高等学校教材

概率论与数理统计

主　编　戴　琳
副主编　陈秀华　秦叔明

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

概率论与数理统计

主编 戴 琳
副主编 陈秀华 秦叔明

编者
陈秀华 戴 琳 李建飞 秦叔明 吴刘仓 徐润林
（按汉语拼音为序）

高等教育出版社

内容提要

本书根据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成，内容包括：随机事件与概率、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计学的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与正交试验设计、回归分析、MATLAB在概率统计中的应用等。附录中包含了本书所需查找的各种分布表及各节习题的简明解答。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材使用，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/戴琳主编. —北京：高等教育出版社，2009.9
ISBN 978-7-04-014373-7

Ⅰ.概… Ⅱ.戴… Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第151647号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	中青印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009年9月第1版
印　　张	18.5	印　　次	2009年9月第1次印刷
字　　数	340 000	定　　价	20.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　14373-00

前　　言

本书根据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成，适用于高等学校理工类专业。本书内容包括：随机事件与概率、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计学的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与正交试验设计、回归分析、MATLAB在概率统计中的应用等。附录中包含了本书所需查找的各种分布表及各节习题的简明解答。

本书遵循高等教育的特点并结合理工类专业学生的实际情况，坚持“以基础为出发点、以应用为目的、以创新为导向”的编写原则，具有以下特点：

1. 对概率论与数理统计基本要求规定的基础内容部分着力下工夫，突出概率统计的思想、方法及应用。对基本概念的叙述尽量深入浅出，对基本定理的证明力求简明易懂，对基本方法的介绍力求充实到位，对例题及习题的选择力求典型性和富有启发及应用性，每章后面的思考题有利于拓展学生对基本概念、基本理论及基本方法的全面深入理解。

2. 在内容组织上，根据学生的认识发展规律和心理特点精心安排，便于学生自学。

3. 更新教学内容，增加了正交试验设计的内容，并编写了MATLAB在概率统计中的应用等，使教材更加直观化和现代化。

4. 正确处理好理论与实践的结合及应用，在教材中重视概率统计的应用，特别是加入了正交试验设计、MATLAB在概率统计中的应用等内容，加强了整本教材的实用性。

本书第一、二章由陈秀华编写，第三、四章由秦叔明编写，第五、六章由戴琳编写，第七章由徐润林编写，第八、九章由吴刘仓编写，第十章由李建飞编写。初稿完成后由戴琳、陈秀华、秦叔明对全书进行了系统的统稿、定稿和加工工作。本书的全部插图由徐润林完成。

