大学专科高等数学基础简明教材系列

高等数学基础（乙）

简明线性代数

JIAN MING XIAN XING DAI SHU

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社

大学专科高等数学基础简明教材系列

高等数学基础(乙)

简明线性代数

（经济类与管理类）

周誓达　编著

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

简明线性代数（经济类与管理类）/周誓达编著
北京：中国人民大学出版社，2010
大学专科高等数学基础简明教材系列
ISBN 978-7-300-11870-3

Ⅰ.①简…
Ⅱ.①周…
Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 046936 号

大学专科高等数学基础简明教材系列
高等数学基础（乙）
简明线性代数
（经济类与管理类）
周誓达　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京七色印务有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2010 年 6 月第 1 版
印　　张	15	**印　　次**	2010 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	268 000	**定　　价**	24.00 元

前　言

大学专科高等数学基础简明教材系列是为大学专科经济类与管理类各专业编写的教材，包括《简明微积分》、《简明线性代数》及《简明概率论与数理统计》。这是一套特色鲜明的教材系列，其特色是：密切结合经济工作的需要，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，说理透彻，循序渐进，通俗易懂。

《简明线性代数》共分四章，介绍了经济工作所需要的行列式、矩阵、线性方程组、投入产出问题及向量。本书着重讲解基本概念、基本理论及基本方法，发扬独立思考的精神，培养熟练运算能力与解决实际问题的能力。

经济类与管理类专业毕竟不是数学专业。本着“打好基础，够用为度”的原则，本书去掉了对于经济工作并不急需的某些内容与某些定理的严格证明，而用较多篇幅详细讲述那些急需的内容，讲得流畅，讲得透彻，实现“在战术上以多胜少”的策略。本书不求深，不求全，只求实用，重视在经济上的应用，注意与专业课接轨，体现“有所为，必须有所不为”。

基础课毕竟不是专业课。本着“服务专业，兼顾数学体系”的原则，本书不盲目攀比难度，做到难易适当，深入浅出，举一反三，融会贯通，达到“跳一跳就能够着苹果”的效果。本书在内容编排上做到前后呼应，前面的内容在后面都有归宿，后面的内容在前面都有伏笔，形象直观地说明问题，适当注意知识面的拓宽，使得“讲起

来好讲，学起来好学”。

质量是教材的生命，质量是特色的反映，质量不过硬，教材就站不住脚。本书在质量上坚持高标准，不但计算正确无误，而且编排科学合理，尤其在线性方程组解的判别的处理上、在向量组线性相关性的论述上都有许多独到之处，便于学员理解与掌握。衡量教材质量的一项重要标准是减少以至消灭差错，本书整个书稿都经过再三验算，作者自始至终参与排版校对，实现零差错。

例题、习题是教材的窗口，集中展示了教学意图。本书对例题、习题给予高度重视，例题、习题都经过精心设计与编选，它们与概念、理论、方法的讲述完全配套，其中除计算题与经济应用题外，尚有考查基本概念与基本运算技能的填空题与单项选择题。填空题要求将正确答案直接填在空白处；单项选择题是指在四项备选答案中，只有一项是正确的，要求将正确备选答案前面的字母填在括号内。书末附有全部习题答案，便于检查学习效果。

相信读者学习本书后会大有收获，并对学习线性代数与线性规划产生兴趣，感到快乐，增强学习信心，提高科学素质。记得尊敬的老舍先生关于文学创作曾经说过：写什么固然重要，怎样写尤其重要。我想这至理名言对于编著教材同样具有指导意义。诚挚欢迎各位教师与广大读者提出宝贵意见，本书将不断改进与完善，坚持不懈地提高质量，突出自己的特色，更好地为教学第一线服务。

本书配有教学课件，并配有包括各章学习要点与全部习题详细解答的简明线性代数学习指导。本书教学课件通过中国人民大学出版社网站供各位教师与学员免费下载使用，进行交流，请登录 http://www.crup.com.cn/jiaoyu/获取。

周誓达

2010 年 3 月 29 日于北京

目　录

第一章

行 列 式

§1.1 行列式的概念

考虑由两个线性方程式构成的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

其中 x_1, x_2 为未知量，$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为未知量的系数，b_1, b_2 为常数项．用消元法解此线性方程组：第一个线性方程式乘以 a_{22}，第二个线性方程式乘以 a_{12}，然后相减；第二个线性方程式乘以 a_{11}，第一个线性方程式乘以 a_{21}，然后相减．得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，此线性方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了进一步揭示求解公式的规律,需要引进二阶行列式的概念.

记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称为二阶行列式,其中 a_{11},a_{12},a_{21},a_{22} 称为元素,这 4 个元素排成一个方阵,横排称为行,竖排称为列,二阶行列式共有两行两列. 每个元素有两个脚标,第一脚标指明这个元素所在行的行数,称为行标;第二脚标指明这个元素所在列的列数,称为列标. 在二阶行列式中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线.

二阶行列式的计算,可以用画线的方法记忆,即二阶行列式等于主对角线(实线)上两个元素的乘积减去次对角线(虚线)上两个元素的乘积,如图 1—1.

