

# ADINA

## 流体与流固耦合 功能的高级应用

岳戈 等 编著



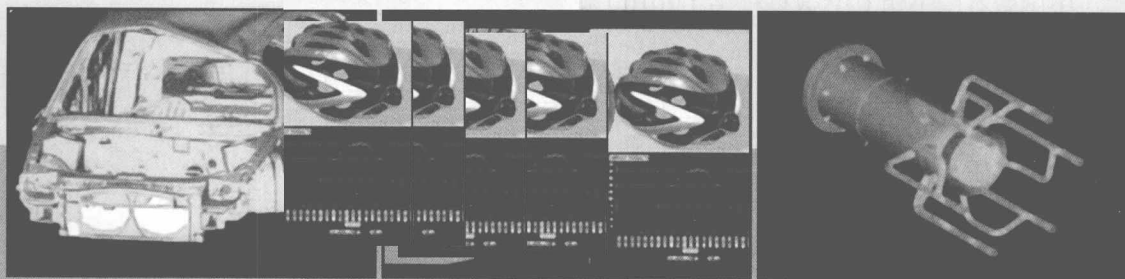
人民交通出版社

China Communications Press

# ADINA

## 流体与流固耦合 功能的高级应用

岳戈\梁宇白\陈晨\马野\编著



人民交通出版社

China Communications Press

## 内 容 提 要

本书以 ADINA 流体及流固模块为主,详细介绍了 ADINA 的使用操作方法和基本理论,包括界面、几何模型、有限元模型、分析类型、后处理、命令流等方面的系统讲解,并设计了 14 道流体及流固耦合的例题,涵盖了流体及流固耦合部分的主要技术功能,实用性强是本书最大的特点。

本书适合高校及科研院所工科专业方向人员在使用 ADINA 软件过程中参考使用。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

ADINA 流体与流固耦合功能的高级应用 / 岳戈等编著.

—北京: 人民交通出版社, 2010.2

ISBN 978-7-114-08230-6

I. A… II. 岳… III. 流体力学: 工程力学—应用软件,  
ADINA IV. TB126-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 021471 号

书 名: ADINA 流体与流固耦合功能的高级应用

著 作 者: 岳 戈 梁宇白 陈 晨 马 野

责任编辑: 高 培

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011) 北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网 址: <http://www.ccpress.com.cn>

销售电话: (010) 59757969, 59757973

总 经 销: 北京中交盛世书刊有限公司

印 刷: 北京交通印务实业公司

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 18.75

字 数: 444千

版 次: 2010年2月 第1版

印 次: 2010年2月 第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-08230-6

定 价: 38.00元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

# 序 Xu

对于某些工作在流体介质中的产品,内外流场特性是产品设计的重要考量,关系到产品实际响应、最终性能和工作可靠性。计算流体动力学(CFD)能够使设计人员在虚拟流场网格中观测流场的存在及其流动特性。因此当下的计算流体动力学应用已经非常广泛,并已经为科学研究和工程设计提供着有力的参考。

在产品实际工作过程中,产品结构的表面与周围流体介质通常存在或强或弱的相互作用,这种作用称为流固耦合作用。强流固耦合作用是指结构在流体介质作用下会产生变形或运动,结构的变形或运动又反过来影响流场形态从而改变流动状态,这种相互作用在不同的物理条件下、沿着时间的循序将产生多种形态各异的流固耦合响应,这是产品的实际响应,是流体介质与结构共同构成的系统响应的一部分或者全部。

相对于纯粹的计算流体动力学模拟,模拟流固耦合现象需要面对由流体—固体(结构)共同构成的系统。目前一些功能强大的商业软件已经提出了自己的流固耦合模拟方法,其中包括著名的 ADINA 软件系统。ADINA 软件提供了完善严谨的耦合方程求解方法以及流固界面网格处理技术、动网格划分技术、结构非线性分析技术、复杂流场模拟等各种技术手段,使得 ADINA 能够求解各种工程流固耦合问题。本书所展示的各种实际问题的模拟及其结果,将对不同领域的研究人员和工程设计人员提供重要的、切实的启发和帮助。

