DAXUESHUXUE

21世纪大学数学精品教材

大学数学

主 编 范远泽
副主编 呙林兵 朱建伟

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪大学数学精品教材

大 学 数 学

主　编　范远泽

副主编　呙林兵　朱建伟

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书根据当前普通高等院校数学课程教学（少学时）的要求，由从事数学教学的一线教师执笔编写，内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、线性代数及概率论基础等，每章均配备了适量的例题和习题.

本书注重数学思想介绍和基本逻辑思维训练，从不同的侧面引入数学的基本概念，适量给出一些相关的证明过程及求解过程. 由于大学数学少学时的限制，在教材内容的选取与组织上作了适当的调整.

本教材适合普通高等院校数学少学时的专业使用，也可供中专及高职层次的相关专业选用. 参考学时120学时.

图书在版编目（CIP）数据

大学数学/范远泽主编. —北京：科学出版社，2010. 4

21世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-027104-4

Ⅰ.①大… Ⅱ.①范… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第053635号

责任编辑：吉正霞 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年4月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2010年4月第一次印刷 印张：23 1/4

印数：1—6 000 字数：452 000

定价：34.50元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前言
FOREWORD

在长期的大学数学教学中，我们一直关注少学时大学数学课程建设和教材建设. 经过多年的教学实践，我们认为大学少学时数学不同于理工科的高等数学，其目的主要在于引导学生掌握一些现代科学所必备的数学基础，学习一种理性思维的方式，提高大学生的数学修养和综合素质. 基于这种认识，我们组织多年从事一线教学的骨干教师编写了这本教材.

本教材编写中，我们在保留传统高等数学教材结构严谨、逻辑清晰等风格的同时，积极吸收近年来高校教材改革的成功经验，努力做到例证适当、通俗易懂. 本教材内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、线性代数以及概率论基础等，每章均配备了适量的例题和习题.

由于本教材以大学数学少学时学生为对象，对内容及深度与广度都进行了筛选，所以在编写中，我们一方面以学生易于接受的自然形式来展开各章节的内容，另一方面也尽量注意到数学语言的逻辑性，保证了教材的系统性和严谨性，便于教师的

讲授和学生的自学.

本书由范远泽主编，呙林兵、朱建伟任副主编. 其中微积分部分由范远泽编写，线性代数部分由呙林兵编写，概率论部分由朱建伟编写. 本书在编写过程中得到了胡青华、王文珍、毛占军、余瑞艳、黄晓娟、杜厚维、张涛、陈士龙、朱智慧、胡洁、周湘辉的大力支持，特表示谢意.

陈忠教授审阅了本书，提出了许多宝贵意见和建议，谨此表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中的疏漏、错误和不足在所难免，恳请各位专家、同行和广大读者指正.

编　者

2010 年 3 月

目录

CONTENTS

□ 第一章

微积分部分

线性代数部分

概率论部分

21世纪大学数学
精品教材

微积分部分

第一章　函数极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象是变化的量. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

第一节　函数的概念与基本性质

一、区间与邻域

设 a 和 b 都是实数，将满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数组成的数集称为**开区间**，记作 (a, b). 即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点，这里 $a \notin (a, b)$ 且 $b \notin (a, b)$.

类似地，称数集

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

为**闭区间**，a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点，这里 $a \in [a, b]$ 且 $b \in [a, b]$.

称数集

$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\} \quad \text{和} \quad (a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

为**半开半闭区间**.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为区间的长度. 此外还有**无限区间**：

$$(-\infty, +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$$

$$(-\infty, b]=\{x \mid -\infty<x \leqslant b\}$$

$$(-\infty, b)=\{x \mid -\infty<x<b\}$$

$$[a, +\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}$$

$$(a, +\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}$$

这里记号“$-\infty$”与“$+\infty$”分别表示“负无穷大”与“正无穷大”.

