概率论与数理统计疑难分析与解题方法

大学数学学习方法丛书

基本内容归纳提炼
学习方法疑难分析
典型例题解答技巧
考研知识总结升华

GAILULUN YU SHULI TONGJI YINAN FENXI YU JIETI FANGFA

孙清华 孙昊

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

大学数学学习方法丛书

概率论与数理统计
疑难分析与解题方法

孙清华　孙　昊

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书是《大学数学学习方法》丛书之一，是学习概率论与数理统计课程的优秀辅导书，也是大学生报考研究生必备的参考书.本书按照《概率论与数理统计课程教学大纲》和《硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写.对概率论与数理统计课程学习中的疑难问题作了详尽、全面的分析解答，对解题方法与技巧作了演绎讲解、归纳评点，读者可以从中领受到概率统计思想的精髓和方法技巧.本书还汇集了历年硕士研究生入学考试中概率论与数理统计试题的解答，读者可以由此了解研究生入学考试对概率统计课程的要求、考点与动向.

欢迎读者选用本系列丛书，希望它成为您的良师益友.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计疑难分析与解题方法/孙清华　孙　昊.—3版.—武汉:华中科技大学出版社，2010年1月

ISBN 978-7-5609-5881-1

Ⅰ.概…　Ⅱ.①孙…　②孙…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料　②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第227236号

概率论与数理统计疑难分析与解题方法　　孙清华　孙　昊

责任编辑:徐正达　　封面设计:潘　群

责任校对:周　娟　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　　排:武汉佳年华科技有限公司

印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm　1/16　　印张:16.25　　字数:458 000

版次:2010年1月第3版　　印次:2010年1月第5次印刷　　定价:22.80元

ISBN 978-7-5609-5881-1/O·519

前　言

概率论与数理统计是高等学校的一门重要的数学基础课.概率统计方法是现代科学技术、经济管理、工农业生产和社会人文各个领域中卓有成效的处理实际问题、解决疑难问题的优选方法.因此,学好和用好概率统计方法对于每一个卓越的实际工作者和管理者都是十分必要的.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学学科,它的基本概念、思维方式与解题方法与过去学过的其他数学学科不同,因此初学者普遍感到概念难懂,方法难学,思维难以展开,习题求解难以入手,迫切希望能有一本好书帮助他们分析疑难和指导解题方法,本书就是为帮助大家克服学习中的困难而编写的.

本书按照教育部关于《概率论与数理统计教学大纲》和《硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写,适合高等学校学生、教师和准备报考硕士研究生的人士使用.本书与教材同步,全书分为九章.以章节为序,首先对各节主要内容进行了梳理、归纳,然后对概念和方法中的疑难进行了分析、解答,接着用大量的例题对各种解题方法与技巧进行了演绎讲解、提炼评点,最后又用历年考研试题的解答指明了该部分内容在概率统计中的重要性(典型例题中题前加·的也是较早的考研试题).通过对本书的学习,读者可以完全理解概率统计的概念与方法,领会概率统计思想的精髓,掌握概率统计方法的应用与技巧.

本书的特点是以解析方式对学习中可能产生的对概念的误解、方法的错失作详尽的分析讨论和论证求索,达到理解消化、熟练掌握的效果;本书汇集了大量典型又全面的例子来展示各种解题方法与技巧,相信能给读者启迪与帮助.

本书在编写中参阅了一些作者的有关著作,在此向他们致以谢意.本书得以顺利出版,还要感谢华中科技大学出版社的领导与编辑的大力支持.

对于本书中可能出现的错漏与不足之处,热忱欢迎同行与读者提出批评.

孙清华　孙昊

2009 年 12 月

目　录

第一章 随机事件与概率

第一节 样本空间与随机事件

主要内容

1. 随机试验 若把科学实验或观察都称为试验，则满足下列条件的试验称为随机试验：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，且在试验开始前能明确所有可能的结果；

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现.

随机试验一般用大写字母 $E,F,\cdots$ 来表示，我们通过随机试验来研究随机现象.

2. 样本空间 随机试验的每一个可能出现的不可分解的结果称为样本点，全体样本点的集合称为样本空间，用 Ω(或 S)来表示.

3. 随机事件 样本空间 Ω 的子集合称为试验 E 的随机事件，简称事件，以大写字母 $A,B,\cdots$ 来表示. 随机事件可以分为：

(1) 基本事件 只含一个样本点的子集合.

(2) 复合事件 含若干个样本点的子集合.

(3) 不可能事件 不含样本点的子集合(空集)，所以它在每次试验中都不会发生，记为$\varnothing$.

(4) 必然事件 样本空间本身，所以它在每次试验中必然发生，记为 Ω.

事实上，(3)与(4)具有确定性，不是随机事件，但仍可把它们当作随机事件来处理.

4. 事件的关系 设 Ω 为试验 E 的样本空间，A,B,C 为 Ω 的子集，则以下关系存在：

(1) 包含 若 A 的每个样本点都属于 B，则 A 发生导致 B 发生，称事件 B 包含事件 A，或事件 A 被事件 B 包含，记为 $A\subset B$.

(2) 等价 若 $A\supset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立，则称 A 与 B 等价，记为 $A=B$. 在一次试验中，等价的两个事件或同时发生或同时不发生.

(3) 互斥(互不相容) 若事件 A 与事件 B 不能同时发生，称事件 A 与 B 互不相容(互斥)，记为 $A\cap B=\varnothing$(或 $AB=\varnothing$).