葛孝月

2009 年 11 月

# 目录 *Mulu*

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| 第一章 计算流体力学概述.....                  | 1  |
| 1.1 计算流体力学概述 .....                 | 1  |
| 1.2 基本概念 .....                     | 1  |
| 1.3 流体力学方程组 .....                  | 4  |
| 第二章 偏微分方程的数值解法.....                | 8  |
| 2.1 有限差分法 .....                    | 8  |
| 2.2 有限体积法 .....                    | 8  |
| 2.3 有限元法.....                      | 10 |
| 2.4 FCBI 和 FCBI-C .....            | 13 |
| 2.5 对时间项的积分.....                   | 13 |
| 2.6 自动时间步长.....                    | 14 |
| 2.7 Courant 数 .....                | 14 |
| 第三章 初始条件和边界条件 .....                | 16 |
| 3.1 初始条件.....                      | 16 |
| 3.2 边界条件.....                      | 16 |
| 3.3 高速可压缩流体的边界条件.....              | 28 |
| 第四章 材料 .....                       | 36 |
| 4.1 流体模型的分类.....                   | 36 |
| 4.2 湍流模型.....                      | 37 |
| 4.3 ADINA-CFD 的材料表 .....           | 40 |
| 第五章 单元 .....                       | 48 |
| 5.1 边界线单元.....                     | 48 |
| 5.2 二维三角单元(3-节点) .....             | 48 |
| 5.3 二维四边形单元(9-节点) .....            | 48 |
| 5.4 二维三角形单元(6-节点) .....            | 48 |
| 5.5 三维四面体单元(4-节点) .....            | 49 |
| 5.6 三维六面体(砖块)单元(27-节点) .....       | 49 |
| 5.7 二维 FCBI 单元(3 或 4-节点) .....     | 49 |
| 5.8 三维 FCBI 单元(8、4、6 或 5-节点) ..... | 49 |

|             |                                      |            |
|-------------|--------------------------------------|------------|
| 5.9         | FCBI-C 单元 .....                      | 52         |
| 5.10        | 求解器 .....                            | 52         |
| 5.11        | 流体单元的划分技术 .....                      | 54         |
| 5.12        | FCBI-C 单元、FCBI 单元与非 FCBI 单元的选择 ..... | 55         |
| <b>第六章</b>  | <b>流固耦合 .....</b>                    | <b>57</b>  |
| 6.1         | 理论 .....                             | 58         |
| 6.2         | 迭代法求解双向耦合(迭代耦合) .....                | 61         |
| 6.3         | 直接计算双向耦合(直接耦合) .....                 | 62         |
| 6.4         | 直接计算法求解单向耦合 .....                    | 63         |
| 6.5         | 间接方法计算单向耦合 .....                     | 63         |
| 6.6         | 流固耦合界面上的单元 .....                     | 64         |
| 6.7         | 模型的准备和测试 .....                       | 67         |
| 6.8         | 常见错误信息 .....                         | 69         |
| <b>第七章</b>  | <b>特殊类型的例题 .....</b>                 | <b>75</b>  |
| 7.1         | VOF 方法 .....                         | 75         |
| 7.2         | 质量传递 .....                           | 77         |
| 7.3         | 热量传递问题 .....                         | 78         |
| <b>第八章</b>  | <b>势流体 .....</b>                     | <b>80</b>  |
| <b>第九章</b>  | <b>实例详解 .....</b>                    | <b>81</b>  |
| 实例 1        | 汽车空气阻力计算 .....                       | 81         |
| 实例 2        | 波浪模拟中关于波高衰减问题的处理 .....               | 91         |
| 实例 3        | 激波模拟 .....                           | 100        |
| 实例 4        | 流固耦合频域计算 .....                       | 112        |
| 实例 5        | 导入 Nastran 网格进行流固耦合计算 .....          | 122        |
| 实例 6        | 汽车 ABS 系统的流固耦合模拟 .....               | 130        |
| 实例 7        | 高速飞行机翼的流固耦合模拟 .....                  | 146        |
| 实例 8        | 带有多孔介质的流固耦合模拟 .....                  | 165        |
| 实例 9        | 隔膜泵的模拟 .....                         | 179        |
| 实例 10       | 预应力膜结构的流固耦合模拟 .....                  | 196        |
| 实例 11       | 水流冲击导致管道振动问题的模拟 .....                | 213        |
| 实例 12       | 两车交会过程中气流导致车体振动问题的模拟 .....           | 232        |
| 实例 13       | 热水管冷却问题模拟 .....                      | 256        |
| 实例 14       | 往复式压缩机模拟 .....                       | 277        |
| <b>参考文献</b> | <b>.....</b>                         | <b>292</b> |



# 第一章 计算流体力学概述

## 1.1 计算流体力学概述

计算流体力学(Computational Fluid Dynamics, 简称 CFD)是以计算机作为模拟手段,运用一定的计算技术寻求流体力学各种复杂问题的离散化数值解的计算方法。