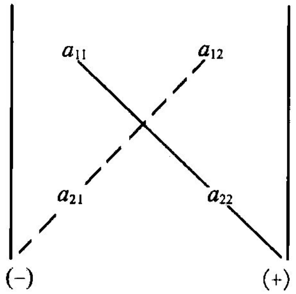

图 1—1

例 1 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

例 2 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

类似地,为了解由三个线性方程式构成的三元线性方程组,需要引进三阶行列式的概念.

记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$,称为三阶行列式,三阶行列式共有 9 个元素,它们排成三行三列,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 三阶行列式的计算,也可以用画线的方法记忆,如图 1—2.

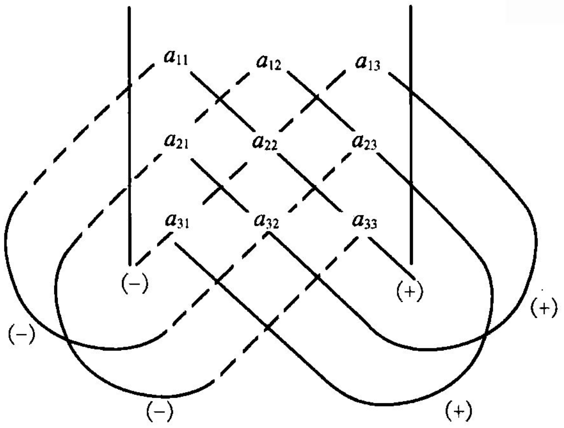

图 1—2

例 3　三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 1\times 3\times 5+(-1)\times(-3)\times(-4)+(-2)\times 2\times 4$$
$$-(-2)\times 3\times(-4)-(-1)\times 2\times 5-1\times(-3)\times 4$$
$$= 15+(-12)+(-16)-24-(-10)-(-12)=-15$$

例 4　已知三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=0$,求元素 a 的值.

解:计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=a^2+0+(-4a)-0-(-3)-0=a^2-4a+3$$
$$=(a-1)(a-3)$$

再从已知条件得到关系式 $(a-1)(a-3)=0$,所以元素

$$a=1 \text{ 或 } a=3$$

为了讨论 n 阶行列式,下面给出排列逆序数的概念. 考虑由前 n 个正整数组成的数字不重复的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中,若有较大的数排在较小的数的前面,则称它们构成一个逆序,并称逆序的总数为排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数,记作 $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

容易知道,由 1,2 这两个数字组成排列的逆序数为

$$N(1\ 2)=0 \qquad N(2\ 1)=1$$

由 1,2,3 这三个数字组成排列的逆序数为

$$N(1\ 2\ 3)=0 \qquad N(2\ 3\ 1)=2 \qquad N(3\ 1\ 2)=2$$

$$N(3\ 2\ 1)=3 \qquad N(2\ 1\ 3)=1 \qquad N(1\ 3\ 2)=1$$

考察二阶行列式，它是 $2!=2$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 2 个元素乘积，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为 1 项，可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，这时若相应列标排列逆序数为零，则这项前面取正号；若相应列标排列逆序数为奇数，则这项前面取负号.

再考察三阶行列式，它是 $3!=6$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 3 个元素乘积，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为 3 项，可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，这时若相应列标排列逆序数为零或偶数，则这项前面取正号；若相应列标排列逆序数为奇数，则这项前面取负号.

根据上面考察得到的规律，给出 n 阶行列式的概念.

定义 1.1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n 阶行列式，它是 $n!$项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 n 个元素乘积，可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，这时若相应列标排列逆序数为零或偶数，则这项前面取正号；若相应列标排列逆序数为奇数，则这项前面取负号.

n 阶行列式共有 n^2 个元素，它们排成 n 行 n 列，从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 容易知道：同一行的元素不可能乘在一起，同一列的元素也不可能乘在一起. 可以证明：在 n 阶行列式中，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为$\dfrac{n!}{2}$项.

行列式经常用大写字母 D 表示，或记作 $|a_{ij}|$. 特别规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

定义 1.2 已知 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将行列依次互换（第 1 行变成第 1 列，第 2 行变成第 2 列，…，第 n 行变成第 n 列），所得到的 n 阶行列式称为行列式 D 的转置行列式，记作

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 之间有什么关系?考察三阶行列式

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23} \end{aligned}$$

容易看出:$D^{\mathrm{T}}=D$,可以证明这个结论对于 n 阶行列式也是成立的.

定理 1.1 转置行列式 D^{T} 的值等于行列式 D 的值,即

$$D^{\mathrm{T}}=D$$

定理 1.1 说明:在行列式中,行与列的地位是对等的. 即:凡有关行的性质,对于列必然成立;凡有关列的性质,对于行也必然成立.

最后讨论一类最基本也是最重要的行列式即三角形行列式.

定义 1.3 若行列式 D 主对角线以上或以下的元素全为零,则称行列式 D 为三角形行列式.