5. 事件的运算 由于事件是集合，因此事件的运算与集合的运算是一致的. 常用的运算如下：

(1) 并(和) 至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点的集合称为事件 A 与 B 的并(或和)，记为 $A+B$ 或 $A\cup B$. 即在一次试验中，$A+B$ 发生表示 A 与 B 至少有一个发生.

$A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和. $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和.

(2) 交(积) 同时属于 A 和 B 的所有样本点的集合称为事件 A 与 B 的交(或积)，记为 $A\cap B$ 或 AB. 在一次试验中，AB 发生表示 A 与 B 都发生.

$A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积. $A_1A_2\cdots A_n\cdots$ 或 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 称为可列个事件

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的积.

(3) 差　事件 A 发生而事件 B 不发生，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$，有关系式 $A-B=A\bar{B}$.

需要注意的是，不要求 $A\supset B$ 才有 $A-B$，如图 1.1 中画有斜线的部分即为 $A-B$.

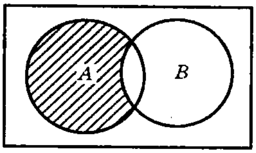

图 1.1

(4) 逆(对立)　样本空间 Ω 中所有不包含在 A 中的样本点的集合称为 A 的逆，记为 $\bar{A}$，也称为 A 的对立事件. 在一次试验中 $\bar{A}$ 发生表示 A 不发生. 有关系式

$$A+\bar{A}=\Omega, \quad A\cap\bar{A}=\varnothing.$$

6. 事件的运算规律

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, \quad A\cap B=B\cap A.$

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, \quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$

(3) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$

(4) 对偶原理　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \quad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}; \quad A+A=A, A+\Omega=\Omega; \quad A\Omega=A, A\varnothing=\varnothing.$

疑 难 分 析

1. 怎样确定随机试验的样本空间?

答　对一个随机试验而言，样本空间并不一定唯一. 在同一试验中，当试验的目的不同时，样本空间往往是不同的. 如，把篮球运动员投篮作为随机试验时，若试验目的是考察命中率，则试验的样本空间为 $\Omega_1=\{$中，不中$\}$；若试验目的是考察得分情况，则试验的样本空间为 $\Omega_2=\{1$ 分，2 分，3 分，0 分$\}$. Ω_1 与 Ω_2 显然不同. 所以，我们应从试验目的出发来确定样本空间.

2. 怎样理解样本空间与必然事件的关系?

答　必然事件与样本空间的关系应当这样来认识：必然事件是指随机试验中一定会出现的事件. 当在一次试验中只有一个样本点出现时，如果把样本空间视作一个整体，就可以说样本空间 Ω 在每次试验中都出现了. 因而样本空间是随机试验的必然事件.

3. 如何认识互逆事件与互斥事件之间的联系与区别?

答　A 与 B 互逆，则 $B=\bar{A}$. 在一次试验中，A 与 B 必有一个发生，且至多只有一个发生.

如果事件 A 与 B 不能同时发生，则 A、B 互斥. 但 A、B 也可以同时不发生. 因此，互逆必定互斥，互斥不一定互逆.

区别互逆与互斥的关键是：互逆在样本空间只有两个(或两类)事件时存在，互斥在样本空间还可有多个(或多类)事件时存在. 互斥事件的特征是：在一次试验中，两个互斥事件可以同时不发生. 如，在一次考试中，及格与不及格总有一个发生，它们互逆又互斥；但考试成绩为 70 分或 80 分是互斥的，却不互逆，因为它们可以同时不发生.

4. 随机事件的运算与数的运算是否相同?

答　不相同. 不能把随机事件的“积”与“和”理解成数的“积”与“和”. 虽然它们性质类似，都满足交换律、结合律和分配律，但不能认为它们就是相同的运算. 事实上，它们是完全不同的运算，反映了不同的两类概念. 如：

对于数 a，有 $a+a=2a$，$aa=a^2$；而对于事件 A，有 $A+A=A$，$AA=A$.

对于数 a,b,c，有 $a+bc\neq(a+b)(a+c)$；而对于事件 A,B,C，有 $A+BC=(A+B)(A+C)$.

典 型 例 题

本节常见的习题类型是：用简单事件表示复合事件、证明关于事件的等式或不等式、用事件表

示应用问题的结果等.

常用的方法是:(1) 利用运算性质与规律将复合事件用等价的简单事件表示;(2) 利用集合的文氏图分析事件间关系,找出等价事件.

例 1　设 A,B 为任意两个事件,则 $(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=$________.

解　因为 A 与 $\overline{A}$ 互逆,B 与 $\overline{B}$ 互逆,所以

$$(\overline{A}+B)(A+B)=\overline{A}A+\overline{A}B+BA+BB=\varnothing+B+B=B,$$
$$(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=\overline{A}A+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}A+\overline{B}\,\overline{B}=\varnothing+\overline{B}+\overline{B}=\overline{B},$$

于是 $$(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=B\overline{B}=\varnothing.$$

例 2　设 A,B 为任意两个事件,则 $(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$ 表示(　　).

(A) 必然事件;　(B) A 与 B 恰有一个发生;　(C) 不可能事件;　(D) A 与 B 不同时发生.

解　选(B). 因为 $\overline{A}+\overline{B}=\Omega-AB$. 所以

$$(A+B)(\overline{A}+\overline{B})=(A+B)(\Omega-AB)=A\Omega-AB+B\Omega-AB=A+B-AB,$$

表明 A 与 B 恰有一个发生.