计算流体力学可以看作是对基本守恒方程(质量守恒方程、动量守恒方程、能量守恒方程)控制下的流动过程进行数值模拟。通过这种数值模拟,可以得到极其复杂流场内的各个位置上的基本物理量(如速度、压力、温度、浓度等)分布,以及这些物理量随时间的变化情况。

计算流体力学、理论流体力学和实验流体力学是流体力学研究的三种主要手段。理论分析具有普遍性,各种影响因素清晰可见,为实验和计算研究提供依据。但对于非线性情况,只有少数问题能给出解析解。实验研究是研究工作的基石,数值研究的许多方面都密切依赖于实验研究提供数据:计算结果需由实验验证;观察实验现象,分析实验数据,以建立计算模型等等。数值模拟是特殊意义下的实验,也称数值实验,它比起实验研究,经济效益极为显著。所以,三种手段既互相独立又相辅相成。

近年来,由于实际工程设计对于流体计算提出了越来越高的要求,计算流体力学正在明显地突破传统的单纯流体的观念。各种涉及复杂物理现象的流体问题求解方法是计算流体力学发展的主要趋势,这些复杂现象涉及热传递、多物质流动、相变、流固耦合体系求解、变边界(变流动区域)以及湍流模拟等。

从工程角度看,流体力学研究的起因通常是基于对各种工程结构的设计需要,例如分析飞机机翼在气流作用下随机摆动问题的目的,是要求流场计算结果对机翼的非稳态振动、强度特性提出明确的力学设计指标。因此,对于相当多的流体计算问题,实际上需要知道的是一个耦合力学系统的响应特性——流固耦合体系特性,尽管这是一个更为复杂的计算体系。流固耦合(Fluid-Structure Interaction, 简称 FSI)计算方法的开发和应用是目前工程计算流体力学发展的重点领域,也是计算流体力学指导工程设计的直接途径。

计算流体力学的发展和计算机硬件求解能力、工程设计需求的高速增长密切相关,可以肯定地说,计算流体力学在未来的研究领域和工程领域,都会越来越走向实用化,越来越发挥不可或缺的作用。

## 1.2 基本概念

流体是气体和液体的总称。在人们的生活和生产活动中随时随地都会遇到流体,大气和水就是最常见的两种流体。

### 1.2.1 黏性流体和理想流体

流体在静止时虽不能承受切向力,但在运动时,任意相邻两层流体之间却是有相互抵抗的作用力的,这种相互抵抗的作用力称为剪切力,流体所具有的这种抵抗两层流体相对滑动速度的性质称为流体的黏性。黏性是流体的固有属性之一,不论流体处于静止状态还是流动状态,都具有黏性,它是流体状态(压力、温度、组成)的函数。气体的黏性随温度的升高而增大,液体的黏性随温度的升高而减小。

自然界中存在的流体都具有黏性,具有黏性的流体统称为黏性流体。完全没有黏性的流体称为理想流体。自然界中并不存在真正的理想流体,它只是为便于处理某些流动问题所做的假设而已。

### 1.2.2 牛顿流体和非牛顿流体

牛顿内摩擦定律:

$$\tau = \mu \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta n} = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$$

式中: $\tau$ ——流体内摩擦应力;

$\Delta n$ ——法线方向的距离增量;

$\Delta u$ ——对应于  $\Delta n$  的流体速度增量。

牛顿内摩擦定律表示流体内摩擦应力与单位距离上的两层流体间的相对速度成正比。比例系数  $\mu$  称为流体的动力黏度,简称黏度。

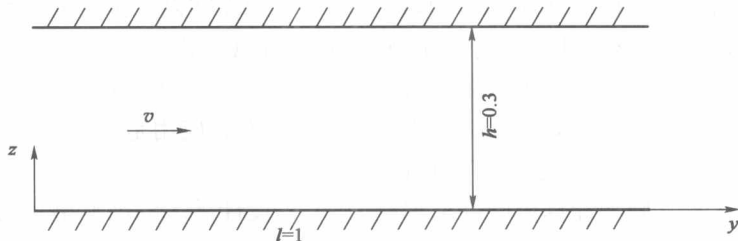
牛顿流体—— $\mu$  为常数的流体,即遵循牛顿内摩擦定律的流体称为牛顿流体。

