北京邮电大学理学院数学系概率教研室 编
史 悦 孙洪祥 主编

概率论与随机过程

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

概率论与随机过程

北京邮电大学理学院数学系概率教研室　编
史　悦　孙洪祥　主　编

北 京 邮 电 大 学 出 版 社
·北京·

内 容 简 介

本书是根据工科多层次教学改革的需要并经过了多年的教学实践而编写形成的，主要包括概率论、随机过程两部分。其中概率论部分包括：概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、重要的极限定理及应用。随机过程部分包括：随机过程的概念、平稳随机过程及其谱分析、马尔可夫链、泊松过程。每章均配有丰富的例题与习题。

本书可以作为高校工科、理科（非数学专业）“概率论与随机过程”课程的教材，也可作为高校理工科学生、教师的教学参考用书，亦可供工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与随机过程/史悦，孙洪祥主编．--北京：北京邮电大学出版社，2010．2

ISBN 978-7-5635-2132-6

Ⅰ．①概…　Ⅱ．①史…②孙…　Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②随机过程—高等学校—教材　Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 013044 号

书　　名： 概率论与随机过程
主　　编： 史　悦　孙洪祥
责任编辑： 刘　颖
出版发行： 北京邮电大学出版社
社　　址： 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部： 电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail： publish@bupt.edu.cn
经　　销： 各地新华书店
印　　刷： 北京源海印刷有限责任公司
开　　本： 720 mm×1 000 mm　1/16
印　　张： 21
字　　数： 420 千字
印　　数： 1—3 000 册
版　　次： 2010 年 2 月第 1 版　2010 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2132-6　　定　价：35.00 元

前　言

“概率论与随机过程”是电子类、通信类及计算机类专业的重要基础课程，依据多层次教学改革的需要，我们对课程学时进行了调整，根据专业的特点丰富了课程的内容，编写出了《概率论与随机过程讲义》，并经过了几年的教学实践，不断修改和完善了讲义的内容，在此基础上我们再次根据教学实践对讲义内容进行了完善，形成了目前的教材。因此，本教材是多年教学改革与教学实践的重要成果。

作者在编写过程中做了几点努力：(1)根据学科特点注重基本概念、基本理论的背景介绍和直观理解，使学习更具启发性和主动性。例如随着学习的不断深入，通过对概率公理化概念形成过程的认识，使学生在学习中体会概率论如何由赌博中提出的实际问题而逐步发展成为一门有坚实理论基础的数学学科的历史过程，启发学生对学科发展规律的认识，提高学生的数学修养。(2)提高模型化能力及在实际问题中准确判断和应用模型的能力。教材中对常用的重要分布都给出了实际产生的背景，从而强化了基本概型和实际应用能力。(3)较完整地介绍了马尔可夫链的内容，增加了常用的泊松过程的内容，为进一步的学习和应用打下牢固的基础。(4)每章均配有丰富的例题与习题，便于读者熟练掌握所学方法。

王玉孝和孙洪祥教授分别编写了《概率论与随机过程讲义》的概率论和随机过程部分，史悦副教授根据教学需要对概率论部分做了进一步的修改，郭永江副教授修改了随机过程部分。内容中打了一些 * 号，教师可根据学时的具体情况，进行取舍。这些内容相对独立，并不影响其他内容的教学。习题中打 * 号的题是较难的题目，可供学生作为提高而思考。编写过程中得到了北京邮电大学理学院数学系的帮助和支持，在此表示感谢，同时也感谢北京邮电大学出版社的大力支持，使得本书能够顺利出版。

限于时间仓促及编者水平，书中定有不足和错误，希望读者批评指正。

编　者

主要记号

E——随机试验

Ω——样本空间

ω——样本点

$\subset,\supset$——包含关系

$\cup$——并

$\cap$——交

$b(n,p)$——参数为 n,p 的二项分布

$\pi(\lambda)$——参数为 λ 的泊松分布

$\mathrm{Ge}(p)$——参数为 p 的几何分布

$U(a,b)$——(a,b)上的均匀分布

$\mathrm{Ex}(\lambda)$——参数为 λ 的指数分布

$N(\mu,\sigma^2)$——参数为 μ,σ^2 的正态分布

$\Phi(x)$——$N(0,1)$的分布函数

$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$——参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布