例 3　对任意两事件 A,B,证明:$A-B=A\overline{B}$.

证　设 $x\in(A-B)$,则 $x\in A$,$x\overline{\in}B$,即 $x\in A\overline{B}$,从而 $A-B\subset A\overline{B}$. 反之,若 $x\in A\overline{B}$,则 $x\in A$,$x\overline{\in}B$,即 $x\in(A-B)$,从而 $A\overline{B}\subset A-B$. 于是,$A-B=A\overline{B}$ 得证.

例 4　指出下列各式成立的条件:

(1) $A-(B-C)=(A-B)+C$;　　(2) $(A+B)-C=A+(B-C)$;

(3) $ABC=AB(C+B)$;　　(4) $\overline{(A+B)}C=C-C(A+B)$.

解　(1) 由例 3 知　$A-(B-C)=A\overline{(B\overline{C})}=A(\overline{B}+\overline{\overline{C}})=A\overline{B}+AC$,

而 $A-B=A\overline{B}$,故要 $A-(B-C)=(A-B)+C$,必须有 $(A-B)+C=A\overline{B}+AC$,即 $AC=C$. 从而知 C 是 A 的子集.

由此可知,在代数运算中的去括号与消去律在事件运算中是不成立的,一定要牢记两种运算的区别.

(2) 将式子变形为 $(A+B)\overline{C}=A+B\overline{C}$,得 $A\overline{C}+B\overline{C}=A+B\overline{C}$,知 $AC=\varnothing$ 时等式成立.

(3) 将式子变形为 $AB(C+B)=ABC+AB=ABC$,得 $AB=ABC$,知 $C\supset AB$ 时等式成立.

(4) $\overline{(A+B)}C=[\Omega-(A+B)]C=C-(A+B)C=C-C(A+B)$,知等式恒成立.

例 5　利用事件间关系,化简下列式子:

(1) $(A+B)(A+C)$;　(2) $\overline{(\overline{A}\,\overline{B}+C)\overline{AC}}$;　(3) $(A+B)(A+\overline{B})$.

解　(1) $(A+B)(A+C)=AA+AB+AC+BC=A+AB+AC+BC$,而 $(AB+AC)\subset A$,故

$$(A+B)(A+C)=A+BC.$$

(2) 本题中含有多个逆事件,因此要多次使用对偶律,以除去"逆"记号.

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{A}\,\overline{B}+C)\overline{AC}}&=\overline{(\overline{A}\,\overline{B}+C)}+\overline{\overline{AC}}=(A+B)\overline{C}+AC=A\overline{C}+B\overline{C}+AC\\&=A(C+\overline{C})+B\overline{C}=A+B\overline{C}.\end{aligned}$$

(3) $(A+B)(A+\overline{B})=(A+B)A+(A+B)\overline{B}=A+AB+A\overline{B}+B\overline{B}=A+A(B+\overline{B})+\varnothing=A$.

例 6　证明下列等式:

(1) $A\cup B=A\cup B\overline{A}$;　(2) $B-A=\overline{AB}-\overline{\overline{A}B}$;　(3) $(A-B)\cup(B-A)=\overline{AB\cup\overline{A}\,\overline{B}}$.

证　利用运算性质和运算律,有

(1) $A\cup B=(A\cup B)\cap\Omega=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})=A\cup AB\cup B\overline{A}=A\cup B\overline{A}$.

(2) $\overline{AB}-\overline{\overline{A}B}=\overline{AB}\cap\overline{A}B=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}B)=\overline{A}B$.

(3) $\overline{AB\cup\overline{A}\;\overline{B}}=\overline{AB}\cap\overline{\overline{A}\;\overline{B}}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B)=A\overline{A}\cup\overline{B}A\cup\overline{A}B\cup\overline{B}B=A\overline{B}\cup B\overline{A}$

$=(A-B)\cup(B-A)$.

例 7　用文氏图说明下列各式：

(1) $(A\cup B)C=AC\cup BC$；　(2) $AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；　(3) $A+B+C$.

解　(1) 如图 1.2(a)所示，$(A\cup B)C$ 表示 A 与 B 之和与 C 的交集，是画有交叉线的部分；AC 是 A 与 C 之交，是画有右斜线的部分，BC 是 B 与 C 之交，是画有左斜线的部分. AC 与 BC 之积是画有交叉线的部分，故知两者相等.

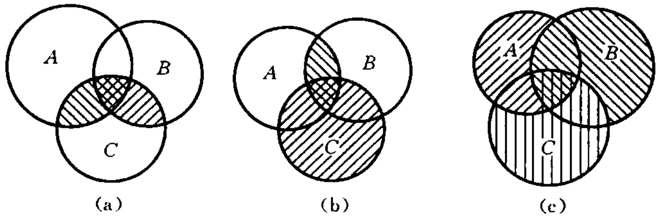

图 1.2

(2) $AB\cup C$ 表示 A 与 B 之积与 C 的和集，是图 1.2(b)中画有交叉线的部分；$(A\cup C)(B\cup C)$ 表示 A 与 C 之和同 B 与 C 之和的交，两者是相等的.

(3) $A+B+C$ 是 A,B,C 的和集（见图 1.2(c)），可以表示为

$$A+B+C=(A-AB)+(B-BC)+(C-AC)+ABC.$$

这里，因为$(B-BC)$与$(C-CA)$中重复减去了 ABC，所以最后要加上一个 ABC.