非牛顿流体——不符合上述条件的均称为非牛顿流体。

所有气体和大多数低分子量液体均属牛顿型流体,如水、空气等;而某些高分子溶液、油漆、血液等则属于非牛顿流体。

下面用一个简单的例子来说明牛顿流体和非牛顿流体的差别。

分别考虑两个平行板间的牛顿流体和非牛顿流体,如下图所示,给出流体速度大小为 10m/s。



#### (1) 牛顿流体

流体参数为常参数模型,密度为  $1\text{kg/m}^3$ ,黏度为  $0.04\text{N/m}^2 \cdot \text{s}$ 。查看流场中纵坐标为 0.3m处的节点的速度大小,如本页上图所示。

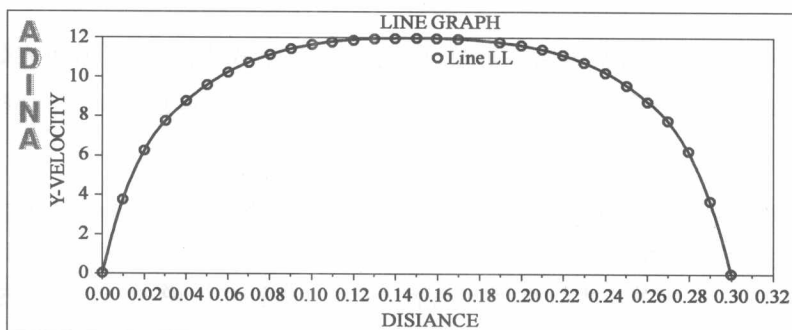
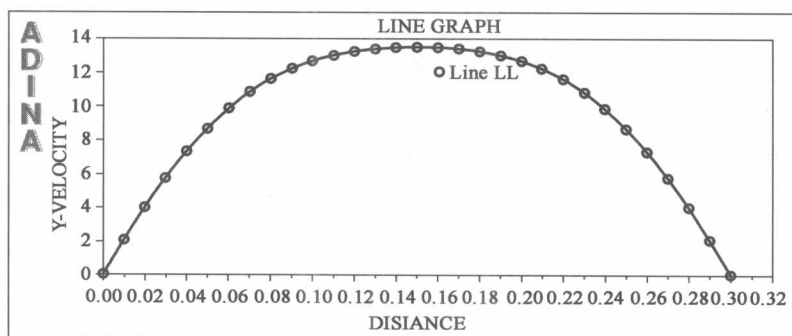
#### (2) 非牛顿流体

非牛顿流体模型和牛顿流体模型的差别在于材料的定义。这里非牛顿流体使用 Power



Law 模型。流体参数:密度为  $1\text{kg/m}^3$ , 材料本构方程中黏度项常数  $\mu_0=0.04$ ,  $A=1$ ,  $n=-0.75$ 。

查看非牛顿流体模型的计算结果,仍然画相同位置的速度图像,如本页下图所示,可以看出,非牛顿流体的速度增长较牛顿流体稍缓一些。



### 1.2.3 可压缩流体和不可压缩流体

根据密度  $\rho$  是否为常数,流体分为可压缩流体(Compressible)与不可压缩流体(Incompressible)两大类。在温度不变的情况下,当密度  $\rho$  为常数时,流体为不可压缩流体,否则为可压缩流体。一般情况下,空气为可压缩流体,水为不可压缩流体。

水的可压缩性是很小的,压强每增加一个大气压,其体积变化不到万分之一。工程中常用的其他工作液体,如液压油、机械油等,其体积模量数值也都很大,在一般工程计算中,可以忽略其可压缩性,将其看作是不可压缩流体。

气体的可压缩性与液体相比则大很多,因此在研究气流场的时候,当流速较低( $<0.3$  马赫)时可以认为是不可压缩流体;但是,当流速较高时需要考虑压强对气体密度的影响,甚至温度、压强对体积和密度的影响都必须考虑。

### 1.2.4 定常与非定常流动

根据流体的物理量(如速度、压力、温度等)是否随时间变化,将流动分为定常(steady)与非定常(unsteady)两大类。当流动的物理量不随时间变化时,为定常流动,又称稳态流动;当流动的物理量随时间变化时,为非定常流动,又称非稳态流动或瞬态流动。

### 1.2.5 层流和湍流

自然界中,流体流动状态主要分为两种形式——层流和湍流。在平行管的流动试验中,从流动质点的运动状态看,当仅发生层流时,流体质点互不干扰,流体流动呈线性或层状,且平行于管道轴线;当湍流(又称紊流)发生后,质点运动杂乱无章,除了平行于管道轴线的运动以外,还存在着剧烈的横向运动。