而邻域是常用的一类数集. 设 x_0 是一个给定的实数，δ 是某一正数，称数集

$$\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

为点 x_0 的 **δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$. 称点 x_0 为这邻域的中心；δ 为这邻域的半径. 如图 1-1-1 所示.

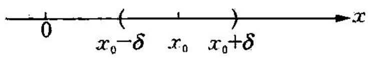

图 1-1-1

称 $\{x \mid x\in U(x_0,\delta)$，且 $x\neq x_0\}$ 为 x_0 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$. 即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

将开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为 x_0 的左 δ 邻域，将开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的右 δ 邻域.

当不需要指出邻域的半径时，我们用 $U(x_0)$，$\mathring{U}(x_0)$ 分别表示 x_0 的某邻域和 x_0 的某去心邻域.

二、函数的概念

函数是客观世界中变量之间的一种依赖关系.

定义 1-1-1 设 A，B 是两个实数集，若对 A 中的每个数 x，按照某种确定的法则 f，在 B 中有唯一的一个数 y 与之对应，则称 f 是从 A 到 B 的一个函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in A$$

其中 x 称为自变量；y 称为因变量；$f(x)$ 表示函数 f 在 x 处的函数值；A 称为函数 f 的定义域，记作 $D(f)$；称 $f(A)=\{y \mid y=f(x),\ x\in A\}$ 为函数 f 的值域，记作 $R(f)$.

通常函数是指对应法则 f，但习惯上用"$y=f(x)$，$x\in A$"表示函数，此时应理解为"由对应关系 $y=f(x)$ 所确定的函数 f".

函数概念有两个基本要素，即定义域和对应法则. 定义域表示使函数有意义的范围，即自变量的取值范围. 在实际问题中，可根据函数的实际意义来确定. 在理论研究中，若函数关系由数学公式给出，函数的定义域就是使数学表达式有意义的自变量 x 的所有值构成的数集. 对应法则是函数的具体表现，即两个变量之间只要存在对应关系，它们之间就具有函数关系. 例如，气温曲线给出了气温随时间变化的对应关系；三角函数表列出了角度与三角函数值的对应关系. 因此，气温曲线和三角函数表表示的都是函数关系. 这种用曲线和列表给出函数的方法分别称为图示法和列表法. 但在理论研究中所遇到的函数多数由数学公式给出，称为公式法. 例如，初等数学中所学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数都是用公式法表示的函数.

从几何上看，在平面直角坐标系中，点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x),\ x\in D(f)\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图像(图 1-1-2). 函数 $y=f(x)$ 的图像通常是一条曲线，$y=f(x)$ 也称为这条曲线的方程. 这样，函数的一些特性常常可借助于几何直观来发现；相反，一些几何问题，有时也可借助于函数来作理论探讨.

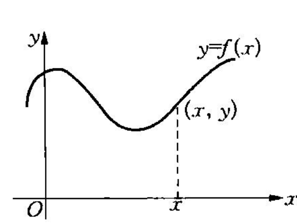

图 1-1-2

现在我们举一个具体函数的例子.

例 1-1-1　求函数 $y=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解　要使数学式子有意义,x 必须满足

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\ x-1>0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}|x|\leqslant 3\\ x>1\end{cases}$$

由此有
$$1<x\leqslant 3$$

因此函数的定义域为$(1,3]$.

有时一个函数在其定义域的不同子集上要用不同的表达式来表示对应法则,称这种函数为分段函数.下面给出一些今后常用的分段函数.

例 1-1-2　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,值域 $R(f)=[0,+\infty)$,如图 1-1-3 所示.

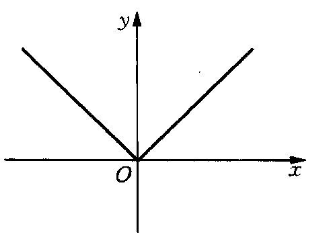

图 1-1-3

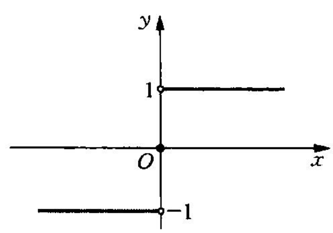

图 1-1-4

例 1-1-3　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,值域 $R(f)=\{-1,0,1\}$,如图 1-1-4 所示.