例 8　射击运动员射击的目标是三个半径分别为0.1 m、0.2 m、0.3 m 的同心圆环域，标为 r_1，r_2，r_3，以 A_i $(i=1,2,3)$记击中半径为 r_i 的圆环域内事件，试以事件的集合表示下列情况：

(1) 击中 0.3 m 半径的圆环域外；　(2) 击中任一圆环域内；

(3) 击中 0.1 m 半径的圆环域内；　(4) 击中 0.1 m 半径的圆环域外，0.2 m 半径的圆环域内.

解　(1) $\overline{A}_3$，即 A_3 的逆事件；　(2) $A_1\cup A_2\cup A_3$；　(3) A_1；　(4) A_2-A_1 或 $A_2\overline{A}_1$.

例 9　一批产品中有合格品也有废品，从中有放回地抽取（将产品取出一件观察后放回）三件产品，以 A_i $(i=1,2,3)$表示第 i 次抽到废品，试以事件的集合表示下列情况：

(1) 第一次和第二次抽取至少抽到一件废品；　(2) 只有第一次抽到废品；

(3) 三次都抽到废品；　(4) 至少有一次抽到废品；　(5) 只有两次抽到废品.

解　(1) $A_1\cup A_2$；　(2) $A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$；　(3) $A_1A_2A_3$；

(4) $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或$\overline{A_1A_2A_3}$（三次都抽到合格品的逆事件）；

(5) $\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3$.

例 10　设有随机事件 A,B,C，满足 $C\supset AB$，$\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$，证明：$AC=C\overline{B}\cup AB$.

证　因为 $\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$，所以 $C\subset A\cup B$. 于是，$C\overline{B}\subset(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}$，$CA\overline{B}=C\overline{B}\cap A\overline{B}=C\overline{B}$，$ACB=C\cap AB=AB$. 故

$$AC=AC(B\cup\overline{B})=AC\overline{B}\cup ACB=C\overline{B}\cup AB.$$

由文氏图（见图 1.3）可以清楚地看出，AC 为全部画有斜线的部分，$C\overline{B}$ 为画有左斜线的部分，AB 为画有右斜线的部分. 所以结论成立.

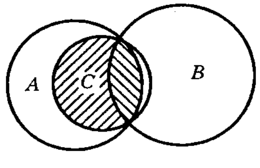

图 1.3

考研试题解答

1. (2000 年三、四)　在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有 2 个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 以 E 表示事件"电炉断电"，设 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于事件(　　).

(A) $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$；　(B) $\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$；　(C) $\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$；　(D) $\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$.

解　选(C)，因为$\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$等价于有2个温控器显示的温度不低于临界温度.

2.（1989年四）　以A表示"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，则其对立事件$\overline{A}$为(　　).

(A) 甲种产品滞销，乙种产品畅销；　(B) 甲、乙两种产品均畅销；

(C) 甲种产品畅销；　(D) 甲种产品滞销或乙种产品畅销.

解　选(D). 设$B=\{$甲种产品畅销$\}$，$C=\{$乙种产品畅销$\}$，则

$$\overline{A}=\overline{B}C+\overline{B}\,\overline{C}+BC=\overline{B}+C.$$

3.（1988年四）　若事件A,B,C满足$A+C=B+C$，问：$A=B$是否成立？

解　不一定. 如$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{4,5\}$，则$A+B=B+C$，但$A\neq B$.

4.（2001年四）　对于任意两事件A和B，与$A\cup B=B$不等价的是(　　).

(A) $A\subset B$；　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$；　(C) $A\overline{B}=\varnothing$；　(D) $\overline{A}B=\varnothing$.

解　选(D). 因为$A\cup B=B$，即$A\subset B$，则$\overline{B}\subset\overline{A}$，$A\overline{B}=\varnothing$，所以不等价的是(D).

第二节　随机事件的概率

主要内容

1. **频率**　在相同的条件下进行了n次试验，若事件A发生了n_A次，则n_A称为n次试验中A发生的频数. $f_n(A)=n_A/n$称为事件A发生的频率. 频率具有以下性质：

(1) 对任何事件A，有$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；　(2) 对必然事件$\Omega$，有$f_n(\Omega)=1$；

(3) 对k个两两互不相容事件$A_1,A_2,\cdots,A_k$，有

$$f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)=f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i).$$

2. **概率的公理化定义**　设Ω是随机试验E的样本空间，对E的每一事件A赋予一个实数值，称为事件A的概率，记为$P(A)$. 函数$P(\cdot)$具有以下性质：

(1) 非负性　对任一事件A，$P(A)\geqslant 0$；　(2) 规范性　$P(\Omega)=1$；

(3) 可加性　对可列个两两互不相容事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

3. **概率的统计定义**　当$n\to\infty$时，n次独立重复试验的频率$f_n(A)=n_A/n$趋于稳定值$P(A)$，则当n很大时，$P(A)=p\approx n_A/n$.

4. **概率的几何定义**　若随机试验E的可能结果有无限(不可列)个，每个基本事件发生的可能性相等，则当样本空间Ω与所求事件A都可以用某个几何量(长度L、面积S或体积V)来测度时，A发生的概率称为几何概率. 例如

$$P(A)=S(A)/S(\Omega).$$

其中，$S(A)$，$S(\Omega)$分别称为A、Ω的几何测度.