$F_{X|Y}(x|y)(F_{Y|X}(y|x))$——在 $Y=y(X=x)$条件下，$X(Y)$的条件分布函数

$f_{X|Y}(x,y)(f_{Y|X}(y|x))$——在 $Y=y(X=x)$条件下，$X(Y)$的条件概率密度

$E(X)$——X 的数学期望

$D(X)$——X 的方差

$\mathrm{cov}(X,Y)$——X 与 Y 的协方差

ρ_{XY}——X 与 Y 的相关系数

$\Psi(t)$——随机变量的特征函数

$\Psi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$——n 维随机变量的特征函数

l. i. m——均方极限

$\mu_X(t)$——$\{X(t)\}$的均值函数

$\Psi_X^2(t)$——$\{X(t)\}$的均方值函数

$\sigma^2(t)$——$\{X(t)\}$的方差函数

$R_X(s,t)$——$\{X(t)\}$的自相关函数

$C_X(s,t)$——$\{X(t)\}$的自协方差函数

$R_{XY}(s,t)$——$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$的互相关函数

$C_{XY}(s,t)$——$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$的互协方差函数

μ_X——平稳过程$\{X(t)\}$的均值

Ψ_X^2——平稳过程$\{X(t)\}$的均方值

σ_X^2——平稳过程$\{X(t)\}$的方差

$R_X(\tau)$——平稳过程$\{X(t)\}$的自相关函数

$C_X(\tau)$——平稳过程$\{X(t)\}$的自协方差函数

$S_X(\omega)$——平稳过程$\{X(t)\}$的自谱密度

$R_{XY}(\tau)$——二平稳相关的平稳过程$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$的互相关函数

$C_{XY}(\tau)$——二平稳相关的平稳过程$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$的互协方差函数

$S_{XY}(\omega)$——二平稳相关的平稳过程$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$的互谱密度

$H(\omega)$——线性系统的频率响应函数

$h(t)$——线性系统的脉冲响应函数

C-K 方程——切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

$p_{ij}^{(n)}$——由状态 i 到 j 的 n 步转移概率

$f_{ij}^{(n)}$——从状态 i 出发经 n 步首次到达状态 j 的概率

f_{ij}——从状态 i 出发经有限步到达状态 j 的概率

$p_{ij}(t)$——从状态 i 到状态 j 的转移函数

目　　录

第1章 概率论的基本概念

本章是概率论最基础的部分，主要介绍随机事件、事件的概率、条件概率及事件的独立性等概率论的基本概念. 这些概念将贯穿全书，请读者深刻理解. 重点内容是事件及其关系和运算，事件的概率及其计算.

1.1 随机事件及其运算

在我们所生活的世界上充满了不确定性的现象，即在一定的条件下，我们事先无法断言出现的结果——可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果. 例如，在相同条件下掷骰子出现的点数，新生婴儿的性别，用同一门炮向同一目标射击弹着点的位置，某种密码在一定时间内是否被破译，某同学一天内接到的短信数量等. 仔细分析这些不确定性的现象，会发现它们具有共同的特点，即在试验或观察前不能确定其将出现的结果，但如果经过大量的重复试验或观察，可发现其结果的出现又有一定的规律性. 例如，多次重复观察新生婴儿的性别，男婴、女婴数量基本各占一半，同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布，等等. 这种在一定条件下，在个别试验或观察中呈现不确定性，但在大量重复试验或观察中其结果又具有一定规律性的现象，称为随机现象. 通过大量重复试验或观察，随机现象所呈现出的固有规律称为统计规律.

概率论（包括随机过程和数理统计）就是研究和揭示随机现象统计规律性（从数量方面研究其蕴涵的必然规律性）的一门数学学科.

1.1.1 随机试验、样本点、样本空间

1. 随机试验

研究随机现象，通常我们首先要对研究对象进行观察试验. 这里的试验，指的是随机试验. 所谓随机试验是指具有下面三个特点的试验：

(1) 可重复性——在相同的条件下可以重复进行；

(2) 全体试验结果的可知性——试验的可能结果不止一个，但能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 一次试验结果的随机性——进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验常简称为试验，并用 E 表示，我们正是通过随机试验来研究随机现象

的. 以下都是随机试验的例子，同时对于下列随机试验，应注意什么是它的一次试验？观察的内容是什么？

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_2：将一枚硬币抛三次，观察出现正面的次数；

E_3：抛一枚硬币，直到出现正面为止，记录抛硬币的总次数；

E_4：抛一枚骰子，观察出现的点数；

E_5：在区间[0,1]上任取一点，记录点的坐标；

E_6：在一批计算机中，任意抽取一台，测试它的无故障运行时间；

E_7：向直角坐标系上圆心位于原点的单位圆内投掷一点(假设点必落在单位圆内)，记录点的坐标.