例 1-1-4　取整函数 $y=[x]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.例如,$\left[-\dfrac{1}{3}\right]=-1$,$[0]=0$,$[\sqrt{2}]=1$,$[\pi]=3$ 等.函数 $y=[x]$ 的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,值域 $R(f)=\{$整数$\}$.一般地,$y=[x]=n$ $(n\leqslant x<n+1,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,如图 1-1-5 所示.

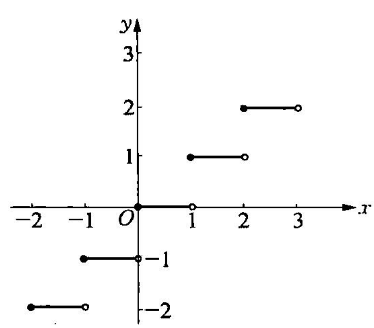

图 1-1-5

三、复合函数与反函数

定义 1-1-2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$；而函数 $u=g(x)$ 的定义域为 $D(g)$，值域为 $R(g)$，且 $R(g)\subseteq D(f)$，则对任意的 $x\in D(g)$，通过函数 $u=g(x)$ 都有唯一的 $u\in R(g)\subseteq D(f)$ 与 x 对应，再通过 $y=f(u)$ 又有唯一的 $y\in R(f)$ 与 u 对应. 这样，对任意 $x\in D(g)$，通过 u 都有唯一的 $y\in R(f)$ 与之对应. 因此 y 是 x 的函数，称这个函数为 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合函数，记作

$$y=(f\cdot g)(x)=f[g(x)],\quad x\in D(g)$$

u 称为中间变量.

两个函数的复合也可推广到多个函数复合的情形.

例如，幂函数 $y=x^{\mu}=a^{\mu\log_a x}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 可看成由指数函数 $y=a^u$ 与 $u=\mu\log_a x$ 复合而成. 又形如，$y=u(x)^{v(x)}$ ($u(x)>0$) $=a^{v(x)\log_a u(x)}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的函数称为幂指函数，它可看成由 $y=a^w$ 与 $w=v(x)\log_a u(x)$ 复合而成.

例 1-1-5 设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ ($x\neq -1$)，求 $f[f(x)]$.

解 令 $y=f(u)$，$u=f(x)$，则 $f[f(x)]$是通过 u 复合而成的复合函数，即

$$y=f(u)=\frac{u}{u+1}=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1},\quad x\neq -1,-\frac{1}{2}$$

定义 1-1-3 设 $y=f(x)$ 是从 A 到 B 的一个函数，若对每个 $y\in B$，有唯一的 $x\in A$，使 $y=f(x)$，则称 x 也是 y 的函数，记作 f^{-1}，即 $x=f^{-1}(y)$，并称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 也称为反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的直接函数.

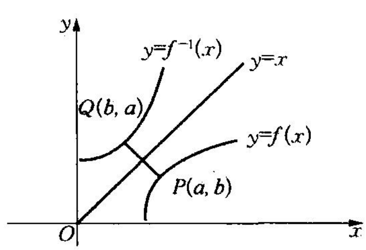

图 1-1-6

从几何上看，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 有同一图像. 但人们习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常记成 $y=f^{-1}(x)$. 今后，我们称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数. 此时，由于对应关系 f^{-1} 未变，只是自变量与因变量交换了记号，因此反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-1-6 所示.

值得注意的是，并不是所有函数都存在反函数，例如，函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，但对每一个 $y\in(0,+\infty)$，有两个 x 值即 $x_1=\sqrt{y}$ 和 $x_2=-\sqrt{y}$ 与之对应，因此 x 不是 y 的函数，从而 $y=x^2$ 不存在反函数. 事实