5. **概率的性质**

(1) $P(\varnothing)=0$；　(2) 对任一事件A，$P(A)=1-P(\overline{A})$；

(3) 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)；$$

(4) 对两个事件 A,B,若 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(B)\geqslant P(A).$$

6. 概率的加法公式

(1) 对于任意两个事件 A,B,有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

(2) 对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

7. 古典型概率 若随机试验的样本空间的元素为有限个(有限性),每个样本点发生的可能性相等(等可能性),则试验 E 的事件 A 发生的概率 $P(A)$ 称为古典型概率. 记 m 为事件 A 中所含基本事件数,n 为样本空间 Ω 中基本事件的总数,则计算公式为 $P(A)=m/n$.

利用古典型概率讨论事件概率的数学模型称为古典概型.

疑难分析

1. 怎样理解统计概率?

答 随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 反映在 n 重独立重复试验中 A 发生的频繁程度. 当 n 不同或在不同组试验时,$f_n(A)$ 的值一般是不同的. 但当 n 充分大时,$f_n(A)$ 会在概率 $P(A)=p$ 的值左右徘徊. n 越大,徘徊的区间越小. 所以,可以在这小区间中取一值作为 p 的近似值,于是有

$$P(A)=p\approx n_A/n=f_n(A).$$

统计概率是一个近似值.

2. 能否将概率看做频率的极限?

答 不能. 这是因为:第一,统计概率仅对 n 次独立重复试验而言(伯努利大数定律),并非所有情形都适用;第二,当 $n\to\infty$ 时,$f_n(A)$ 在 $P(A)$ 左右徘徊,与微积分中 $f(x)\to A$ 不同. 用 ε-N 概念来解释就是:存在随机现象的偶然性,对于某个给定的 $\varepsilon>0$,可能找不到相应的 $N(\varepsilon)$,使得当 $n>N$ 时,有 $|f_n(A)-P(A)|<\varepsilon$ 成立.

3. 怎样确定随机事件的等可能性?

答 等可能性是古典概型问题的两大假设之一,有了这两大假设,我们只需讨论样本空间 Ω 和事件 A 所包含的基本事件数,即可计算概率 $P(A)$. 但所讨论问题是否符合等可能假设,一般不可能实际验证,而是根据人们长期形成的"对称性经验"作出的. 如,将一枚均匀的硬币掷一次,正面向上和反面向上的机会是相等的;大小、形状和重量相同而颜色不同的小球装在同一小盒子中,每个球被摸到的可能性也是相等的. 但是,一个产妇到医院生产,产下男婴和女婴的可能性一般不相等;投一次篮,投中和投不中的可能性一般也不相等. 因此,等可能性的确定是人们根据对事物的长期认识而作出的,不是人为的.

4. 怎样判断讨论的问题是排列问题还是组合问题?

答 在计算样本空间 Ω 和事件 A 所包含基本事件数时,事件数的多少与问题是排列还是组合有关. 当事件的组成与顺序有关时,是排列问题;与顺序无关时,是组合问题.

如,某班级有 40 名学生,要选 3 人分别担任班长、学习委员、文体委员,有两种方案. 一种是选出 3 人,由他们自行分工,这种方案与顺序无关,是组合问题,共有 C_{40}^3 种选法. 另一种方案是分别选出班长(40 种选法)、学习委员(39 种选法)、文体委员(38 种选法),与顺序有关,是排列问题,共有 P_{40}^3 种选法. 第二种方案也可以表示为 $P_{40}^3=C_{40}^3\times 3!$,即选出三人后,再自由排列.

5. 怎样确定几何型概率中几何量的测度?

答　在几何型概率中,所考虑的问题中若只有一个因素在变,则取一维几何量——长度作几何测度(见本节例 34);若有两个因素在变,则取二维几何量——面积作几何测度(见本节例 35～38);若有三个因素变化,则取三维几何量——体积作几何测度(见本节例 39).

6. 怎样求解概率问题?

答　求解概率问题,首先要认真审题.分析题目给出了哪些条件,要解决哪些问题.一般来说,所给条件都是在解题时需要的,因此可以依据条件去寻找思路,即考虑怎样用上这些条件.在求事件概率时,要分析事件是简单事件还是复杂事件.如果是复杂事件,要考虑怎样分解为简单事件,是用排列、组合还是集合的知识来处理问题.对于后面讲到的许多更复杂的问题,还要应用概率的一些性质、规律和公式来处理,寻求正确的解答.

典 型 例 题

一、基本的概率问题

基本的概率问题一般可以利用事件之间的关系与运算,运用概率的运算性质求解或证明.读者对基本概念应有较深刻的理解,熟练掌握事件与概率的运算.

例 1　某医院一天中接诊外科病人 50 人,内科病人 50 人,五官科病人 50 人.设每位病人在一科室至多就诊一次,在病人总数中,在三个科室各就诊一次的占 10%,只看外科的占 20%,只看内科的占 25%,只看五官科的占 15%.问:

(1) 一天共接诊多少个病人?

(2) 既看外科又看内科的病人占病人总数的比例为多少?

解　以 A,B,C 分别表示外科、内科、五官科接诊病人的集合,由文氏图(见图1.4)知

$$A+B+C=ABC+A\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C},$$

又知
$$P(ABC)=0.1,\quad P(A\bar{B}\bar{C})=0.2,$$
$$P(\bar{A}B\bar{C})=0.25,\quad P(\bar{A}\bar{B}C)=0.15.$$

设 $P(AB\bar{C})=x$,　$P(\bar{A}BC)=y$,$P(A\bar{B}C)=z$,又设病人总人数为 S,可建立方程组

$$\begin{cases} S(0.2+x+y+0.1)=50, \\ S(0.25+y+z+0.1)=50, \\ S(0.15+z+x+0.1)=50, \\ x+y+z=1-0.2-0.25-0.15-0.1. \end{cases}$$

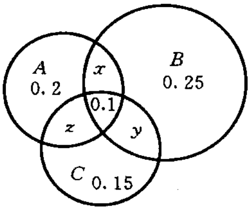

图 1.4

解方程组,得 $x=0.05$,　$y=0.15$,　$z=0.1$,　$S=100$.
所以病人总数为 100 名,既看外科又看内科的病人占总病人数的 5%.