层流和湍流是两种不同性质的流态。层流时,流体流速较低,质点受黏性制约,不能随意运动,黏性力起主导作用;湍流时,液体流速较高,黏性的制约作用减弱,惯性力起主导作用。液体流动时,究竟是层流还是湍流,通常要用雷诺数来判定。

雷诺数(Reynolds)是表征流体流动特性的一个重要参数,它是由管内的平均流速  $u$ 、液体的运动黏度  $\nu$ 、管径  $d$  三个参数决定的,即  $Re = \frac{ud}{\nu}$ 。由于运动黏度  $\nu$  与动力黏度  $\mu$  的关系,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ,  $\rho$  为密度,故雷诺数又可以表示为  $Re = \frac{\rho ud}{\mu}$ 。层流向湍流的过渡发生在雷诺数约等于 2300,即临界雷诺数的时候。当流体实际流动时的雷诺数小于临界雷诺数时为层流,反之则为湍流。

对于非圆形截面管道来说,做简单等效,可用  $R$  代替上式中的  $d$ ,  $R$  为通流截面的水力半径,它等于液流的有效截面积  $A$  和它的湿周  $\chi$  (通流截面上与液体接触的固体壁面的周长)之比,即  $R = \frac{A}{\chi}$ 。

ADINA 计算结果中给出的雷诺数是单元雷诺数的概念,公式中长度  $d$  表示的是单元的长度。不同位置上的雷诺数与当地的流速以及单元长度有关。

关于层流和湍流的区别,可用典型的后台阶流动模型进行说明,这部分内容请参考第四章。

## 1.3 流体力学方程组

流体流动满足三个基本方程:

(1)质量守恒方程。它反映的是物质不生不灭这一最自然的物理定律,主要用以描述流体密度  $\rho$  的变化规律。它不需要补充任何其他关系式,也就是说,质量守恒方程是物质不生不灭的最直观的体现,方程的形式十分简单。质量守恒方程也称连续性方程。

(2)动量守恒方程。它反映的是牛顿定律,即物体在力的作用下做加速运动。具体说,物体所受的合力等于其质量与加速度的乘积,也可以理解为流体微团所受的力等于其动量变化率。因此,只要能求出合力,便可以得到动量守恒方程。合力包括体积力和面积力。体积力可以是多相物质的相互作用力、远程力(如重力与电磁力)和惯性力。面积力主要是压力和黏性应力。

(3)能量守恒方程。能量守恒属于经典的热力学定律。流体微团单位质量的能量即总能  $E$  包括内能  $e$  与动能  $\frac{1}{2}V \cdot V$ 。合力所做的功、热传导、(由化学反应等引起的)生成热都能引起总能的变化。

## 1.3.1 预备知识

流体速度  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , 其中  $u_1, u_2, u_3$  分别表示  $x, y, z$  方向上的速度分量。 $\rho$  是密度,  $P$  是压强,  $T$  是热力学温度。

若有过点  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  的面积微元  $dS$ , 单位法向量为  $\mathbf{n}$ 。

在  $[t, t+dt]$  内沿  $\mathbf{n}$  方向流过  $dS$  的流体体积为  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt$

在  $[t, t+dt]$  内沿  $\mathbf{n}$  方向流过  $dS$  的流体质量为  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt$

在  $[t, t+dt]$  内沿  $\mathbf{n}$  方向流过  $dS$  的流体动量为  $\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS dt = \rho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{n} dS dt$

其中

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3^2 \end{bmatrix}$$

面积微元  $dS$  受到  $\mathbf{n}$  正向一侧的流体压力为  $-p \mathbf{n} dS$  (压力方向与法线方向相反)

热力学中, 有状态方程

$$p = f(\rho, T) \quad (1.1)$$

若  $P = \rho RT$ , 则为理想气体。

用  $e$  表示单位质量流体的内能, 单位体积中流体的能量为  $\rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2$ , 其中  $\mathbf{u}^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ 。

在  $[t, t+dt]$  内沿  $\mathbf{n}$  方向流过  $dS$  的流体能量为  $(\rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt$

## 1.3.2 理想流体力学方程组

## (1) 质量守恒方程

质量守恒定律表述为: 单位时间内流体微元中质量的增量, 等于同一时间间隔内流入该微元的净质量, 即:

$$\int_{\Omega} \rho(t_2, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho(t_1, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt \quad (1.2)$$

式中  $\Gamma$  为区域  $\Omega$  的边界。

质量守恒方程的微分形式为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.3)$$

$\operatorname{div}$  表示散度,  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ 。质量守恒方程又称为连续性方程。