在本书的编写过程中得到了学院和学校教务处的大力支持；我系教师张卫锋、张志坚及张江红等参加了教材的录入、校稿等工作；高等教育出版社为本

书的出版做了大量工作。在此表示衷心的感谢。

由于编审人员水平有限，本书不足之处在所难免，诚恳希望广大教师及读者批评指正。

编　者

2009年6月

目 录

第一章 随机事件与概率 …… 1

引言 …… 1

§1 随机事件及其运算 …… 1

§2 随机事件的概率 …… 6

§3 概率的计算公式 …… 11

§4 独立性与二项概率公式 …… 16

思考题 …… 19

习题一 …… 20

第二章 一维随机变量及其分布 …… 23

§1 随机变量及其分布函数 …… 23

§2 离散型随机变量 …… 25

§3 连续型随机变量 …… 30

§4 随机变量的函数及其分布 …… 35

思考题 …… 38

习题二 …… 38

第三章 二维随机变量及其分布 …… 41

§1 二维随机变量 …… 41

§2 二维离散型随机变量的分布律及性质 …… 43

§3 二维连续型随机变量及其概率密度 …… 49

§4 两个随机变量的函数的分布 …… 59

思考题 …… 63

习题三 …… 64

第四章 随机变量的数字特征 …… 67

§1 随机变量的数学期望 …… 67

§2 随机变量的方差及标准差 …… 72

§3 协方差，相关系数和矩 …… 77

§4 大数定律与中心极限定理 …… 83

思考题 …… 89
习题四 …… 91
第五章 数理统计学的基本概念 …… 95
§1 样本及统计量 …… 96
§2 抽样分布 …… 99
思考题 …… 106
习题五 …… 106
第六章 参数估计 …… 108
§1 点估计 …… 108
§2 估计量的评选标准 …… 113
§3 区间估计 …… 116
思考题 …… 123
习题六 …… 123
第七章 假设检验 …… 127
§1 假设检验的基本概念 …… 127
§2 正态总体的假设检验 …… 132
§3 分布拟合检验 …… 140
思考题 …… 147
习题七 …… 147
第八章 方差分析与正交试验设计 …… 151
§1 单因素方差分析 …… 151
§2 双因素方差分析 …… 160
§3 正交试验设计 …… 170
思考题 …… 181
习题八 …… 181
第九章 回归分析 …… 185
§1 一元线性回归分析 …… 186
§2 多元线性回归分析简介 …… 198
思考题 …… 201
习题九 …… 201
第十章 MATLAB 在概率统计中的应用 …… 204
§1 MATLAB 简介 …… 204
§2 MATLAB 基础知识 …… 206

§3 MATLAB 在概率计算中的应用 …… 217
§4 随机变量的分布计算 …… 219
§5 随机变量的数字特征计算 …… 227
§6 统计量的 MATLAB 描述 …… 231
§7 参数估计的 MATLAB 实现 …… 233
§8 假设检验 …… 237
§9 MATLAB 在方差分析中的应用 …… 242
§10 回归分析的 MATLAB 实现 …… 245
附表 1 泊松分布表 …… 250
附表 2 二项分布表 …… 252
附表 3 标准正态分布表 …… 255
附表 4 t 分布表 …… 256
附表 5 χ^2 分布表 …… 258
附表 6 F 分布表 …… 262
附表 7 秩和临界值表 …… 272
附表 8 相关系数临界值 r_α 表 …… 273
附表 9 常见正交表 …… 274
习题答案 …… 277
参考文献 …… 285

第一章　随机事件与概率

引　言

概率论这一门学科，大约起源于 17 世纪中叶法国社会中盛行的赌博游戏. 经过 300 多年的发展，概率论取得了长足的进步，已成为数学学科最活跃的分支之一. 它不但有自身的理论体系，而且日益广泛地应用到科学技术的许多方面，甚至深入到人文学科，方兴未艾.

概率论为什么有如此广泛的应用？首先要从它所研究的对象说起，我们知道，自然界存在两类现象：在一定的条件下必然发生的现象，叫做**必然现象**，例如，月球绕地球旋转，同性电相斥，水在 4℃时密度最大，等等；还有另一类现象，在一定的条件下可能发生也可能不发生，这种现象叫做**偶然现象**或**随机现象**. 个别地看，偶然现象是无规律的，我们不能预言它是否一定发生，但大量的同类的偶然现象却呈现出确定的规律性，例如：

(1) 个别婴儿在降生之前不能预言是男是女，但观察相当大量的新生儿的性别后，则可以得出大量新生儿中男女大约各占一半的结论.

(2) 密闭容器内定量的气体，个别分子的运动轨道、速率和方向都是随机的. 但由于分子数量极多，在大量分子的集体作用下，随机性被互相抵消或互相补偿，因而气体对器壁的压力表现出相对的稳定性.

(3) 打靶时，无论怎样控制射击条件，每一次射击之前不能预测弹着点的准确位置. 射击次数不多时，弹着点的分布也是无规律的，但随着射击次数不断增加，弹着点的分布就逐渐显示出规律性. 例如，对于高明的射手而言弹着点的分布一般是以靶心为对称中心，离靶心越近分布越密，离靶心越远分布越疏，而且射击次数越多规律性越明显.

大量同类的随机现象所具有的这种规律性叫做**统计规律性**. 概率论就是研究统计规律性的一门数学学科，它的任务在于揭示这种规律并使之数量化.