·**例 2**　对于任意两事件 A 和 B,有 $P(A-B)=(\quad)$.

(A) $P(A)-P(B)$;　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$;

(C) $P(A)-P(AB)$;　　(D) $P(A)+P(B)-P(AB)$.

解　选(C).作文氏图即可得知.

·**例 3**　已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$,且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$________.

解　因为 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$
$$=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

所以
$$P(B)=1-P(A)=1-p.$$

·**例 4**　设 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=1/8$,则 A,B,C 三事件

中至少出现一个的概率为________.

解　因为 $P(AB)=P(BC)=0$，所以 $P(ABC)=0$. 于是

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=3/4-1/8=5/8.$$

·**例 5**　将 C,C,E,E,I,N,S 等 7 个字母随机地排成一排，那么恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率为________.

解　$p=\mathrm{P}_1^1\mathrm{P}_2^2\mathrm{P}_1^1\mathrm{P}_2^2\mathrm{P}_1^1\mathrm{P}_1^1\mathrm{P}_1^1/\mathrm{P}_7^7=4/7!\ =1/1260.$

·**例 6**　当事件 A,B 同时发生时，事件 C 必发生，则(　　).

(A) $P(C)=P(AB)$；　　(B) $P(C)=P(A+B)$；

(C) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$；　　(D) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

解　选(D). 因为

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B),$$

即

$$P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1,$$

所以

$$P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

·**例 7**　设 A 和 B 是两个概率不为零的不相容事件，则下列结论肯定正确的是(　　).

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容；　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容；

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$；　　(D) $P(A-B)=P(A)$.

解　选(D). (A)和(C)显然不成立. 当 $A+B=\Omega$ 且 A 与 B 互斥时，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互斥，故(B)也不成立.

例 8　设 $P(A)=a,P(B)=2a,P(C)=3a,P(AB)=P(BC)=b$，证明：$a\leqslant 1/4$.

证　由 $P(AB)\subset P(A)$，得 $b\leqslant a$. 又由加法公式，有

$$1\geqslant P(B+C)=P(B)+P(C)-P(BC)=2a+3a-b\geqslant 4a,$$

所以

$$a\leqslant 1/4.$$

例 9　对任意事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，证明：

(1) $P(A_1A_2)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$；

(2) $P(A_1A_2\cdots A_n)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-(n-1)$.

证　(1) 由加法公式，有

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2),$$

所以

$$P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1+A_2)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1.$$

(2) 用数学归纳法. $n=2$ 即有题(1)的结论. 设对 $n-1$，不等式成立，则

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_n)&=P[(A_1A_2\cdots A_{n-1})A_n]\geqslant P(A_1A_2\cdots A_{n-1})+P(A_n)-1\\&\geqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{n-1})-(n-2)+P(A_n)-1\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-(n-1).\end{aligned}$$

例 10　设有甲、乙两人玩投篮游戏，规定：每轮由甲先投一次，接着乙可投两次，先投中者胜. 已知甲每次投篮命中率为 p，乙命中率为 0.5，问 p 取何值时，甲、乙两人胜负概率相等.

解　以 $A_i,B_i\ (i=1,2,\cdots)$ 分别记甲、乙在第 i 次投篮命中事件，i 为甲、乙两人投篮的总次数，以 A,B 分别记甲、乙取胜事件，则

$$A=A_1+\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{B}_3A_4+\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{A}_4\overline{B}_5\overline{B}_6A_7+\cdots,$$

而

$$P(A_1)=p,\quad P(\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{B}_3A_4)=(1-p)\times 0.5^2p=0.25p(1-p),$$

$$P(\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{A}_4\overline{B}_5\overline{B}_6A_7)=0.25^2(1-p)^2p,$$

所以

$$P(A)=p+0.25(1-p)p+0.25^2(1-p)^2p+\cdots=p/[1-0.25(1-p)].$$

由题设，要 $P(A)=P(B)=0.5=p/[1-0.25(1-p)]$，解得 $p=3/4$. 即当甲的命中率为 3/4 时，甲、乙胜负的概率相等.

·**例 11**　设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别为 0.4，0.3和 0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$________.

解　因为 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，所以

$$P(AB)=0.4+0.3-0.6=0.1,\quad P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3.$$

二、古典型概率问题

古典型概率问题有三大典型问题：摸球问题、质点入盒问题和随机取数问题.另外还有一些其他类型的问题，如超几何分布概率问题等，也属于古典型概率问题.

求解古典型概率问题的常用方法有：

1. 加法原理　设完成一件事有 k 类方法，每类分别有 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 种方法，而完成这件事只要选择任一类方法中的任何一种，则完成这件事的方法有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种.

2. 乘法原理　设完成一件事有 n 个步骤：第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法……第 n 步有 m_n 种方法，且这 n 类的所有种方法都各不相同，则完成这件事的方法有 $m_1m_2\cdots m_n$ 种.

注意，如果完成一件事的方法是并列的关系，则使用加法原理；如果完成一件事的方法有顺序关系，则使用乘法原理.