考虑三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它当然等于 $n!$ 项代数和,其中含有零因子的项一定等于零,可以不必考虑,所以只需考虑可能不为零的项. 在这样的项中,必然有一个因子来自第 1 行,只能是元素 a_{11};必然有一个因子来自第 2 行,有元素 a_{21},a_{22} 可供选择,但元素 a_{21} 与元素 a_{11} 同在第 1 列,不能乘在一起,从而只能是元素 a_{22};…;必然有一个因子来自第 n 行,有元素 a_{n1},a_{n2},…,a_{nn} 可供选择,但元素 a_{n1} 与元素 a_{11} 同在第 1 列,不能乘在一起,元素 a_{n2} 与元素 a_{22} 同在第 2 列,不能乘在一起,…,从而只能是元素 a_{nn}. 这说明可能不为零的项只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,行标已经按顺序排列,由于列标排列逆序数

$$N(1\ 2\ \cdots\ n)=0$$

所以项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 前面应取正号. 那么,三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理,另一种三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

由此可知:三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

若行列式 D 主对角线以外的元素全为零,则称行列式 D 为对角形行列式,它是三角形行列式的特殊情况,它的值当然等于主对角线上元素的乘积,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

§ 1.2　行列式的性质

尽管在行列式定义中给出了计算行列式的具体方法,但工作量是很大的,因此有必要寻找计算行列式的其他方法.

根据 §1.1 的讨论可知,三角形行列式的计算非常简单,能够立即得到结果. 于是,计算行列式的思路之一就是将所计算的行列式通过恒等变形化为三角形行列式,其依据就是行列式的性质.

考虑三阶行列式

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

若将第 1 行与第 2 行交换,得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{21}a_{12}a_{33}+a_{22}a_{13}a_{31}+a_{23}a_{11}a_{32}-a_{23}a_{12}a_{31}-a_{22}a_{11}a_{33}-a_{21}a_{13}a_{32}$$

$$=-a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=-D$$

若将第 1 行乘以数 k,得到行列式

$$D_2=\begin{vmatrix}ka_{11}&ka_{12}&ka_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=ka_{11}a_{22}a_{33}+ka_{12}a_{23}a_{31}+ka_{13}a_{21}a_{32}-ka_{13}a_{22}a_{31}-ka_{12}a_{21}a_{33}$$
$$-ka_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=kD$$

若将第 1 行的 k 倍加到第 2 行上去,得到行列式

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+ka_{11}&a_{22}+ka_{12}&a_{23}+ka_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}+ka_{12})a_{33}+a_{12}(a_{23}+ka_{13})a_{31}+a_{13}(a_{21}+ka_{11})a_{32}$$
$$-a_{13}(a_{22}+ka_{12})a_{31}-a_{12}(a_{21}+ka_{11})a_{33}-a_{11}(a_{23}+ka_{13})a_{32}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=D$$

从上面观察得到的结论,可以证明对于 n 阶行列式在一般情况下也是成立的,行列式具有下列性质:

性质 1　交换行列式的任意两行(列),行列式变号;

性质 2　行列式的任意一行(列)的公因子可以提到行列式外面;

性质 3　行列式的任意一行(列)的 k 倍加到另外一行(列)上去,行列式的值不变.

自然会提出这样的问题:在什么情况下,行列式的值一定等于零. 作为行列式性质的推论回答了这个问题.

推论 1　如果行列式有一行(列)的元素全为零,则行列式的值一定等于零;

推论 2　如果行列式有两行(列)的对应元素相同,则行列式的值一定等于零;

推论 3　如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式的值一定等于零.

例 1　已知三阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=10$,求三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

的值.

解:三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(交换第 1 行与第 2 行)

$$=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(交换第 2 行与第 3 行)

$$=(-1)^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(-1)^2\times 10=10$$

例 2　已知三阶行列式$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=3$,求三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \end{vmatrix}$$

的值.

解:三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \end{vmatrix}$$

(第 1 行至第 3 行各行的公因子 2 皆提到行列式外面)

$$=2\times 2\times 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=2^3\times 3=24$$

例 3　已知三阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}=M$,求三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+kb & b+c & c \\ u+kv & v+w & w \\ x+ky & y+z & z \end{vmatrix}$$

的值.

解:三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+kb & b+c & c \\ u+kv & v+w & w \\ x+ky & y+z & z \end{vmatrix}$$

(第 3 列的 −1 倍加到第 2 列上去)

$$=\begin{vmatrix} a+kb & b & c \\ u+kv & v & w \\ x+ky & y & z \end{vmatrix}$$

(第 2 列的 $-k$ 倍加到第 1 列上去)

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}=M$$

有一些比较简单的行列式,应用行列式的性质,很容易把它们化为三角形行列式,因而迅速得到它们的值.

例 4　填空题

四阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$______.

解:计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(交换第 1 行与第 3 行)

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

于是应将“-1”直接填在空内.

例 5 单项选择题

已知四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix}=1$,则元素 $a=($ $)$.

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{8}$

解:计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$$

(交换第 1 行与第 4 行,交换第 2 行与第 3 行)

$$=(-1)^2\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=8a$$

再从已知条件得到关系式 $8a=1$,因此元素

$$a=\frac{1}{8}$$

这个正确答案恰好就是备选答案(d),所以选择(d).

例 6 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.