§1　随机事件及其运算

概率论研究的中心问题是随机事件发生的可能性的数学描述. 所谓概率就是用来度量这种“可能性”大小的一种数量. 所以随机事件是概率论中最基本的

概念，下面先介绍随机事件及其性质.

一、随机试验与随机事件

为了研究随机现象，我们需要进行大量观察、试验，如果试验 E 具有以下特性，则称 E 为**随机试验**：

(1) 可以在相同的条件下重复进行任意多次；

(2) 每次试验的结果可能不止一个，但事先可以明确试验的所有可能结果；

(3) 某一次试验在进行之前，不能确定究竟哪个结果将会发生.

随机试验的每个可能结果称为**基本事件**或**样本点**，记为 e. 全体基本事件组成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**，记为 $\Omega=\{e\}$.

例 1 观察新生儿的性别. 样本点有 2 个，e_1：男性；e_2：女性，其样本空间为

$$\Omega=\{e_1,e_2\}.$$

例 2 掷一枚骰子，观察出现的点数，样本点有 6 个，e_i：出现 i 点，$i=1,2,3,4,5,6$，其样本空间为

$$\Omega=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}.$$

例 3 观察某电话交换机(站)在一小时内接到的呼唤次数. 设呼唤次数为 i ($i=0,1,2,\cdots$). 样本点有无穷多个 e_i：接到 i 次呼唤($i=0,1,2,\cdots$)，其样本空间为

$$\Omega=\{e_0,e_1,e_2,\cdots\}.$$

例 4 在一批灯泡中任取一只，观察其寿命. 设 t 表示灯泡寿命，则样本点是一非负数，由于不能确知寿命的上界，所以可以认为任一非负实数都是一个可能结果，故样本空间为

$$\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

例 5 将长为 1 的一直尺折为三段，用 x,y,z 记录各段的长度，则样本点是空间中的点 (x,y,z)，故样本空间为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}.$$

从上面的例子可以看出样本空间可以是有限集合，如例 1，例 2，也可以是无限集合，如例 3，例 4，甚至可以是一个区域，如例 5.

考察某个随机试验，不但要注意它的基本事件，更重要的是研究由某些基本事件组成的复合事件，用集合表示，常记为大写字母 $A,B,C,\cdots$，例如，就上述随机试验而言，分别有

事件 A："新生儿是男孩"$=\{e_1\}$，

事件 B："掷一枚骰子出现奇数点"$=\{e_1,e_3,e_5\}$，

事件 C："某电话站在一小时内接到呼唤次数不少于 15 次"$=\{e_{15},e_{16},\cdots\}$，

事件 D："灯泡寿命大于 1 000 小时"$=\{t\mid t>1\,000\}$.

我们把样本空间 $\Omega=\{e\}$ 的每个子集合 A 称为**随机事件**，简称**事件**. 在每次试验中当且仅当这一子集中的一个样本点出现时称这一事件发生.

在每次试验中都必然发生的事件称为**必然事件**，在任何一次试验中都不发生的事件称为**不可能事件**.

由随机事件的定义，必然事件即样本空间 Ω，不可能事件即空集 $\varnothing$，随机事件即 Ω 的子集，基本事件即单点集，复合事件即多点集.

二、事件的关系及其运算

由一个随机试验的样本空间，可以构造出许多随机事件，我们希望从一些事件发生的可能性大小推算出另外一些事件发生的可能性大小，为此首先研究事件间的关系及运算.

由于我们已将事件表示为集合，从而可以利用集合的运算关系给出事件的运算关系.

（1）子事件

如果事件 A 发生导致事件 B 发生，则称事件 A 为事件 B 的**子事件**，记为 $A\subset B$.

从数量关系上看 $A\subset B$ 表示 A 为 B 的子集合. 例如掷一枚骰子，设事件 A：出现 5 点或 6 点，设事件 B：出现点数不小 3 点，则显然 $A\subset B$.

（2）相等事件

如果 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$，从数量关系上看 $A=B$ 表示集合 A 与集合 B 相等.

（3）事件的和

由"事件 A 发生或者 B 发生"，即"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"所构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记作 $A\cup B$.