2. 随机事件、样本空间和样本点

在随机试验中，首先我们关心的是这个试验可能出现的结果. 对于一试验 E，在一次试验中可能出现也可能不出现的事情(结果)，称为 E 的随机事件. 一般用大写字母 A,B,C 等表示. 例如，在上述 E_4 的试验中，“掷得点数 6”，“掷得奇数点”，“掷得点数不超过 3”等都是随机事件. 在 E_6 这一试验中，“计算机的无故障时间超过 500 小时”也是一随机事件.

随机事件又可分为两类. 试验 E 中可直接观察到的、最基本的不能再分解的结果称为基本事件. 由上述若干基本结果构成的事件称为复合事件. 基本事件和复合事件均简称为事件. 例如，在上面试验 E_4 中，“掷得点数 6”为基本事件，“掷得奇数点”和“掷得点数不超过 3”都是复合事件.

作为事件的特殊情况，在任何一次试验中都不可能发生的事件，称为该试验的不可能事件，记为$\varnothing$. 在任何一次试验中都必然发生的事件，称为该试验的必然事件，记为 Ω. 例如，在 E_5 中，“取得点的坐标为 2”就是它的不可能事件，“取得点的坐标大于等于 0，小于等于 1”就是它的必然事件.

我们注意到，对于一试验 E，试验的全部可能结果，是在试验前就明确的. 因此称随机试验 E 的所有基本结果组成的集合为 E 的样本空间，记为 Ω. 而将样本空间中的元素称为样本点，用 ω 表示. 换句话说，全体样本点的集合为样本空间. 这样我们就可以用集合的描述方法来描述样本空间，即 $\Omega=\{\omega\}$. 例如，给出上面 $E_1\sim E_7$ 的样本空间如下：

$E_1:\Omega_1=\{H, T\}$；

$E_2:\Omega_2=\{0, 1, 2, 3\}$；

$E_3:\Omega_3=\{1,2,3,\cdots\}$；

$E_4:\Omega_4=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

$E_5:\Omega_5=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$；

$E_6:\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

E_7：$\Omega_7=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

同时，试验 E 中的事件亦可以用样本点的集合来描述. 基本事件就是只含一个样本点的单元素集合，复合事件是若干个样本点的集合，特别地，不可能事件是空集，不含有任何样本点，而必然事件含有所有样本点，因此就是样本空间. 于是，任一事件都可以表示为一些样本点的集合，事件是样本空间的子集. 例如，若用 A,B,C 分别表示 E_4 中事件“掷得点数 6”、“掷得奇数点”和“掷得点数不超过 3”，则 $A=\{6\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{1,2,3\}$. 若用 D 表示 E_6 中事件“计算机的无故障时间超过 500 小时”，则 $D=\{t\mid t>500\}$. 并且在一次试验中当且仅当一个事件所包含的任一样本点出现，我们称此事件在这次试验中发生. 例如，掷一次骰子，无论掷得 1 点，还是掷得 2 点或 3 点，都称事件 C 在这次试验中发生了. 在测试计算机的无故障运行时间时，只要计算机的无故障时间超过 500 小时，无论是 501 小时，还是 600 小时，都称事件 D 在这次试验中发生了.

例 1.1.1　袋中有 3 个白球，2 个黑球，从中任取 2 个球，令 A 表示“取出的全是白球”，B 表示“取出的全是黑球”，C 表示“取出的球颜色相同”，$A_i(i=1,2)$ 表示“取出的两个球中恰有 i 个白球”，D 表示“取出的两个球中至少有 1 个白球”，写出此试验的样本空间，并用样本点的集合表示上述事件.

解　将 3 个白球编号为 1、2、3，两个黑球编号为 4、5，则此试验的样本空间为

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),\cdots,(4,5)\}$$

各事件用样本点的集合表示为

$A=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

$B=\{(4,5)\}$

$C=\{(1,2),(1,3),(2,3),(4,5)\}$

$A_1=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$

$A_2=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

$D=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(1,2),(1,3),(2,3)\}$

由这些例子不难看到，在描述与一个试验相联系的样本空间时，必须对正在观察的内容有一个十分清楚的认识，以便正确确定该试验的样本空间. 例如，“将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数”与“将一枚硬币抛掷三次，观察各次正、反面出现的情况”这两个试验虽然都是将一枚硬币抛掷三次，但观察的内容不同，因此在样本空间的描述上是不同的. 样本空间是研究随机现象的数学模型，正确地确定不同随机试验的样本点和样本空间是极为重要的.

另一方面，一个样本空间可以概括内容很不相同的实际问题，例如只包含两个样本点的样本空间能作为掷硬币出现正、反面的模型，也可用于产品检验中出现“正品”与“次品”，气象中“下雨”与“不下雨”等. 尽管问题的实际内容不同，但常常归结为相同的数学模型. 所以在以后的研究中，我们常以摸球等模型作为例子，来

突出反映各种实际问题的本质.

