積。復以徑爲高乘之。得戊己辛庚長員體積。三歸而二因之。卽得甲乙丙丁球積。借上圖。蓋球體積得長員體積三分之二也。下文尖員體。高等球半徑。底等球皮積。其體積與球積等。則尖員體高等球半徑。底等球皮積四分之一。其體積必爲球積四分之一。尖員體高等球全徑。底等球皮積四分之一。其體積必爲球積二分之一矣。夫尖員體原得長員體三分之一。加倍成球體。豈非得長員體三分之二乎。○愚按球體積。得長員體積三分之二。恐不然。如庚己丙辛半長員體。己丙徑二尺。則周爲六二八三一八五。周徑各折半。相乘得員面積三一四一五九二六。以庚己高一尺乘之。如故。三歸之。得甲己丙尖員體積一零四七一九七五。夫甲己丙半球體。既爲庚己辛丙半長體三分之二。則是甲己丙尖員體。與甲丙及甲己弧矢體積皆三分之一也。而此弧矢體積不及尖員體積一五。何者。試以員面積三一四一五九二六。分之爲四。得甲乙丙丁形面積七八五三九八。又以半徑甲乙乘乙丙。得一尺。半之得甲乙丙三角形面積五。二積相減餘甲丁丙弧矢面積二八五三九八。以周折半乘之。止得八九六六。不及尖員體積一五。況乙戊半徑所作內周。又小於乙丙半徑所作外周。今但以外周乘之尚不及。若以內外周倂相乘之。益不及矣。故恐不然也。

又法。先求球外面積。法如上條。以爲己庚辛壬癸尖員體之庚辛壬癸底。以員球半徑甲丁六寸。爲尖員體之己子高。高與底相乘。得長員體積。三歸之。得尖員體積。詳上第二條。卽員球體積也。何則。球體外面積。與尖員體之底積等。而球之半徑。又與尖員體之高等。則二體之積必等。試將







甲乙丙戊員球體分爲千萬尖體。又將己庚辛壬癸尖員體亦分爲千萬尖體。則二體所分之尖體每一分必相等。蓋同底。尖員體之底積既與球體外面積等。則各分爲尖體之底。亦必等也。同高。己子等甲子也。必同積也。或問員球所分各尖體。皆以半徑爲高。而尖員體所分各尖體惟中央正立一尖體高與員球半徑等。其餘皆斜立而漸長。何云同高。曰幾何原本謂凡兩平行線。如下圖甲己乙辛二線。己至辛甲至乙相等。爲平行。內同底所成之四邊形。一爲丁丙乙甲。一爲己丙乙戊。皆以丙乙爲底。

其面積必等。如下圖甲乙戊三角形與丁丙己三角形爲同式。各減去同用之戊丁庚。則所餘甲乙庚丁及戊庚丙己二形必相等。又各加入同用之庚乙丙。是丁丙乙甲正方固與己丙乙戊斜方等矣。方形既等。則丁丙乙與戊乙丙兩三角形亦必等。蓋三角形得方形一半。全與全若半與半也。又面與面之比例。同於體與體之比例。則正立尖體亦必與斜立尖體等積。可知矣。

又法用同積異根之定率比例。以球徑一○○○○○○○○爲一率。正方邊○八○五九九五九七爲二率。今設徑爲三率。求得四率。爲與員球等積之正方邊。自乘再乘得積。

又法用同根異積之定率比例。以方積一○○○○○○○○爲一率。球積五二三五九八七七五爲二率。今徑自乘再乘爲三率。求得四率。卽是。

或問甲乙丙丁球。以全徑乘全周得外面積。卽爲戊己庚辛長員體外面積。見第四條。是乃長平方面