从数量关系上看 $A\cup B$ 表示集合 A 与集合 B 的并集合.

（4）事件的差

由"事件 A 发生但事件 B 不发生"所构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记作 $A-B$.

从数量关系上看 $A-B$ 表示集合 AB 在集合 A 中的补集.

例如，高考体检中，事件 A：身高合格，事件 B：血压合格，则 $A-B$ 表示身高合格但血压不合格.

（5）事件的积

由"事件 A 与 B 都发生"所构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记作 AB 或 $A\cap B$.

从数量关系上看 AB 表示集合 A 与集合 B 的交集合.

如上例，AB 表示身高合格且血压合格.

(6) 互斥(或互不相容)事件

如果事件 A 和事件 B 不同时发生,则称 A 与 B **互斥**,即 $A \cap B = \varnothing$.

从数量关系上看 A 与 B 互斥表示集合 A 与集合 B 的交为空集合.

对任一随机试验,其任何两个基本事件是互斥的,即随机试验的结果不可能有两个基本事件同时出现.

(7) 对立(互逆)事件

如果事件 A,B 同时满足条件:① $AB = \varnothing$;② $A \cup B = \Omega$. 则称事件 A 与事件 B 互为**对立(互逆)事件**,事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$,即 $\overline{A} = B$,它表示“A 不发生”.

事实上 $\overline{A} = \Omega - A$.

注 因为互逆事件满足条件①,所以必是互斥事件;反之互斥事件满足条件①,但不一定满足条件②,所以不一定是互逆事件.

(8) 完备事件组

若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$,且两两互斥,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个**完备事件组**.

完备事件组实际上表示样本空间 Ω 的一个分割.

所有基本事件是完备事件组;对任何事件 A ,A 与 $\overline{A}$ 是完备事件组.

为了直观,常用图形法来表示事件的运算,用矩形区域表示样本空间,用圆形区域表示事件 A、B,则事件之间的关系及运算可用下列所谓文氏图(图 1-1)表示.

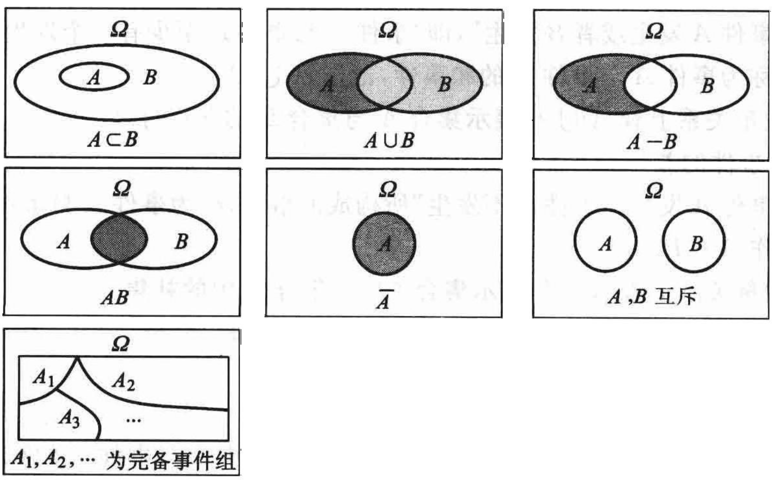

图 1-1

学会用直观的文氏图表示抽象的事件及其运算结果较为重要.

对于一个具体事件，要学会用集合符号表示，反之对于用集合符号表示的事件，要清楚其具体含义是什么，也就是说，要正确无误地“互译”出来，如下面的例子所示.

例 6 检验某种圆柱形产品，要求直径和长度都合格才算合格. 设事件 A：直径合格，事件 B：长度合格，则

$A \cup B$：直径和长度至少有一个合格，不能确定产品是否合格；

$A - B$：直径合格但长度不合格，产品不合格；

AB：产品合格；

$\overline{A}\overline{B}$：直径和长度都不合格，产品不合格；

$\overline{A} \cup \overline{B}$：直径或长度至少有一个不合格，产品不合格.