## (2) 动量守恒方程

动量守恒定律表述为: 单位时间内流体微元中动量的增量, 等于同一时间间隔内流入该微元的动量与外力冲量的和, 外力包括作用在边界  $\Gamma$  上的表面力和作用在区域  $\Omega$  上的体积力  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ 。

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u}(t_2, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}(t_1, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \rho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} p \mathbf{n} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} d\mathbf{x} dt \quad (1.4)$$

动量守恒方程的微分形式为:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) = \rho \mathbf{F} \quad (1.5)$$

写成分量形式,并利用连续性方程化简得:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i, i=1,2,3 \quad (1.6)$$

或者写成:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \mathbf{F} \quad (1.7)$$

其中,  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ , 表示固定流体质点对  $t$  的导数。

### (3) 能量守恒方程

能量守恒定律描述为:单位时间内流体微元中能量的增量,等于同一时间间隔内流入该微元的能量与外力做功的和。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) (t_2, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) (t_1, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

将能量守恒方程化为微分形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \text{div} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + p \right) \mathbf{u} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad (1.9)$$

利用连续性方程化简得:

$$\frac{de}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1.10)$$

式(1.1)式(1.3)式(1.7)式(1.10)构成了理想流体力学的基本方程组。

### 1.3.3 黏性流体力学方程组

自然界中并不存在真正的理想流体,对于黏性系数为  $\mu$  (动力学黏性系数,又称第一黏性系数)的流体,它的基本方程组为:

质量守恒方程不变,即:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.11)$$

动量守恒方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{P}) = \rho \mathbf{F} \quad (1.12)$$

其中  $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$ ,

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \text{div} \mathbf{u} \delta_{ij} \right) + \mu' \text{div} \mathbf{u} \delta_{ij},$$

$\mu' = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ , 称为膨胀黏性系数,又称第二黏性系数。

能量守恒方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \text{div} \left[ \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \mathbf{u} - p \mathbf{u} \right] = \text{div}(\kappa \text{grad} T) + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad (1.13)$$

其中  $\kappa$  为热传导系数。

式(1.1)、式(1.11)、式(1.12)、式(1.13)构成了黏性流体力学方程组。

对于不可压的黏性流体,密度  $\rho$  为常数,取  $\rho \equiv 1$ ,则有:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.14)$$

方程(2.2)变为:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \mu \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i, i=1,2,3 \quad (1.15)$$

方程(1.14)(1.15)即为三维不可压的黏性流体的 Navier-Stokes 方程,简称 N-S 方程。

## 第二章 偏微分方程的数值解法

在计算流体力学中,研究流体运动规律的手段是采用数值计算方法,求解描述流体运动基本规律的数学方程,以数值模拟的结果为依据研究流体运动的物理特征。数值计算方法是计算流体力学的基础。本章介绍目前应用比较广泛的计算方法:有限差分方法、有限体积法和有限元法。此外,还简单介绍 ADINA 开发的 FCBI 和 FCBI-C 单元算法,具体内容参考第五章。

### 2.1 有限差分法

有限差分法是数值求解偏微分方程最经典的方法。它是在求解域内,以差分网格或差分节点将连续的求解域化为有限的离散点集。然后将偏微分方程中的导数项用差商代替,推导出含有离散点上有限个未知数的代数方程组。求出代数方程的解,即为偏微分方程的数值解。

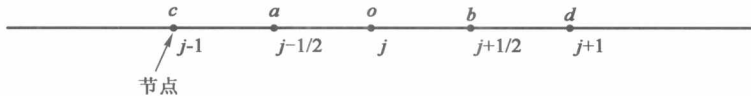
由于 ADINA 是基于有限体积和有限元方法的系统,所以这里对有限差分法不再做详细介绍。

### 2.2 有限体积法

有限体积法又称控制体积法。其基本思路是:将计算区域划分为一系列不重复的控制体积,并使每个网格点周围有一个控制体积;将待解的微分方程对每一个控制体积积分,便得出一组离散方程,其中的未知数是网格点上的因变量的数值。为了求出控制体积的积分,必须假定值在网格点之间的变化规律。

我们把节点看成是控制体积的代表,一个小的控制体积上的物理量定义并存储在该节点上。小的控制体可以是线段(一维)、正方形(二维)或正方体(三维)

一维:积分时,对以  $o$  点为中心的小控制体积, $a$  点的值用  $c$  点和  $o$  点的平均值来代替。



二维:在面积分时,最简单的方法是取界面中心点的值为其平均值。如下页左图所示,对于以  $o$  点为几何中心的小控制体,取  $de$  边中点  $a$  上的值为  $de$  界面上的平均值,见下页右图。