3. 排列方法　从全部元素中取出一部分，有次序地排成一列，称为一个排列.排列可分为：

(1) 不同元素的选排列　从 n 个不同的元素中无放回地取出 m $(m<n)$ 个元素的排列，共有 P_n^m 种排列，即

$$\mathrm{P}_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

当 $m=n$ 时，称为全排列，共有 $n!$ 种排列.

(2) 不同元素的重复排列　从 n 个不同的元素中有放回地取出 m 个元素的排列，共有 n^m 种排列.

(3) 不全相似元素的排列　若在 n 个元素中有 m 类不同的元素，每类各有 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 个(每类元素彼此视为不可辨认)，则这 n 个元素的全排列共有 $n!/(k_1!k_2!\cdots k_m!)$ 种.

4. 环排列　从 n 个不同的元素中，选出 m 个元素排成一个圆周的排列，共有 $\mathrm{C}_n^m(m-1)!$ 种排列.

5. 组合方法　从全部元素中取出一部分元素而不考虑其顺序的排列称为一个组合.组合可分为：

(1) 一般的组合　从 n 个不同元素中取出 m 个的组合，共有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

种，也记为 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$.它具有性质

$$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m},\quad \mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_{n-1}^m+\mathrm{C}_{n-1}^{m-1},\quad \mathrm{C}_n^0=1.$$

(2) 不同类元素的组合　从不同的 k 类元素中取出 m 个元素，即从第一类的 n_1 个不同元素中取 m_1 个，从第二类的 n_2 个不同元素中取 m_2 个……从第 k 类的 n_k 个不同元素中取 m_k 个，且 $n_i\geqslant m_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$，$\sum\limits_{i=1}^{k}m_i=m$，则共有组合 $\mathrm{C}_{n_1}^{m_1}\mathrm{C}_{n_2}^{m_2}\cdots\mathrm{C}_{n_k}^{m_k}=\prod\limits_{i=1}^{k}\mathrm{C}_{n_i}^{m_i}$ 种.

在处理具体问题时，既要考虑事件是否与顺序有关，从而确定用组合方法还是排列方法，又要从实际问题出发判断是哪一种排列或组合，才能求得正确的结果.

摸球问题是：从 n 个可分辨的球中按照不同的要求逐个地取出 m 个球，并计算事件概率的问题.

例 12　一袋内有 a 个白球，b 个黑球，求：

(1) 不放回地任取 $m+n$ 个球，恰有 m 个白球、n 个黑球的概率；

(2) 不放回抽取，每次一个，第 k 次才取到白球的概率；

(3) 不放回抽取，每次一个，第 k 次恰取到白球的概率.

解 (1) 任取 $m+n$ 个球，与次序无关，且 m 个白球从 a 个白球中选，n 个黑球从 b 个黑球中选，都是组合问题. 所以

$$p=\frac{C_a^m C_b^n}{C_{a+b}^{m+n}}\ \text{(属于超几何分布)}.$$

(2) 抽取与次序有关，第 k 次抽取的白球可为 a 个白球中任一个，所以

$$p=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}\cdot\cdots\cdot\frac{b-k+2}{a+b-k+2}\cdot\frac{C_a^1}{a+b-k+1}.$$

(3) 第 k 次必取到白球，可为 a 个白球中任一个. 前 $k-1$ 次取到的白球数应小于 a 个，因此第一次只能在 $a+b-1$ 个球中取(留一个白球在第 k 次取)，以后各次相同. 所以

$$p=\frac{a+b-1}{a+b}\cdot\frac{a+b-2}{a+b-1}\cdot\cdots\cdot\frac{a+b-k+1}{a+b-k+2}\cdot\frac{C_a^1}{a+b-k+1}=\frac{a}{a+b}.$$

例 13 有 n 双不同的鞋混放在一起，有 n 个人每人随机地取走 2 只，求下列事件的概率：

(1) 每人取走的鞋恰为一双的概率；　(2) 每人取走的鞋不成一双的概率.

解 设 $2n$ 只鞋被 n 个人取走. 第一个人从 $2n$ 只中任取 2 只，第二个人从 $2n-2$ 只中任取 2 只……第 n 个人取走最后 2 只，但每个人取走 2 只的排列只是一种. 依乘法原理，基本事件的总数为

$$\frac{2n(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cdot 1}{2}=\frac{(2n)!}{2^n}.$$

(1) 每人取走的鞋恰为一双的事件数为 $C_n^1C_{n-1}^1\cdots C_2^1C_1^1=n!$，于是

$$p=n!/[(2n)!/2^n]=(2n)!!/(2n)!.$$

(2) 每人取走的 2 只鞋都不成双的事件数为 $(n!)^2$. 因为第一个人可以从 n 只右脚鞋中取 1 只，又可以从 n 只左脚鞋中取 1 只(只要两只鞋不成一双)，其余依此类推. 于是

$$p=(n!)^2/[(2n)!/2^n]=2^n(n!)^2/(2n)!\ =n!/(2n-1)!!.$$

例 14 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求这 4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双的概率.

解 本题的解法很多，我们仅举几种解法供读者参考. 读者可尝试其他合理的解法.