例 7 同时掷两枚硬币，观察出现正面和反面的情形.

设基本事件 e_1：(正，正)，e_2：(正，反)，e_3：(反，正)，e_4：(反，反)，随机事件 $A=\{e_1\}$，$B=\{e_2,e_3\}$，$C=\{e_1,e_2,e_3\}$，试描述随机事件 A,B,C 并指出他们之间的关系.

解 $A=\{e_1\}$：两枚都正面朝上；$B=\{e_2,e_3\}$：只有一枚正面朝上；

$C=\{e_1,e_2,e_3\}$：至少有一枚正面朝上.

易见 $A \cup B = C, AC = A, AB = \varnothing$.

例 8 射击目标 3 次. 设事件 A_i：第 i 次击中目标，$i=1,2,3$. 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列随机事件 A,B,C,D，并指出他们之间的关系.

(1) A：三次都击中目标；(2) B：仅击中目标一次；

(3) C：仅击中目标两次；(4) D：三次都未击中目标.

解 (1) $A = A_1A_2A_3$；

(2) $B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

(3) $C = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$；

(4) $D = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

显然 A,B,C,D 互斥，它们的和构成必然事件：$A+B+C+D=\Omega$.

注 本例中的随机试验 E 是由 3 个随机试验 E_i $(i=1,2,3)$ 复合而成的，其中 E_i：第 i 次射击，E_i 下的样本空间 $\Omega_i = \{A_i,\overline{A}_i\}$. 也就是说，把试验 E_1，E_2，E_3 各做一次才算试验 E 完成一次. 我们称随机试验 E 为**复合随机试验**，它的试验结果由 E_1,E_2,E_3 的结果依次复合而成，样本空间由 8 个样本点组成

$$\Omega = \{A_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}.$$

由集合的运算规律可得随机事件的运算规律及常用结论如下：

(1) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(AB)C = A(BC)$；

(2) 交换律 $AB = BA$，$A \cup B = B \cup A$；

(3) 分配律 $A(B \cup C) = AB \cup AC$，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

(4) 吸收律 $A \cup A = A; A = AA$;

若 $A \subset B$,则 $AB = A, A \cup B = B$;

(5) 对偶律(德摩根律) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(6) $A - B = A - AB = A\overline{B}$;

(7) $AB \cup A\overline{B} = A, A \cup B = A\overline{B} \cup AB \cup B\overline{A}$.

上述运算规律及结论由图 1-1 观察是明显的.

注 不要把数的运算规律:移项、添括号、去括号等运用到事件运算上来,这些运算在事件运算中一般是不成立的.例如:

$$A \cup B - C \neq A \cup (B - C);$$

$$A - (B - C) \neq (A - B) \cup C;$$

由 $A \cup C = B \cup C$ 不一定有 $A = B$.

§2 随机事件的概率

在一次随机试验中,人们常常需要了解某些事件发生的可能性的大小,为此我们首先引入频率的概念,它描述了随机事件发生的频繁程度,进而我们再引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的度量——概率,最后我们再给出两种特殊的概率模型下的概率的定义.

一、概率的统计定义

定义 设 A 为随机试验 E 下的事件,将 E 重复独立做 n 次,称事件 A 发生的次数 f_n 为事件 A 在 n 次试验中发生的频数,称比值 $\frac{f_n}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**.

频率在一定程度上反映了事件发生的频繁程度,经大量试验证明频率还具有稳定性,比如历史上有过一些著名的掷硬币试验,如下表所示:

试验者	掷硬币次数 n	出现正面次数 f_n	出现正面的频率 $\frac{f_n}{n}$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

可见,出现正面的频率 $\frac{f_n}{n}$ 总在 0.5 附近摆动,随着试验次数的增加,它逐渐趋于 0.5.

人们注意到，在充分多次试验中，事件的频率总在一个定值附近摆动，而且试验次数越多，一般来说摆动越小，这个性质叫做**频率的稳定性**. 由此，我们自然地用该定值来度量事件发生的可能性的大小.