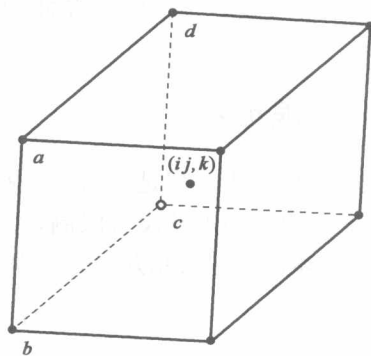
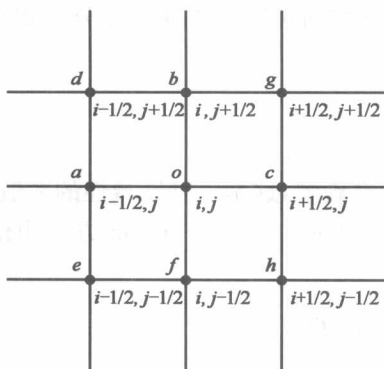
三维:小控制体  $D_k$  的几何中心点上的值为控制体内的平均值,见下页右图。

下面以二维热传导方程为例,描述有限体积法的求解步骤。

考虑某一容积内的热传导问题,当热传导系数为常数时,温度  $T$  满足 Laplace 方程,即:

$$\Delta T = 0 \quad (2.1)$$





$\Delta$  是 Laplace 算子:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

将方程的定解域  $D$  划分为有限个相等体积, 内部网格离散点取在体积的几何中心, 边界点取在半点上。考虑以  $(i, j)$  点为几何中心的体积  $B$ , 在有限体积方法中,  $(i, j)$  点上的物理量代表以该点为中心的体积  $B$  内的平均值。本例中描述的物理规律是体积  $B$  内的热流量的变化为零。

热流量和温度分布的关系可由 Fourier 关系给出:

$$q = -k \nabla T \quad (2.2)$$

对(2.1)取散度, 且考虑到上述物理规律, 有:

$$-\nabla \cdot q = \nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \quad (2.3)$$

应用散度定理  $\iiint_V \nabla \cdot A d\tau = \iint_S A \cdot n dS$ , 可得:

$$\iiint_D \nabla \cdot (k \nabla T) dD = \iint_S (k \nabla T) \cdot n dS = 0 \quad (2.4)$$

这里  $n$  为曲面  $S$  的外法向。对体积  $B$  的外表面进行积分(二维问题为面积), 这里仍以边界面中心点上的函数值为界面上的平均值, 则有:

$$-k\Delta y \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} + k\Delta y \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - k\Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} + k\Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} = 0 \quad (2.5)$$

对于内点, 采用中心差分逼近导数项, 可得:

$$-k\Delta y \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} + k\Delta y \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} - k\Delta x \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} + k\Delta x \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} = 0 \quad (2.6)$$

最后可得逼近微分方程的离散方程:

$$\frac{1}{\Delta x^2} (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}) + \frac{1}{\Delta y^2} (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}) = 0 \quad (2.7)$$

有限体积法便于求解复杂的计算区域。这种情况下, 计算域内离散后有限个体积的外形可能是任意的多面体(三维), 故积分后所得的函数值可能不是在规正的离散点上, 需要通过插值求得。

对于非定常流动,方程中应增加对时间  $t$  的导数项,离散时可以简单地以差分方式来代替时间导数。

## 2.3 有限元法

有限元法的基本思想是采用近似解逼近微分方程的准确解,这是一种区域性的离散方法。它的特点是对求解域形状没有限制,边界条件易于处理。下面以二维 Poisson 方程边值问题为例,简要描述建立有限元方程的过程。

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u^0(x, y) \end{cases} \quad (2.8)$$

如果  $u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , 即在区域  $\Omega$  内二阶连续可微,在  $\Omega$  的闭包  $\bar{\Omega}$  上一阶连续可微,那么对任意  $\varphi(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$ , 有:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} -(\Delta u)\varphi dx dy &= -\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(u_x \varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y \varphi) \right] dx dy + \iint_{\Omega} [u_x \varphi_x + u_y \varphi_y] dx dy \\ &= \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \iint_{\Omega} [u_x \varphi_x + u_y \varphi_y] dx dy \end{aligned} \quad (2.9)$$