同时,我们注意到样本空间中样本点的个数可以是有限个,如 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_4$,也可以是可列无穷多个,如 Ω_3,亦可以是不可列无穷多个,如 $\Omega_5,\Omega_6,\Omega_7$.

下面给出概率论中事件等基本概念与集合论中相应概念的对应表(表 1-1),以便我们能用熟悉的集合论中的工具进一步研究随机事件.

表 1-1

集合论	概率论	符号
全集	样本空间;必然事件	Ω
空集	不可能事件	$\varnothing$
Ω 中的元素	样本点	$\omega\in\Omega$
单元素集	基本事件	$\{\omega\}$
Ω 的子集	事件	$A\subset\Omega$

1.1.2 事件间的关系和运算

在以后讨论概率论中的实际问题时,常要考察同一试验中的几个事件,由于它们共处于同一试验中,因而是相互联系着的.详细分析这些事件的关系,不仅能帮助我们深刻认识事件的本质,还可以简化一些关于复杂事件概率的计算.因此为了便于事件概率问题的解决,需要研究事件间的关系并引入事件的运算.而我们知道事件是一个集合,因此事件间的关系和运算自然可以按照集合论中集合之间的关系和运算来处理.下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并且假定所涉及的事件是同一试验中的事件.

1. 事件间的关系和运算

(1) 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 中的样本点一定属于 B,则称事件 B 包含事件 A,或事件 A 包含于事件 B,记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

例如在例 1.1.1 中进一步讨论各事件间的包含关系,有 $A\subset C,B\subset C,A_1\subset D$, $A_2\subset D$等.

例 1.1.2 一批产品中有合格品 100 件,次品 5 件,又在合格品中有 10%是一级品.现从这批产品中任取 3 件,令 A 表示"取得 3 件产品都是一级品",B 表示"取得 3 件产品都是合格品",则 $A\subset B$.

显然对任意的事件 A 有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2) 相等关系

若对于 A、B 两事件,有 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

例如在例 1.1.1 中,$A_2=A$.在例 1.1.2 中,令 C 表示"取得 3 件产品中至少有

两件合格品”，D 表示“取得 3 件产品中至多一件是次品”，则 $C=D$.

(3) 事件的和

“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”是一事件，称此事件为事件 A 与事件 B 的和(并)事件，记为 $A\cup B$. 事件 $A\cup B$ 是 A 中的样本点或 B 中的样本点构成的集合，用集合表示为

$$A\cup B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}$$

两事件的和可推广到任意有限个事件的和及可列个事件的和的情况. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，表示事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生”，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$，表示事件“$A_1,A_2,\cdots$ 至少有一个发生”，简记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

例 1.1.3　袋中有 5 个白球，3 个黑球，从中任取 3 个球，令 A 表示“取出的全是白球”，B 表示“取出的全是黑球”，C 表示“取出的球颜色相同”，则 $C=A\cup B$. 若令 $A_i(i=1,2,3)$ 表示“取出的 3 个球中恰有 i 个白球”，D 表示“取出的 3 个球中至少有 1 个白球”，则 $D=A_1\cup A_2\cup A_3$. 若令 $B_i(i=0,1,2)$ 表示“取出的 3 个球中恰有 i 个黑球”，则 $D=B_0\cup B_1\cup B_2$，且 $B_0=A_3,B_1=A_2,B_2=A_1$.

(4) 事件的积

“事件 A 与事件 B 都发生”是一事件，称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB. 事件 AB 是由既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合，用集合表示为

$$AB=\{\omega \mid \omega\in A, \text{且 } \omega\in B\}$$

两事件的积可推广到任意有限个事件的积及可列个事件的积的情况. 即 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$. 类似地，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 表示事件“$A_1,A_2,\cdots$ 同时发生”.

例 1.1.4　一批产品中包含正品和次品各若干件，从中有放回地抽取 5 次，每次取一件，令 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 表示“第 i 次取出的是正品”，B 表示“5 次都取得正品”，则 $B=A_1A_2A_3A_4A_5$.

例 1.1.5　在直角坐标系圆心在原点的单位圆内任取一点，记录其坐标. 令 A_n $(n=1,2,\cdots)$ 表示“任取一点到原点的距离小于 $\frac{1}{n}$”，即 $A_n=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2<\frac{1}{n^2}\right\}$，$B$ 表示“取到 $(0,0)$ 点”，则 $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

(5) 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”是一事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$. 事件 $A-B$ 是由属于 A 但不属于 B 的样本点构成的集合，用集合表示为

$$A-B=\{\omega \mid \omega\in A, \omega\notin B\}$$