定义(概率的统计定义) 设 A 为随机试验 E 下的事件，将 E 重复独立做 n 次，设事件 A 发生的频数为 f_n，则定义频率$\dfrac{f_n}{n}$的稳定值为事件 A 的**概率**，记为$P(A)$.

概率的统计定义肯定了随机事件的概率存在，但在实际问题中 $P(A)$往往是未知的，无法由此定义求得 $P(A)$，故引出下列特殊概率模型下概率的古典定义和几何定义.

二、概率的古典定义

定义(概率的古典定义) 设随机试验下样本空间 Ω 中样本点个数有限并设为 n，且每个样本点都等可能出现，如事件 A 所含样本点个数为 k，则定义事件 A 的概率为 $P(A)=\dfrac{k}{n}$，称之为**古典概率**，上述试验称为**古典概型**.

在用该公式计算时，经常要用排列组合公式来求出基本事件总数 n 及事件 A 包含的基本事件个数 k.

例 1(抽签原理) 袋中有 a 个白球、b 个红球，依次随机取球，求第 k 次抽到白球的概率.

解法一 设事件 A：第 k 次抽到白球. 将球全部编号并全部取出依次放入 $a+b$ 个格子，则样本点总数 $n=(a+b)!$，有利于 A 发生的样本点数 $k=\mathrm{P}_a^1(a+b-1)!$，由古典概率定义，所求概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{P}_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法二 设事件 A：第 k 次抽到白球. 将球全部编号并取出 k 个依次放入 k 个格子中，则样本点总数 $n=\mathrm{P}_{a+b}^k$，有利于 A 发生的样本点数 $k=\mathrm{P}_a^1\mathrm{P}_{a+b-1}^{k-1}$，由古典概率定义，所求概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{P}_a^1\mathrm{P}_{a+b-1}^{k-1}}{\mathrm{P}_{a+b}^k}=\frac{a}{a+b}.$$

此例结果说明抽签与先后次序无关.

例 2 某人有 5 把钥匙，其中有 2 把房门钥匙，但忘记了究竟是哪两把，只有逐一试开，试求试开 3 次能打开房门的概率.

解法一 设随机试验 E：从 5 把钥匙中每次取 1 把，无放回地逐一试开 3 次，事件 A：房门被打开，由于基本事件总数为 $n=\mathrm{C}_5^1\times\mathrm{C}_4^1\times\mathrm{C}_3^1=60$，又“3 次试开都打不开房门”这一事件，其含义是无放回抽取 3 次都未抽到房门钥匙，故有 $\mathrm{C}_3^1\times\mathrm{C}_2^1\times\mathrm{C}_1^1=6$ 种取法，从而“3 次试开能打开房门”(即至少抽到一把房门钥匙)的取法种数为 $k=60-6=54$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{54}{60}=0.9.$$

解法二　将“能打开房门”理解为从 5 把钥匙中任取 3 把，其中有 1 把或 2 把房门钥匙，故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_2^1\times C_3^2+C_2^2\times C_3^1}{C_5^3}=0.9.$$

例 3(玻尔兹曼问题)　设有 n 个不同的质点，每个质点都能以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 落入 N 个格子中的任一格子 $(N>n)$，试求：

(1) 指定的 n 个格子中各有一个质点的概率；

(2) 任意的 n 个格子中各有一个质点的概率；

(3) 指定的某个格子恰有 m 个质点的概率 $(m\leqslant n)$.

解　由于每个质点都可落入 N 个格子中的任何一格子，所以 n 个不同的质点按格子分布共有 N^n 种分布法. 记(1)，(2)，(3)的事件分别为 A,B,C.

(1) “指定的 n 个格子各有一个质点”，质点是各不相同的，所以 n 个质点在 n 个格子中的分布与次序有关，有 $n!$ 种分布法，故所求概率为

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 因为从 N 个格子中任选 n 个，有 C_N^n 种选法，所以“任意 n 个格子中各有一个质点”含 $C_N^n n!$ 种分布法，故所求概率为

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

(3) 从 n 个不同的质点中任选 m 个放入指定的某个格子中，有 C_n^m 种选法，将其余的 $n-m$ 个质点分布到剩下的 $N-1$ 个格子中去又有 $(N-1)^{n-m}$ 种分布法，故所求概率为

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

注　如果将质点换成人(人是各不相同的)，格子换成房子，就是所谓分房问题，又如 n 个人的生日在一年 365 天中的分布也可归结为此问题.