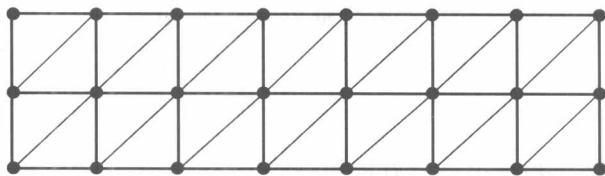
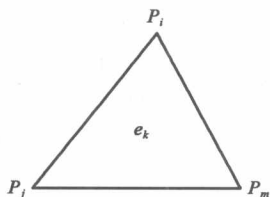
下面离散化方程:

### (1) 单元剖分

把区域  $\Omega$  分割为一系列三角形单元的组合,这是由于三角形剖分在几何上有很大的灵活性,对边界的逼近程度较好,因此常采用三角形剖分,把三角形的顶点称为节点,对单元和节点进行编号。设节点为  $p_i(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, NP)$ , 单元为  $e_k (k=1, 2, \dots, NE)$ 。

在区域  $\Omega$  进行三角形剖分以及进行节点编号时应注意以下几点。

- ① 每个单元的顶点只能是相邻单元的顶点,不能是相邻单元边上的点。
- ② 尽量避免出现大的钝角,大的边长。
- ③ 在  $u(x, y)$  的梯度变化可能比较剧烈的地方,网格要密,变化较小的地方,网格可以相对稀疏点。
- ④ 单元的编号可以任意,但节点标号的好坏直接影响总刚度阵的带宽,要求所有两个相邻节点编号之差的绝对值中的最大者越小越好。例如,考虑下图区域的三角剖分:



按竖的方向由左到右对节点编号要比按横的方向由上到下对节点编号好。

### (2) 插值多项式

采用线性插值,在二维情形下,线性函数的一般形式为:

$$u = ax + by + c \quad (2.10)$$

它有三个待定系数,对每个单元,为了确定其线性插值的具体形式,需要在3个点上给定 $u$ 的值,通常就取这个单元的3个顶点。假设在节点 $P_i$ 上 $u$ 的值为 $u_i$ ,即 $u(x_i, y_i) = u_i (i=1, 2, \dots, NP)$ 。现任取单元 $e$ ,它的3个顶点是 $P_i, P_j, P_m$ ,记为 $e = \Delta P_i P_j P_m$ ,它们的顺序为逆时针。为了使插值函数(2.10)在3个顶点上的取值分别为 $u_i, u_j, u_m$ ,则 $a, b, c$ 满足:

$$\begin{cases} ax_i + by_i + c = u_i \\ ax_j + by_j + c = u_j \\ ax_m + by_m + c = u_m \end{cases} \quad (2.11)$$

解得:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\Delta_e} \left( \begin{vmatrix} y_j & 1 \\ y_m & 1 \end{vmatrix} u_i + \begin{vmatrix} y_m & 1 \\ y_i & 1 \end{vmatrix} u_j + \begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_j & 1 \end{vmatrix} u_m \right) \\ b &= \frac{1}{2\Delta_e} \left( - \begin{vmatrix} x_j & 1 \\ x_m & 1 \end{vmatrix} u_i - \begin{vmatrix} x_m & 1 \\ x_i & 1 \end{vmatrix} u_j - \begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix} u_m \right) \\ c &= \frac{1}{2\Delta_e} \left( \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} u_i + \begin{vmatrix} x_m & y_m \\ x_i & y_i \end{vmatrix} u_j + \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} u_m \right) \end{aligned}$$

其中:

$$2\Delta_e = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}$$

$\Delta_e$ 恰好是三角形单元 $e = \Delta P_i P_j P_m$ 的面积,把它们代入(2.10),可得单元 $e$ 上的插值函数:

$$u = N_i(x, y)u_i + N_j(x, y)u_j + N_m(x, y)u_m \quad (2.12)$$

其中:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2\Delta_e} \left( \begin{vmatrix} y_j & 1 \\ y_m & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_j & 1 \\ x_m & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta_e} (a_i x + b_i y + c_i) \end{aligned}$$

$$a_i = \begin{vmatrix} y_j & 1 \\ y_m & 1 \end{vmatrix}, b_i = - \begin{vmatrix} x_j & 1 \\ x_m & 1 \end{vmatrix}, c_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix}$$

设 $\{\delta\}_e = (u_i, u_j, u_m)^T$ ,  $[N] = (N_i, N_j, N_m)$ ,则在单元 $e$ 上有:

$$u = [N] \{\delta\}_e \quad (2.13)$$

$u$ 的梯度向量可以表示为:

$$\begin{aligned} \nabla u &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{bmatrix} \{\delta\}_e \\ &= \frac{1}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}_e = [B] \{\delta\}_e \end{aligned} \quad (2.14)$$