(1) 基本事件总数为 C_{10}^4. 有利事件数包括：恰有 2 只配成一双，事件数是 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$(C_5^1 表示 5 双中任取 1 双，其余 2 只由 4 双中取 2 双，再在每 1 双中取 1 只)；4 只配成两双，事件数是 C_5^2. 所求概率为

$$p=(C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2)/C_{10}^4=130/210=13/21.$$

(2) 用逆事件求，4 只鞋配不成双的事件数是 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$，故

$$p=1-C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1/C_{10}^4=1-80/210=13/21.$$

(3) 至少 2 只能配成一双也可以这样构成：先从 5 双中任取 1 只，其余 2 只从余下 8 只中取，但要减去可能成双的重复事件数，则

$$p=(C_5^1C_8^2-C_5^2)/C_{10}^4=13/21.$$

本题最容易出现的错误就是把有利事件数取为 $C_5^1C_8^2$，从而出现重复事件. 这是因为，若鞋子标有号码 1,2,…,5，则 C_5^1 可能取中第 i 号鞋，C_8^2 可能取中第 j 号的一双，此时成为两双的配对为 (i,j)，但也存在配对 (j,i). (i,j) 与 (j,i) 是一种，出现了重复事件，即多出了 $C_5^2=10$ 个事件.

例 15 把 10 本书任意放在书架上，其中指定的 3 本书放在一起的概率是______.

解 1/15. 因为基本事件数为 P_{10}. 3 本书必须在一起(看做 1 本)有 P_8 个排法，而 3 本书本身又有 P_3 种排法，所以有利事件数为 P_8P_3，故

$$P=P_8P_3/P_{10}=1/15.$$

例 16 从一副扑克牌(52 张)中任抽 4 张，则 4 张牌花色各不相同的概率为______.

解 0.105. 从 52 张牌中任取 4 张共有 C_{52}^4 种取法. 4 张牌花色各不相同，每一花色从 13 张中任取 1 张，有 $(C_{13}^1)^4=13^4$ 种取法. 故

$$p=13^4/C_{52}^4=0.105.$$

例 17　50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中恰有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉，若将 3 只铆钉都装在同一部件上，则这个部件的强度就太弱. 问：发生一个部件强度太弱的概率是多大？

解　基本事件总数为 C_{50}^3. 强度太弱事件数为 $C_3^3C_{10}^1$（C_3^3 是强度太弱的铆钉组合，C_{10}^1 是部件的取法数），所以

$$p=C_3^3C_{10}^1/C_{50}^3=1/1960.$$

例 18　一袋内装 9 个白球和 3 个红球，从袋中任意地顺次取出 3 球（取出后不放回），求：

(1) 第三次取出的是白球的概率；

(2) 若第三次取出的是白球，则第一次取得的也是白球的概率.

解　(1) 同例 12，有 $p=9/12=3/4$.

(2) 第三次和第一次都取得白球的事件是两个互不相容事件：（白，白，白），（白，红，白），所以

$$p=\frac{9}{12}\times\frac{8}{11}\times\frac{7}{10}+\frac{9}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{8}{10}=\frac{72}{132}=\frac{6}{11}.$$

质点入盒问题是：有 n 个可分辨的盒子和 m 个质点．按照不同的要求将 m 个质点放在 n 个盒子中，计算事件的概率.

例 19　将 n 个质点随机地放入 N $(N\geqslant n)$ 个盒子中，求下列事件的概率：

(1) 某指定的 n 个盒子中各有一个质点；　(2) 任意 n 个盒子中各有一个质点；

(3) 指定的某盒中恰有 m $(m<n)$ 个质点.

解　每个质点有 N 种放法，n 个质点有 N^n 种放法，于是：

(1) 相当于 n 个质点在 n 个盒子中的全排列，共有 $n!$ 种，所以 $p=n!/N^n$.

(2) 有利事件多了一个步骤，即 n 个盒子的选法有 C_N^n 种，所以 $p=C_N^n n!/N^n$.

(3) 从 n 个质点中取 m 个的取法有 C_n^m 种，其余的每个质点都有 $N-1$ 种放法，所以

$$p=C_n^m(N-1)^{n-m}/N^n.$$

例 20　某单位新录用了 12 名研究人员，其中有 3 名博士. 将他们随机地平均分到三个研究室去，问：(1) 每一个研究室分到一名博士的概率是多少？(2) 3 名博士分到同一研究室的概率是多少？

解　由不全相异元素的排列公式，得基本事件总数为 $C_{12}^4C_8^4C_4^4=12!/(4!)^3$.

(1) 将 3 名博士平均分配的分法有 P_3^3 种. 其余 9 名人员的分法有 $9!/(3!)^3$ 种，有利事件数为 $3!9!/(3!)^3$，所以

$$p=\frac{3!9!}{(3!)^3}\Big/\frac{12!}{(4!)^3}=\frac{16}{55}.$$

(2) 将 3 名博士分到同一研究室的分法有 C_3^1 种，其余 9 人的分法有 $9!/(1!4!4!)$ 种，有利事件数为 $(3\times 9!)/(4!)^2$，所以

$$p=\frac{3\times 9!}{(4!)^2}\Big/\frac{12!}{(4!)^3}=\frac{3}{55}.$$

例 21　将 3 个球随机地放在 4 个杯子中去．求杯子中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率.

解　基本事件总数为 4^3 个.

最大个数为 1，含事件数为 P_4^3. 所以，$p=P_4^3/4^3=3/8$.

最大个数为 2，则有 2 个球的杯子的选法有 C_4^1 种，球的选法有 C_3^2 种，剩下 1 个球有 3 种放法，有利事件数为 $3C_4^1C_3^2$. 所以

$$p=3C_4^1C_3^2/4^3=9/16.$$

最大个数为 3，则杯子的选法为 C_4^1，有利事件数为 C_4^1. 所以

$$p=C_4^1/4^3=1/16.$$