例 4 (“小概率事件原理”的一个著名问题)　某家庭有 4 个女孩，她们在洗碗时打破了 4 个碗，其中有 3 个是最小的女孩打破的，因此家人说这不是偶然的，说她太笨，她却不服气，试问：用概率原理说明她有理由申辩这完全是巧合吗？

解　“完全是巧合”的概率意义是：假设 4 个女孩打破每一个碗都是等可能性的.

设事件 A：被打破的碗中有 3 个是最小的女孩打破的，在“等可能性”的假设下，4 个碗被 4 个女孩打破(即 4 个碗按 4 个女孩“分布”)，有 4^4 种选择方式，最小的女孩打破其中 3 个，有 C_4^3 种选择方式，而另一个碗被其余 3 个女孩中的任

一个打破又有 C_3^1 种选择方式，故事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_4^3C_3^1}{4^4}=\frac{12}{256}\approx 0.047.$$

$P(A)\approx 0.047$，所以 A 是小概率事件. 实践经验告诉我们，一个小概率事件在一次试验中是不大可能出现的，而它竟然在一次试验(洗碗)中出现了，产生矛盾. 因此，有理由怀疑原先的假设"4 个女孩打破每一个碗是等可能性的"，从而可以认为最小的女孩打破碗的可能性比其他三位女孩大，因此，她没有理由申辩这完全是巧合.

小概率事件原理：一个小概率事件在一次试验中是不大可能出现的. 该原理在数理统计中有着重要应用.

三、概率的几何定义

定义(概率的几何定义) 设样本空间 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ $(n=1,2,3)$ 中一区域，事件 $A\subset\Omega$，且 Ω 中任意基本事件是等可能发生的，则定义事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$，称之为**几何概率**. 其中 $\mu(A)$，$\mu(\Omega)$ 分别为区域 A 和 Ω 的度量(长度、面积或体积)，上述概率模型称为**几何概率模型**.

注 由几何定义知，若 $P(A)=0$，则 A 不一定为 $\varnothing$，若 $P(A)=1$，则 A 不一定为 Ω.

例 5(约会问题) 甲乙两人约定在某一小时内于某地会面，先到的人等候 20 分钟，过时就离开. 假定两人何时到达会面地点是随机的，试求两人能会面的概率.

解 设甲到达会面处的时刻为 x (分) $(0\leqslant x\leqslant 60)$，乙到达会面地点的时刻为 y (分)$(0\leqslant y\leqslant 60)$. 显然两人能会面的充要条件是 $|x-y|\leqslant 20$，将 $|x-y|=20$ 去绝对值符号，得两条直线方程 $x-y=\pm 20$，如图 1-2 所示，正方形区域表示甲乙两人到达会面地点的所有可能时刻，而不等式 $|x-y|\leqslant 20$ 表示点 $M(x,y)$ 落入阴影部分，故两人能会面的概率为

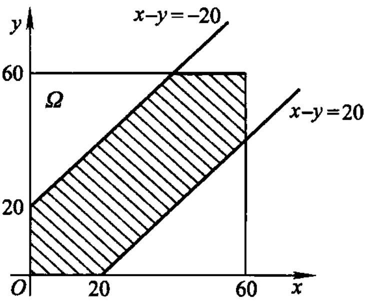

图 1-2

$$P=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

例 6 设某吸毒人员强制戒毒期满后在家接受监控，监控期为 L 单位时间，该期间内随机地抽取尿样化验，设该人员可能复吸且复吸 S 单位时间内尿样呈阳性反应，求该人员复吸并被检验出的概率.

解 设 x: 复吸的时刻，y: 抽取尿样时刻，则样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant$